وزارة التربية

الرياضيات

كتاب الطالب

الصفّ الثاني عشر أدبي
الفصل الدراسي الثاني
١٢

الطبعة الثانية

وزارة التربية

كويت جديدة
NEWKUWAIT

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر أدبي
الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٩ - ١٤٤٠ هـ

٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

الطبعة الأولى ٢٠١٤م

الطبعة الثانية ٢٠١٦م

٢٠١٨م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر أدبي

أ. فتحي محمد عبد الفتاح (رئيسًا)

أ. محمود عبد الغني محمد — أ. سعيد أحمد علي خلف

أ. يسرى شملان أحمد البحر — أ. عيدة خلف عواد الشمري

أ. هنادي حباس غنيم المجول

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوحدة الرابعة

المتغيرات العشوائية وتوزيعها

Random Variables and Their Distribution

مشروع الوحدة: أهمية استخدام علم الاحتمالات المستند على إحصاءات سابقة للوصول إلى استنتاجات مفيدة

١ **مقدمة المشروع**: في إحدى رحلات الخطوط الجوية التي يتم خلالها استخدام طائرة تتسع لِـ ٢١٣ راكبًا، تقوم الشركة ببيع أكثر من ٢١٣ بطاقة لأنه معروف من رحلات سابقة أن بعض الركاب ممن سبق أن حجزوا بطاقات سفر قد يتخلفون عن الرحلة.

٢ **الهدف**: تهتم الشركة بأن يكون عدد الركاب في الرحلة مساويًا لعدد المقاعد المتوفرة على الطائرة أي ٢١٣ مقعدًا، لأنه إذا وجدت مقاعد فارغة على الطائرة خلال الرحلة فإن المردود المادي للرحلة سيتناقص، أما إذا كان عدد الركاب أكبر من عدد المقاعد فإن الشركة ستقوم بدفع تعويض مادي لكل راكب لم يتوفر له مقعد على متن الطائرة وهذا أيضًا سينقص من المردود المادي للرحلة.

٣ **اللوازم**: آلة حاسبة – حاسوب.

٤ **أسئلة حول التطبيق**:

بناءً على إحصاءات سابقة فإن احتمال تخلف راكب واحد عن رحلة جوية هو ٠,٠٩٧٥

أ أثبت أن عدد البطاقات المباعة للرحلة يجب أن يكون ٢٣٦ بطاقة حتى يتأمن وجود ٢١٣ راكبًا عند انطلاق الرحلة.

ب إذا باعت الشركة ٢٤٠ بطاقة أي ٤ بطاقات أكثر مما يلزم لتأمين ٢١٣ راكبًا.
أوجد احتمال وجود راكب إضافي لا مقعد له على متن الطائرة.

جـ إذا كانت الشركة تدفع ٢٠٠ دينار لكل راكب حجز بطاقة ولم يجد مقعدًا على متن الطائرة للرحلة، فأوجد احتمال أن تدفع الشركة ١٠٠٠ دينار تعويضًا للركاب الذين لم يجدوا لهم مقاعد على متن الطائرة إذا كانت الشركة قد باعت ٢٤٦ بطاقة.

٥ **التقرير**: ضع تقريرًا مفصّلًا حول المشروع واعرض استخدام خصائص الاحتمال والتوقع في تنفيذه.

دروس الوحدة

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- استخدمت مبدأ العد والتباديل والتوافيق لعد الطرق الممكنة لإجراء عملية ما.
- تعرفت التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- عيّنت احتمالات بعض الأحداث والأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرف المتغيرات العشوائية المتقطعة والمتصلة.
- إيجاد دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي لمتغيّر عشوائي متقطع.
- تعرف دالة كثافة الاحتمال لمتغير عشوائي متصل.

المصطلحات الأساسية

المتغيّر العشوائي المتقطع - التوزيع الاحتمالي - توزيع ذات الحدين - تجربة برنولي - توقع التوزيع الاحتمالي - دالة التوزيع الاحتمالي - دالة التوزيع التراكمي - التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متصل - دالة كثافة الاحتمال - التوزيع الاحتمالي المنتظم - التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

أضف إلى معلوماتك

عمل كل من مؤسسي حساب الاحتمالات (كاردانو **Cardano**، باسكال **Pascal**، فيرما **Fermat**، برنولي **Bernoulli**) على تطوير هذا الحساب وذلك من خلال تجارب نواتجها قابلة للعد.

وبعد ذلك تركز الاهتمام على متغيرات عشوائية يمكن أن تأخذ عددًا لا نهائيًّا من القيم أو كل القيم على فترة من مجموعة الأعداد الحقيقية ح.

المتغيرات العشوائية والتوزيعات الاحتمالية

Discrete Random Variables and Probability Distributions

سوف تتعلم

- المتغير العشوائي المتقطع والتوزيع الاحتمالي.
- توزيع ذات الحدين وتجربة برنولي.
- توقع التوزيع الاحتمالي.
- دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي.
- تباين التوزيع الاحتمالي.
- المتغيّر العشوائي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المتصل.
- التوزيع الاحتمالي المنتظم.
- التوزيع الاحتمالي الطبيعي.

دعنا نفكر ونتناقش

عند إلقاء حجري نرد منتظمين وملاحظة الوجه العلوي.

الحجر الأول مرقم كما يلي: وجهان مرقمان ٠، وجهان مرقمان ١، وجهان مرقمان ٢.

الحجر الثاني مرقم كما يلي: ثلاثة أوجه مرقمة ٠، ثلاثة أوجه مرقمة ١.

نهتم بمجموع العددين الظاهرين على الوجه العلوي وليكن م هذا المجموع.

١ بيّن أن النتائج الممكنة هي: ٠، ١، ٢، ٣

٢ أ أوجد احتمال كل من النتائج التالية:

ل(م = ٠)

ل(م = ١)

ل(م = ٢)

ب استنتج احتمال ل(م = ٣)

٣ أ إذا كنا نهتم بناتج ضرب العددين الظاهرين على الوجه العلوي، فما النتائج الممكنة؟

ب أوجد احتمال كل من النتائج الممكنة.

مقدّمة Introduction

في ما سبق درسنا بعض مفاهيم التجارب العشوائية والاحتمال. ونحن نعلم أن فضاء العيّنة هو مجموعة نواتج التجربة العشوائية والتي غالبًا ما تكون صفات أو مسميات يصعب التعامل معها رياضيًّا.

لذا يقوم الباحث بإقران هذه النواتج الوصفية للتجربة العشوائية بقيم عددية حقيقية تسمى **بالمتغير العشوائي** والذي تتغير قيمته بتغير نتيجة التجربة العشوائية.

فعلى سبيل المثال عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين فإن فضاء العينة يكون كالتالي:

ف = {(ص،ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}.

فمثلًا إذا اقتصرت دراستنا على **عدد الصور** التي ظهرت في كل عنصر من عناصر فضاء العينة ف والتي هي كالتالي: ٢، ١، ١، ٠ على الترتيب نكون قد أقرنّا كل عنصر من عناصر فضاء العينة بعدد حقيقي كما هو موضّح في الجدول التالي:

عناصر فضاء العينة ف	عدد الصور في كل عنصر
(ص، ص)	٢
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٠

وسوف نرمز للمتغير العشوائي بالرمز سـ وعليه فإن مدى سـ = {٢، ١، ٠}.

تعريف: المتغير العشوائي

هو دالة مجالها فضاء العينة ف ومجالها المقابل هو ح ومداها مجموعة جزئية من ح حيث
سـ : ف ⟵ ح
(سـ هو المتغير العشوائي، ف فضاء العينة، ح مجموعة الأعداد الحقيقية).

ففي المثال السابق نلاحظ ما يلي:

١ مجال المتغير العشوائي سـ هو ف = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

٢ المجال المقابل للمتغير العشوائي هو ح.

٣ المدى للمتغير العشوائي سـ هو {٢، ١، ٠} ويرمز له بالرمز سـ (ف)

يوجد عدة أنواع من المتغيرات العشوائية، سوف تدرس نوعين فقط منها وهما:

١ المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة).

٢ المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة).

وسوف نستخدم سـ ، صـ، ... للرمز للمتغيرات العشوائية وكذلك سنستخدم س، ص... لقيم هذه المتغيرات.

(٤ـ١ـأ) المتغيرات العشوائية المتقطعة (المنفصلة)

Discrete Random Variables

تعريف: المتغير العشوائي المتقطع

يكون المتغير العشوائي سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) سـ (ف): هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.

مثال (١)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، ليكن المتغير العشوائي سـ يعبر عن عدد الكتابات.

أوجد ما يلي:

أ فضاء العينة ف.

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ نوع المتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

ب

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي سـ
(ص، ص)	٠
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٢

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٠، ١، ٢}

جـ نوع المتغير العشوائي سـ: متقطع

حاول أن تحل

١ من تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية وليكن المتغير العشوائي سـ يعبّر عن عدد الصور. أوجد ما يلي:

أ فضاء العينة.

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ نوع المتغير العشوائي سـ.

مثال (٢)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا.

أ المتغير العشوائي سـ الذي يمثل عدد الصور.

ب المتغير العشوائي صـ الذي يمثل مربع عدد الصور.

جـ المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الصور مطروحًا منه عدد الكتابات.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي سـ
(ص، ص)	٢
(ص، ك)	١
(ك، ص)	١
(ك، ك)	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٢، ١، ٠}

نوع المتغير العشوائي سـ: متقطع

ب

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي صـ
(ص، ص)	$(٢)^{٢} = ٤$
(ص، ك)	$(١)^{٢} = ١$
(ك، ص)	$(١)^{٢} = ١$
(ك، ك)	$(٠)^{٢} = ٠$

∴ مدى المتغير العشوائي صـ = {٤، ١، ٠}

نوع المتغير العشوائي صـ: متقطع

ج

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي ع
(ص، ص)	٢ − ٠ = ٢
(ص، ك)	١ − ١ = ٠
(ك، ص)	١ − ١ = ٠
(ك، ك)	٠ − ٢ = −٢

∴ مدى المتغير العشوائي ع = {٢، ٠، −٢}

نوع المتغير العشوائي ع: متقطع

حاول أن تحل

٢ في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدّد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

أ المتغير العشوائي س الذي يمثل عدد الكتابات.

ب المتغير العشوائي ص الذي يمثل مكعب عدد الكتابات.

ج المتغير العشوائي ع الذي يمثل عدد الكتابات مطروحًا منه ٢.

دالة التوزيع الاحتمالي

Probability Distribution Function

تعلمنا سابقًا أن المتغير العشوائي المتقطع هو دالة مداها مجموعة جزئية من ح قابلة للعد.

ونبحث الآن في احتمال وقوع كل عنصر من عناصر فضاء العينة المناظر لكل عنصر من عناصر المدى.

تعريف: دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي س

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه {س$_{١}$، س$_{٢}$، س$_{٣}$، ...}،

فإن دالة التوزيع الاحتمالي د تعرّف كالتالي:

د(س$_{ر}$) = احتمال (س = س$_{ر}$)

أي أن د (س$_{ر}$) = ل(س = س$_{ر}$)   لكل ر = ١، ٢، ٣، ...

ويمكن تمثيلها بالجدول التالي:

س$_{ر}$	س$_{١}$	س$_{٢}$	....
د(س$_{ر}$)	د(س$_{١}$)	د(س$_{٢}$)	....

أي أن مجموعة النقاط في المستوى الإحداثي التي تمثل الأزواج المرتبة (س ر ، د (س ر)) تسمى دالة التوزيع الاحتمالي.

مثال (٣)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة مرة واحدة ، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبّر عن عدد الصور، فأوجد:

أ فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ، د(س ر) = ل(سـ = س ر).

د دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {ص ، ك}

عدد عناصر فضاء العينة: ن(ف) = ٢

ب

عناصر فضاء العينة ف	عناصر مدى المتغير العشوائي سـ
ص	١
ك	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٠، ١}

جـ ∵ د(س ر) = ل(سـ = س ر)

∴ د(٠) = ل(سـ = ٠) = $\frac{١}{٢}$

∴ د(١) = ل(سـ = ١) = $\frac{١}{٢}$

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ هي:

س	٠	١
د (س)	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٢}$

لاحظ أن ل(سـ = ٠) + ل(سـ = ١) = $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

حاول أن تحل

٣ عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين وبفرض أن المتغير العشوائي سـ يعبر عن «عدد الكتابات». أوجد دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

تذكر:

ل(أ) = $\frac{\text{عدد عناصر أ}}{\text{عدد عناصر (ف)}}$

مثال (٤)

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبّر عن «عدد الصور»، فأوجد ما يلي:

أ فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص، ص)، (ص، ص، ك)، (ص، ك، ص)، (ك، ص، ص)، (ص، ك، ك)، (ك، ص، ك)، (ك، ك، ص)، (ك، ك، ك)}.

ب

عناصر فضاء العنية ف	عدد الصور في كل عنصر
(ص، ص، ص)	٣
(ص، ص، ك)	٢
(ص، ك ، ص)	٢
(ك، ص، ص)	٢
(ص، ك ، ك)	١
(ك، ص، ك)	١
(ك ، ك ، ص)	١
(ك ، ك ، ك)	٠

∴ مدى المتغير العشوائي سـ = {٣، ٢، ١، ٠}

جـ ل(سـ = ٣) = $\frac{١}{٨}$

ل(سـ = ٢) = $\frac{٣}{٨}$

ل(سـ = ١) = $\frac{٣}{٨}$

ل(سـ = ٠) = $\frac{١}{٨}$

د دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ

س	٣	٢	١	٠
د(س)	$\frac{١}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{٣}{٨}$	$\frac{١}{٨}$

حاول أن تحل

٤ عند إلقاء قطعة نقود متماثلة ثلاث مرات متتالية ، إذا كان المتغير العشوائي سـ يعبر عن «عدد الكتابات».

فأوجد ما يلي:

أ فضاء العينة ف.

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

ملاحظة:

دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ تحقق الشرطين:

١ ٠ ≤ د(س) ≤ ١

٢ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح ،

أي أن د(س$_{١}$) + د(س$_{٢}$) + د(س$_{٣}$) + ... = ١

مثال (٥)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي:

س	−٢	١	٢	٣
د(س)	٠,٣	٠,١	ك	٠,٢

فأوجد قيمة ك.

الحل:

∵ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح

∴ د(−٢) + د(١) + د(٢) + د(٣) = ١

٠,٣ + ٠,١ + ك + ٠,٢ = ١

∴ ك = ١ − ٠,٦

ك = ٠,٤

حاول أن تحل

٥ إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س هي:

س	٤	٣	٢	١	٠
د(س)	ك	٠,٢	٠,١	٠,١٥	٠,٣٥

فأوجد قيمة ك.

مثال (٦)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: {−٢، −١، ٠، ١}

وكان د(−٢) = د(−١) = ٠,٣ ، د(١) = ٠,٢

أوجد د(٠)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

∵ د(−٢) + د(−١) + د(٠) + د(١) = ١

٠,٣ + ٠,٣ + د(٠) + ٠,٢ = ١

∴ د(٠) = ٠,٢

س	−٢	−١	٠	١
د(س)	٠,٣	٠,٣	٠,٢	٠,٢

حاول أن تحل

٦ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: {٠، ١، ٢، ٣}

وكان د(٠) = ٠,١ ، د(١) = ٠,٦ ، د(٢) = ٠,١٥

فأوجد د(٣)، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

تذكر:

- $^{ن}ل_{ر}$ = ن(ن−١)(ن−٢)....(ن − ر + ١)
- $^{ن}ل_{ر} = \dfrac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)!}}$
- $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{^{ن}ل_{ر}}{\text{ر!}}$
- $^{ن}ق_{ر} = \dfrac{\text{ن!}}{\text{(ن − ر)! ر!}}$

حيث ن، ر ∈ $ص^{+}$

ن ≥ ر

مثال (٧)

صندوق يحتوي على ١٠ كرات متماثلة منها ٧ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء. سحبت أربع كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي سـ يمثل عدد الكرات الحمراء.

فأوجد ما يلي:

أ عدد عناصر فضاء العينة (ن (ف)).

ب مدى المتغير العشوائي سـ.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي سـ.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

أ عدد عناصر فضاء العينة (ف) = $^{١٠}ق_{٤} = \dfrac{^{١٠}ل_{٤}}{\text{٤!}}$

$= \dfrac{١٠ \times ٩ \times ٨ \times ٧}{٤ \times ٣ \times ٢ \times ١}$

$= ٢١٠$

ب عدد الكرات الحمراء التي يمكن سحبها كالتالي:

لدينا ٤ حالات:

- أن تكون كل الكرات المسحوبة بيضاء.

∴ عدد الكرات الحمراء المسحوبة = صفر ⟵ س = ٠

- أن تكون الكرات المسحوبة منها ٣ كرات بيضاء وواحدة حمراء ⟵ س = ١
- أن تكون الكرات المسحوبة منها ٢ كرة بيضاء و٢ كرة حمراء ⟵ س = ٢
- أن تكون الكرات المسحوبة منها ١ كرة بيضاء و٣ كرات حمراء ⟵ س = ٣

∴ مدى المتغير العشوائي س = {٠، ١، ٢، ٣}

جـ $ل(س = ٠) = \frac{{}^{٧}ق_{٤} \times {}^{٣}ق_{٠}}{{}^{١٠}ق_{٤}} = \frac{٣٥}{٢١٠}$

$ل(س = ١) = \frac{{}^{٧}ق_{٣} \times {}^{٣}ق_{١}}{{}^{١٠}ق_{٤}} = \frac{١٠٥}{٢١٠}$

$ل(س = ٢) = \frac{{}^{٧}ق_{٢} \times {}^{٣}ق_{٢}}{{}^{١٠}ق_{٤}} = \frac{٦٣}{٢١٠}$

$ل(س = ٣) = \frac{{}^{٧}ق_{١} \times {}^{٣}ق_{٣}}{{}^{١٠}ق_{٤}} = \frac{٧}{٢١٠}$

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س:

س	٠	١	٢	٣	المجموع
د (س)	$\frac{٣٥}{٢١٠}$	$\frac{١٠٥}{٢١٠}$	$\frac{٦٣}{٢١٠}$	$\frac{٧}{٢١٠}$	١

حاول أن تحل

٧ صندوق يحتوي على ١٠ كرات متماثلة منها ٧ كرات بيضاء و٣ كرات حمراء. سحبت عشوائيًّا ٣ كرات معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي س يمثل عدد الكرات البيضاء، فأوجد ما يلي:

أ عدد عناصر فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي س.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س.

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي س.

التوقع (الوسط) والتباين للمتغيرات العشوائية المتقطعة

Expectation and Variance for Discrete Random Variables

نعلم أن التوقع (الوسط) هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع، والتباين هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة، وبالتالي فإن التوقع والتباين يلخصان أهم صفات المتغيرات العشوائية وسوف ندرس كلًّا من التوقع والتباين لكل من المتغيرات العشوائية المتقطعة.

أولًا: التوقع (الوسط) للمتغير العشوائي المتقطع

Expectation for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د ،

مدى سـ = {س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، س$_{٣}$ ، ...}

فإن التوقع للمتغير العشوائي سـ (يرمز له برمز μ) يكون:

التوقع (μ) = $\sum$ س$_{ر}$ د(س$_{ر}$)

أي أن: μ = س$_{١}$ د(س$_{١}$) + س$_{٢}$ د(س$_{٢}$) + س$_{٣}$ د(س$_{٣}$) + ...

مثال (٨)

إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ هي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	$\frac{٣}{٧}$	$\frac{٢}{٧}$	$\frac{٦}{٣٥}$	$\frac{٣}{٣٥}$	$\frac{١}{٣٥}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

التوقع μ = $\sum$ س$_{ر}$ د(س$_{ر}$)

$$= ١ \times \frac{٣}{٧} + ٢ \times \frac{٢}{٧} + ٣ \times \frac{٦}{٣٥} + ٤ \times \frac{٣}{٣٥} + ٥ \times \frac{١}{٣٥}$$

$$= ٢$$

حاول أن تحل

٨ إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ هي:

س	٠	١	٢
د(س)	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{٤}{٩}$	$\frac{١}{٩}$

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي سـ.

مثال (٩)

عند إلقاء قطعة نقود متماثلة مرتين متتاليتين، إذا كان المتغير العشوائي س يعبر عن عدد الصور، فأوجد:

أ فضاء العينة (ف).

ب مدى المتغير العشوائي س.

جـ احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي المتقطع س.

د دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س.

هـ التوقع μ للمتغير العشوائي س.

الحل:

أ فضاء العينة (ف) = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}.

ب مدى المتغير العشوائي س = {٢، ١، ٠}

جـ د(٢) = $\frac{١}{٤}$ ، د(١) = $\frac{١}{٢}$ ، د(٠) = $\frac{١}{٤}$

د دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س.

س	٢	١	٠
د (س)	$\frac{١}{٤}$	$\frac{١}{٢}$	$\frac{١}{٤}$

هـ التوقع μ = $\sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

= ٢ × $\frac{١}{٤}$ + ١ × $\frac{١}{٢}$ + ٠ × $\frac{١}{٤}$

= $\frac{١}{٢}$ + $\frac{١}{٢}$ = ١

حاول أن تحل

٩ إذا كان فضاء العينة لأربع أسر لديها طفلان كالتالي:

ف = {(ولد، ولد)، (ولد، بنت)، (بنت، ولد)، (بنت، بنت)}

فأوجد:

أ مدى المتغير العشوائي المتقطع س الذي يعبر عن عدد الأولاد.

ب احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي س.

جـ دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س.

د التوقع μ للمتغير العشوائي س.

ملاحظة:

لاحظ أن:

ل(س = ٢)

= د(٢)

ثانيًا: التباين للمتغير العشوائيّ المتقطع
Variance for Discrete Random Variable

تعريف:

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين $(\sigma^2) = \sum$ س$_ر^2$ د(س$_ر$) $- \mu^2$ حيث μ هو التوقع.

الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\text{التباين}}$

مثال (١٠)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س.

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,١	٠,٦	٠,٢	٠,١

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين (σ^2).

جـ الانحراف المعياري (σ).

الحل:

أ التوقع $(\mu) = \sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

$= ١ \times ٠,١ + ٢ \times ٠,٦ + ٣ \times ٠,٢ + ٤ \times ٠,١$

$= ٠,١ + ١,٢ + ٠,٦ + ٠,٤$

$= ٢,٣$

ب التباين $(\sigma^2) = \sum$ س$_ر^2$ د(س$_ر$) $- \mu^2$

$= (١)^2 \times ٠,١ + (٢)^2 \times ٠,٦ + (٣)^2 \times ٠,٢ + (٤)^2 \times ٠,١ - (٢,٣)^2$

$= ٠,٦١$

جـ الانحراف المعياري $(\sigma) = \sqrt{\text{التباين}}$

$= \sqrt{٠,٦١}$

$\approx ٠,٧٨١٠$

حاول أن تحل

١٠ الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع س.

س	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,١	٠,٣	٠,٥	٠,١

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين (σ^2).

جـ الانحراف المعياري (σ).

مثال (١١)

يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين (σ^2).

جـ الانحراف المعياري (σ).

الحل:

أ التوقع (μ) = $\sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

= ١ × ٠,٤٣ + ٢ × ٠,٢٩ + ٣ × ٠,١٧ + ٤ × ٠,٠٩ + ٥ × ٠,٠٢

= ١,٩٨

ب التباين = $\sum$ س$_ر^2$ د(س$_ر$) − μ^2

= ١ × ٠,٤٣ + ٤ × ٠,٢٩ + ٩ × ٠,١٧ + ١٦ × ٠,٠٩ + ٢٥ × ٠,٠٢

− (١,٩٨)^2 = ٥,٠٦ − ٣,٩٢

= ١,١٣٩٦

ج الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}}$ = $\sqrt{١,١٣٩٦}$

$\sigma \approx ١,٠٦٧٥$

حاول أن تحل

١١ يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٣	٠,١	٠,٣

أوجد:

أ التوقع (μ).

ب التباين ($\sigma^{٢}$).

ج الانحراف المعياري (σ).

دالة التوزيع التراكمي لمتغير عشوائي متقطع

Cumulative Distribution Function for a Discrete RandomVariable

درسنا بالتفصيل دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

وبيّنا أن دالة التوزيع الاحتمالي د تحقق الشرطين:

١ ٠ ≤ د(س) ≤ ١

٢ $\sum$ د(س$_{ر}$) = ١

ونتعرض الآن لدالة أخرى للمتغير العشوائي المتقطع سـ وهي دالة التوزيع التراكمي.

تعريف:

دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة أ هي احتمال وقوع المتغير العشوائي سـ بحيث يكون سـ أصغر من أو يساوي أ

أي أن: ت(أ) = ل(سـ ≤ أ)

لاحظ أن مجال دالة التوزيع التراكمي ت هو ح وأن المجال المقابل = المدى [٠، ١].

تذكر:
نرمز لدالة التوزيع الاحتمالي بالرمز د. ونرمز لدالة التوزيع التراكمي بالرمز ت.

مثال (١٢)

الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	٣	٤	٥
د(س)	٠,٥	٠,٣	٠,٢

أوجد: ت(٢) ، ت(٣) ، ت(٤) ، ت(٥ ,٤) ، ت(٥) ، ت(٧)

حيث ت دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

ت(٢) = ل(سـ ≤ ٢)

= ل(سـ < ٢) + ل(سـ = ٢)

= صفر + صفر

= صفر

ت(٣) = ل(سـ ≤ ٣) = ل(سـ < ٣) + ل(سـ = ٣)

= ل(سـ < ٣) + د(٣)

= ٠ + ٠,٥

= ٠,٥

ت(٤) = ل(سـ ≤ ٤)

= ل(سـ < ٤) + ل(سـ = ٤)

= د(٣) + د(٤)

= ٠,٥ + ٠,٣

= ٠,٨

ت(٤,٥) = ل(سـ ≤ ٤,٥)

= د(٤,٥) + د(٤) + د(٣)

= ٠ + ٠,٣ + ٠,٥

= ٠,٨

ت(٥) = ل(سـ ≤ ٥)

= د(٥) + د(٤) + د(٣)

= ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٥

= ١

ت(٧) = ل(سـ ≤ ٧)

= د(٧) + د(٥) + د(٤) + د(٣)

= ٠ + ٠,٢ + ٠,٣ + ٠,٥

= ١

حاول أن تحل

(١٢) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٤٣	٠,٢٩	٠,١٧	٠,٠٩	٠,٠٢

أوجد: ت(١)، ت(٣,٥)، ت(٤)، ت(٥)

بعض خواص دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي سـ:

(١) ل(a < سـ ≤ ب) = ت(ب) − ت(a)

(٢) ل(سـ > a) = ١ − ل(سـ ≤ a)

= ١ − ت(a)

مثال (١٣)

الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع سـ.

س	١	٢	٣	٥
ت(س)	٠,١٥	٠,٢	٠,٦	١

أوجد:

(أ) ل(١ < سـ ≤ ٣)

(ب) ل(٢ < سـ ≤ ٥)

(جـ) ل(سـ > ٢)

الحل:

(أ) ل(١ < سـ ≤ ٣) = ت(٣) − ت(١)

= ٠,٦ − ٠,١٥

= ٠,٤٥

ب ل(٢ < س ≥ ٥) = ت(٥) − ت(٢)

= ١ − ٠,٢

= ٠,٨

جـ ل(س > ٢) = ١ − ل(س ≥ ٢)

= ١ − ت(٢)

= ١ − ٠,٢

= ٠,٨

حاول أن تحل

١٣ يبيّن الجدول التالي بعض قيم دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع س.

س	١	٢	٣	٤
ت(س)	٠,٢٥	٠,٤٠	٠,٦٥	١

أوجد:

أ ل(٤ < س ≥ ٥)

ب ل(س > ٣)

بيان دالة التوزيع الاحتمالي ودالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي المتقطع س

Graph of Probability Distribution Function and Cumulative Distribution Function for a Discrete Random Variable x

أوّلًا: بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع س.

نعلم أن دالة التوزيع الاحتمالي هي مجموعة نقاط المستوى التي تمثل الأزواج المرتبة (س ر، ص ر)، وبالتالي فإن بيان دالة التوزيع الاحتمالي هو عبارة عن نقاط يمكن تمثيلها في المستوى الإحداثي.

مثال (١٤)

لتكن د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ كما في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤
د(س)	٠,٢	٠,١	٠,٤	٠,٣

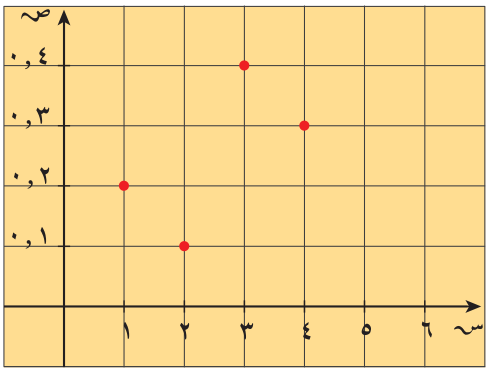
ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

الحل:

رسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي:

نمثّل قيم س على المحور السيني

وقيم الدالة د(س) على المحور الصادي.



بيان دالة التوزيع الاحتمالي

حاول أن تحل

١٤ لتكن د هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ كما في الجدول التالي:

س	١	٢	٣	٤	٥
د(س)	٠,٥	٠,١	٠,٢	٠,١٥	٠,٠٥

ارسم بيان دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي سـ.

توزيع ذات الحدين Binomial Distribution

نعلم من خلال دراستنا أن بعض التجارب العشوائية يكون لها ناتجان أو عدة نواتج يمكن اختزالها إلى ناتجين فقط أي أن فضاء العينة يصبح محتويًا على عنصرين فمثلًا:

- عند إلقاء قطعة نقود مرة واحدة يكون الناتج إما صورة أو كتابة.
- عند تأدية الطالب اختبارًا في مادة ما تكون النتيجة إما نجاح أو رسوب.
- عند دخول شخص اختبار الحصول على رخصة القيادة تكون النتيجة نجاح أو رسوب.

وهكذا فإننا قيد دراسة التجارب التي يكون لها ناتجان فقط وهي ما يسمى **بتجربة ذات الحدين**.

تعريف: تجربة ذات الحدين

تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

١ تتكوّن التجربة من عدد ن من المحاولات المستقلة والمتماثلة.

(المحاولات المستقلة تعني أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

٢ كل محاولة يكون لها ناتجان فقط (نجاح أو فشل).

٣ احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز ل. وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي Bernoulli.

فمثلًا إذا أجريت تجربة برنولي عدد ن من المرات وكان احتمال النجاح في المحاولة الواحدة ل وكان سـ المتغير العشوائي الذي يمثل عدد مرات النجاح في كل المحاولات فإن احتمال النجاح في س من المحاولات يعطى بالعلاقة التالية:

$$ل(سـ = س) = د(س) = {}^{ن}ق_{س}\ ل^{س}\ (١ - ل)^{ن - س} \quad ، \quad ن \in صـ^{+}$$ حيث:

- ن عدد المحاولات.
- مجموعة القيم الممكنة للمتغير العشوائي سـ= {٠، ١، ٢، ... ، ن}
- س عدد مرات النجاح من ن في المحاولات
- ل احتمال النجاح.
- (١ - ل) احتمال الفشل

يسمى توزيع المتغير العشوائي سـ **بتوزيع ذات الحدين** للمعلمتين ل ، ن.

مثال (١٥)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: ن = ٧ ، ل = ٠,١

فأوجد:

أ ل(سـ = صفر)

ب ل(١ < سـ ≤ ٣)

الحل:

أ ∵ ل(سـ = $س_ر$) = د(س) = $^{ن}ق_{س}$ $ل^{س}$ $(١ - ل)^{ن - س}$

∵ ن = ٧ ، ل = ٠,١

∴ ل(سـ = صفر)

= د(٠) = $^{٧}ق_{٠}$ $(٠,١)^{٠}$ $(٠,٩)^{٧}$

≈ ٠,٤٧٨٣

ل

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ن	س	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
٢	٠	٠,٩٠٢	٠,٨١٠	٠,٦٤٠	٠,٤٩٠	٠,٣٦٠	٠,٢٥٠	٠,١٦٠	٠,٠٩٠	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢
	١	٠,٠٩٥	٠,١٨٠	٠,٣٢٠	٠,٤٢٠	٠,٤٨٠	٠,٥٠٠	٠,٤٨٠	٠,٤٢٠	٠,٣٢٠	٠,١٨٠	٠,٠٩٥
	٢	٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,٠٩٠	٠,١٦٠	٠,٢٥٠	٠,٣٦٠	٠,٠٤٩٠	٠,٠٦٤٠	٠,٠٨١٠	٠,٠٩٠٢
٧	٠	٠,٦٩٨	٠,٤٧٨	٠,٢١٠	٠,٠٨٢	٠,٠٢٨	٠,٠٠٨	٠,٠٠٢				
	١	٠,٢٥٧	٠,٣٧٢	٠,٣٦٧	٠,٢٤٧	٠,١٣١	٠,٠٥٥	٠,٠١٧	٠,٠٠٤			
	٢	٠,٠٤١	٠,١٢٤	٠,٢٧٥	٠,٣١٨	٠,٢٦١	٠,١٦٤	٠,٠٧٧	٠,٠٢٥	٠,٠٠٤		
	٣	٠,٠٠٤	٠,٠٢٣	٠,١١٥	٠,٢٢٧	٠,٢٩٠	٠,٢٧٣	٠,١٩٤	٠,٠٩٧	٠,٠٢٩	٠,٠٠٣	
	٤		٠,٠٠٣	٠,٠٢٩	٠,٠٩٧	٠,١٩٤	٠,٢٧٣	٠,٢٩٠	٠,٢٢٧	٠,١١٥	٠,٠٢٣	٠,٠٠٤
	٥			٠,٠٠٤	٠,٠٢٥	٠,٠٧٧	٠,١٦٤	٠,٢٦١	٠,٣١٨	٠,٢٧٥	٠,١٢٤	٠,٠٤١
	٦				٠,٠٠٤	٠,٠١٧	٠,٠٥٥	٠,١٣١	٠,٢٤٧	٠,٣٦٧	٠,٣٧٢	٠,٢٥٧
	٧					٠,٠٠٢	٠,٠٠٨	٠,٠٢٨	٠,٠٨٢	٠,٢١٠	٠,٤٧٨	٠,٦٩٨

حل آخر:

ل(سـ = ٠) = د(٠)

∵ ن = ٧ ، ل = ٠,١ ، سـ = ٠

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين عن قيمة د(٠) (صفحة ٥٥)

فنجد أن: د(٠) = ٠,٤٧٨

ب ل(١ < سـ ≤ ٣) = ل(سـ = ٢) + ل(سـ = ٣)

= د(٢) + د(٣)

د(٢) = $^{٧}ق_{٢}$ $(٠,١)^{٢}$ $(٠,٩)^{٥}$ ≈ ٠,١٢٤٠

د(٣) = $^{٧}ق_{٣}$ $(٠,١)^{٣}$ $(٠,٩)^{٤}$ ≈ ٠,٠٢٣٠

ل(١ < سـ ≤ ٣) = ٠,١٢٤٠ + ٠,٠٢٣٠

= ٠,١٤٧٠

حل آخر:

ل(١ < سـ ≤ ٣) = ل(سـ = ٢) + ل(سـ = ٣)

= د(٢) + د(٣)

∵ ن = ٧ ، ل = ٠,١

نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين

عندما س = ٢ ⟵ د(٢) = ٠,١٢٤٠

عندما س = ٣ ⟵ د(٣) = ٠,٠٢٣٠

∴ ل(سـ ≤ ٣) = د(٢) + د(٣)

$= ٠,١٢٤٠ + ٠,٠٢٣٠$

$= ٠,١٤٧٠$

حاول أن تحل

١٥ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين معلمتيه هما ن = ٨ ، ل = ٠,٢ . فأوجد:

أ ل(س = ٢)

ب ل(٢ ≤ س < ٤)

مثال (١٦)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٨ مرات متتالية، احسب احتمال ظهور صورة ٥ مرات.

الحل:

∵ ن = ٨ ، ل = $\frac{١}{٢}$

∵ ل(س = س) = د(س) = ^{ن}ق$_{س}$ ل^{س} (١ − ل)$^{ن-س}$

∴ ل(س = ٥) = د(٥)

$=$ ^{ن}ق$_{٥}$ ل^{٥} (١ − ل)$^{٨-٥}$

$=$ ^{٨}ق$_{٥}$ $\left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

$= \frac{٨ \times ٧ \times ٦}{٣ \times ٢ \times ١} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٥} \times \left(\frac{١}{٢}\right)^{٣}$

$\approx ٠,٢١٨٨$

حل آخر:

ل(س = ٥) = د(٥)

∵ ن = ٨ ، ل = $\frac{١}{٢}$ ، س = ٥

∴ نبحث في جدول الاحتمالات في توزيع ذات الحدين عن قيمة د(٥)

فنجد أن د(٥) = ٠,٢١٩

حاول أن تحل

١٦ في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ١٠ مرات متتالية، احسب احتمال ظهور كتابة ٥ مرات.

مثال (١٧)

عند إلقاء حجر نرد منتظم خمس مرات متتالية، أوجد:

أ احتمال ظهور العدد ٤ مرتين.

ب احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأقل.

جـ احتمال ظهور العدد ٤ مرة واحدة على الأكثر.

الحل:

∵ ن = ٥ ، ل = احتمال ظهور العدد ٤ من الرمية الواحدة = $\frac{١}{٦}$ ،

س = عدد مرات ظهور العدد ٤.

أ ل(س = س) = د(س) = $^{ن}ق_{س}$ ل^{س} (١ − ل)$^{ن − س}$

ل(س = ٢) = د(٢) = $^{٥}ق_{٢} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٢} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٣}$

$= \frac{٥ \times ٤}{٢ \times ١} \times \frac{(٥)^{٣}}{(٦)^{٥}}$

$\approx ٠,١٦٠٨$

ب ل(س ≥ ١) = ١ − ل(س < ١) = ١ − د(٠)

د(٠) = $^{٥}ق_{٠} \left(\frac{١}{٦}\right)^{٠} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٥}$

$= ١ \times ١ \times \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٥}$

$\approx ٠,٤٠١٩$

ل(س ≥ ١) = ١ − ٠,٤٠١٩

= ٠,٥٩٨١

جـ ل(س ≤ ١) = د(٠) + د(١)

∵ د(٠) = ٠,٤٠١٩ و د(١) = $^{٥}ق_{١} \left(\frac{١}{٦}\right)^{١} \left(\frac{٥}{٦}\right)^{٤}$

$= ٥ \times \frac{١}{٦} \times \frac{(٥)^{٤}}{(٦)^{٤}}$

$\approx ٠,٤٠١٩$

ل(س ≤ ١) ≈ ٠,٨٠٣٨

حاول أن تحل

١٧ عند إلقاء حجر نرد منتظم خمس مرات متتالية، أوجد:

أ احتمال ظهور العدد ٣ مرتين.

ب احتمال ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأقل.

جـ احتمال ظهور العدد ٣ مرة واحدة على الأكثر.

التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين

Expectation and Variance for Binomial Distribution

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

أولًا: التوقع μ = ن ل

ثانيًا: التباين σ^2 = ن ل(١ – ل)

ثالثًا: الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\text{ن ل (١ – ل)}}$

مثال (١٨)

ينتج مصنع سيارات ٢٠٠ سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠,٠١ فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

الحل:

∵ ن = ٢٠٠ ، س = عدد السيارات المعيبة في اليوم الواحد ،

ل = نسبة إنتاج السيارات المعيبة في اليوم الواحد = ٠,٠١

١ – ل = ١ – ٠,٠١ = ٠,٩٩

∴ التوقع μ = ن ل = ٢٠٠(٠,٠١) = ٢

التباين σ^2 = ن ل (١ – ل) = ٢٠٠ (٠,٠١)(٠,٩٩) = ١,٩٨

الانحراف المعياري σ = $\sqrt{١,٩٨}$

≈ ١,٤٠٧١

حاول أن تحل

١٨ ينتج مصنع سيارات ٣٥٠ سيارة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج السيارات المعيبة ٠,٠٢ فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد السيارات المعيبة في يوم واحد.

مثال (١٩)

في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٥ مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي س هو ظهور صورة.

الحل:

∵ ن = ٥ ، س = ظهور الصورة

ل هو احتمال ظهور صورة

$ل = \frac{١}{٢}$ ، $١ - ل = \frac{١}{٢}$

التوقع μ = ن ل

$= ٥ \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{٥}{٢} = ٢,٥$

التباين $\sigma^{٢}$ = ن ل(١ − ل)

$= ٥ \times \frac{١}{٢} \times \frac{١}{٢}$

$= \frac{٥}{٤}$

$= ١,٢٥$

الانحراف المعياري = $\sqrt{ن\ ل\ (١ - ل)} = \sqrt{١,٢٥}$

$\approx ١,١١٨٠$

حاول أن تحل

(١٩) في تجربة إلقاء قطعة نقود متماثلة ٨ مرات. أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري إذا كان المتغير العشوائي سـ هو ظهور صورة.

مثال (٢٠)

في أحد مصانع السيارات تبين أن ١٪ من السيارات غير صالحة للسير. إذا سحبنا ٨ سيارات، فأوجد التوقع والتباين للسيارات الصالحة للسير.

الحل:

∵ ن = ٨ ، ل = نسبة السيارات الصالحة للسير: ١ − ٠,٠١ = ٠,٩٩

١ − ل = ٠,٠١

∴ التوقع μ = ن ل = ٨(٠,٩٩) = ٧,٩٢

التباين $\sigma^{٢}$ = ن ل(١ − ل) = ٨(٠,٩٩)(٠,٠١)

= ٠,٠٧٩٢

حاول أن تحل

(٢٠) ٧٠٪ من زبائن مطعم ما أفادوا بأن الطعام قد أعجبهم وسيقصدونه مرة أخرى. من بين ١٠٠ زبون، أوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري.

(٤–١–ب) المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)

Continuous Random Variables

مقدّمة Introduction

في كل التجارب العشوائية التي تمت دراستها حتى الآن أخذ المتغيّر العشوائي سـ عددًا محددًا ومنتهيًا من القيم: سـ ∋ {س١ ، س٢ ، ... ، سر}.

ولكن في بعض التجارب العشوائية يأخذ المتغيّر العشوائي سـ كل القيم التي تنتمي إلى فترة محدّدة من مجموعة الأعداد الحقيقية ح مثل:

الزمن المستغرق للحضور من المنزل إلى المدرسة أو كمية السكر في الدم.

في هذه الحالة لم يعد ممكنًا وضع جدول التوزيع الاحتمالي لكل حدث سـ = {سر}، لأن عددها لا نهائي إذ تأخذ سـ قيمها على الفترة المذكورة وأصبح من الضروري اعتماد مقاربة جديدة.

في ما سبق درسنا المتغير العشوائي المتقطع (المنفصل) سـ وبيّنا أن مجموعة القيم الممكنة له هي مجموعة متقطعة قابلة للعد (منتهية أو غير منتهية)

وتكون على صورة مدى سـ = {س١ ، س٢ ، س٣ ، ...}.

والآن لدينا نوعًا آخر من المتغيرات العشوائية وهو **المتغير العشوائي المتصل** (المستمر).

> **تعريف: المتغير العشوائي المتصل**
>
> **هو المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل سـ = {س: أ ≤ س ≤ ب} وهي مجموعة غير قابلة للعد.**

أمثلة عن المتغيرات العشوائية المتصلة:

- وزن مجموعة من الطلاب بالكيلوجرام أعمارهم من (١٥ – ٢٠) سنة هو:
  سـ = {س: ٣٥ < س < ٧٠}
- درجة حرارة جسم الإنسان خلال يوم كامل.
- المسافة المقطوعة لسيارة خلال وحدة الزمن.
- كمية الحليب التي تنتجها البقرة في اليوم باللتر
  سـ = {س: صفر < س < ٤٠}

مثال (٢١)

حدّد ما إذا كانت المتغيّرات التالية هي متغيّرات عشوائية متصلة أو متغيّرات عشوائية متقطعة:

أ عدد الأهداف في مباراة كرة القدم.

ب الحرارة القصوى في منطقة معيّنة.

ج طول الطلاب في الصف الثاني عشر في مدرستك.

د عدد الأخطاء في صفحة كتاب ما.

الحل:

أ متغير عشوائي متقطع.

ب متغير عشوائي متصل.

ج متغير عشوائي متصل.

د متغير عشوائي متقطع.

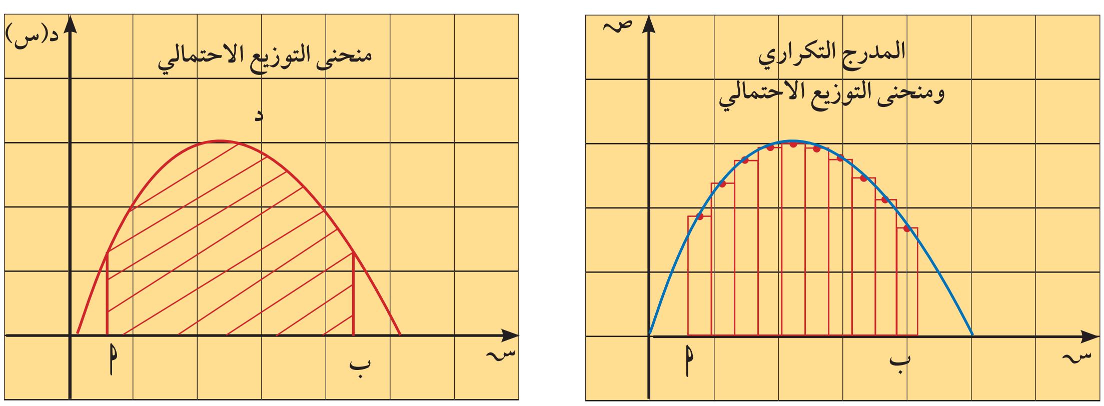
حاول أن تحل

٢١ أعطِ مثالين آخرين عن متغيّرات عشوائية متصلة ومثالين عن متغيرات عشوائية متقطعة.

التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل (المستمر)

Probability Distribution for a Continuous Random Variable

يمكن تمثيل بيانات المتغير العشوائي الكمي المستمر على شكل مدرج تكراري نسبي. فنجد أن شكل هذا المدرج هو أقرب وصف لمنحنى التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتصل. وكلما صغر طول الفئة حصلنا على رسم أدق للمنحنى الخاص بدالة احتمال المتغير المستمر كما في الشكل التالي:



والمساحة تحت منحنى التوزيع الاحتمالي هي عبارة عن مجموع الاحتمالات الكلية للمتغير العشوائي المتصل س، ولذلك فإن هذه المساحة **تساوي الواحد الصحيح**.

نسمي الدالة د(س) **بدالة كثافة الاحتمال** للمتغير العشوائي المتصل (المستمر).

خواص دالة كثافة الاحتمال د(س):

١ د(س) هي دالة متصلة على مجالها.

٢ د(س) ≤ ٠ لكل قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.

٣ قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة د(س) ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.

٤ يمكن إيجاد الاحتمال ل(أ > سـ ≥ ب) بحساب المساحة تحت المنحنى ل بين القيمة أ، ب من الشكل السابق.

٥ تنعدم المساحة المظللة في الشكل السابق إذا كان أ = ب
أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن ل(سـ = أ) = صفر

مثال (٢٢)

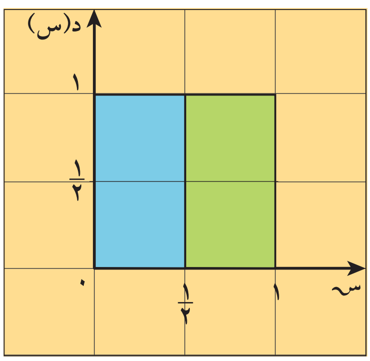
إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

د(س) = { ١ عندما ٠ ≥ س ≥ ١
صفر في ما عدا ذلك

أوجد:

أ ل$\left(\frac{١}{٢} \geq$ سـ $\geq ١\right)$ ب ل$\left(\text{سـ} \geq \frac{١}{٢}\right)$

الحل:



أ ل$\left(\frac{١}{٢} \geq$ سـ $\geq ١\right)$ = مساحة المنطقة المظلّلة بالأخضر

$= \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$

ب ل$\left(\text{سـ} \geq \frac{١}{٢}\right)$ = مساحة المنطقة المظلّلة بالأزرق

$= \frac{١}{٢} \times ١ = \frac{١}{٢}$

حاول أن تحل

٢٢ إذا كان سـ متغيرًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

د(س) = { $\frac{١}{٢}$ عندما ٠ ≥ س ≥ ٢
صفر في ما عدا ذلك

أوجد:

أ ل$\left(\text{سـ} \geq \frac{٣}{٢}\right)$ ب ل$\left(\text{سـ} \leq \frac{٣}{٢}\right)$

مثال (٢٣)

إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٤} & : \text{عندما } ١ \leq س \leq ٥ \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

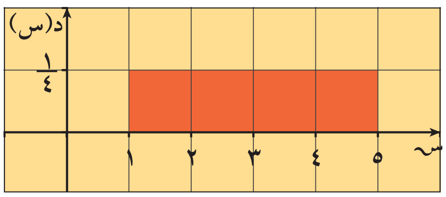
أوجد:

أ ل(١ < س ≤ ٥)　　**ب** ل(س < ٣)

جـ ل(س ≥ ١,٥)　　**د** ل(س = ٢)

الحل:

أ نرسم بيان الدالة د(س)

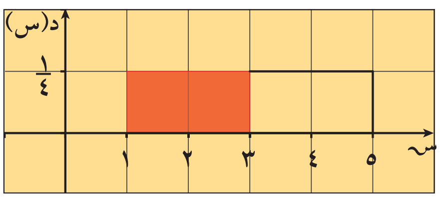


ل(١ < س ≤ ٥) = مساحة المنطقة المظللة

(المنطقة المستطيلة)

$= ٤ \times \frac{١}{٤} = ١$

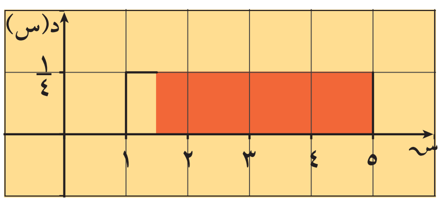
ب ل(س < ٣) = مساحة المنطقة المظللة



$= (٣ - ١) \times \frac{١}{٤}$

$= ٢ \times \frac{١}{٤} = \frac{١}{٢}$

جـ ل(س ≥ ١,٥) = مساحة المنطقة المظللة



$= (٥ - ١,٥) \times \frac{١}{٤}$

$= \frac{٧}{٢} \times \frac{١}{٤} = \frac{٧}{٨}$

د ل(س = ٢) = صفر

حاول أن تحل

٢٣ إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متصلًا، فدالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٦} & : -٣ \leq س \leq ٣ \\ \text{صفر} & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

أوجد:

أ ل(س < ٢)　　**ب** ل(-١ < س < ١)　　**جـ** ل(س = صفر)

مثال (٢٤)

إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٨} س & : ٠ \le س \le ٤ \\ صفر & : في ما عدا ذلك \end{cases}$$

فأوجد:

أ ل$(٠ \le$ سـ $\le ٤)$ ب ل(سـ $\le ٢)$ جـ ل(سـ $> ٢)$

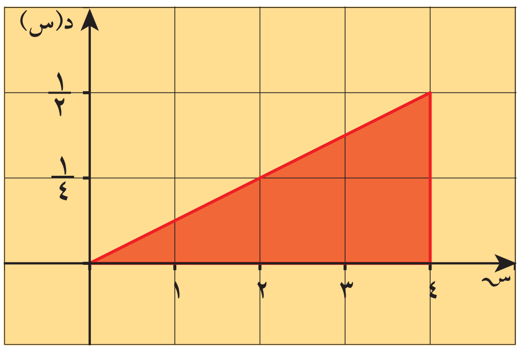
الحل:

أ ل$(٠ \le$ سـ $\le ٤)$ = مساحة المنطقة المظللة

= مساحة المنطقة المثلثة

$= \frac{١}{٢} \times ٤ \times \frac{١}{٢}$

$= ١$



ب ل(سـ $\le ٢)$ = مساحة المنطقة المظللة

= مساحة المنطقة المثلثة

$= ٢ \times \frac{١}{٤} \times \frac{١}{٢}$

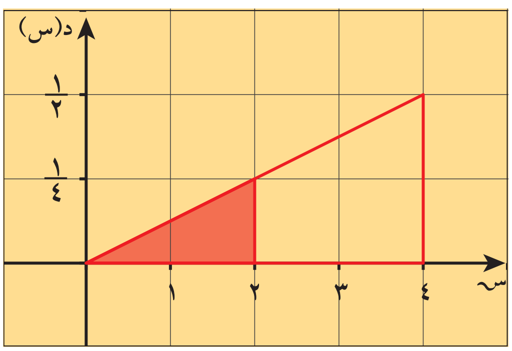
$= \frac{١}{٤}$

جـ ل(سـ $> ٢) = ١ -$ ل(سـ $\le ٢)$

= مساحة المنطقة غير المظللة من المثلث

$= ١ - \frac{١}{٤}$

$= \frac{٣}{٤}$



حاول أن تحل

٢٤ إذا كان سـ متغيرًا عشوائيًّا متصلًا دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$د(س) = \begin{cases} \frac{١}{٢} س & : ٠ \le س \le ٢ \\ صفر & : في ما عدا ذلك \end{cases}$$

أوجد:

أ ل(سـ $< ١)$ ب ل(سـ $\ge ١)$ جـ ل(سـ $= ١)$

التوزيع الاحتمالي المنتظم لمتغير عشوائي متصل (مستمر)

Regular Probability Distribution for a Random Continuous Variable

يعرّف التوزيع الاحتمالي المنتظم على [أ، ب] بأنه توزيع احتمالي دالة كثافة الاحتمال له

هي: $\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{١}{\text{ب} - \text{أ}} & : \quad \text{أ} \leq \text{س} \leq \text{ب} \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو $\mu = \dfrac{\text{أ} + \text{ب}}{٢}$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو $\sigma^٢ = \dfrac{(\text{ب} - \text{أ})^٢}{١٢}$

مثال (٢٥)

لتكن الدالة د:

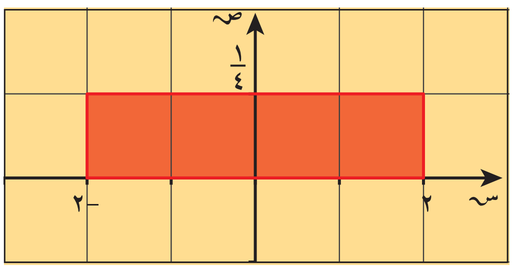
$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{١}{٤} & : \quad -٢ \leq \text{س} \leq ٢ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أ) أثبت أن الدالة هي دالة كثافة احتمال.

ب) أثبت أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

جـ) أوجد ل$(-١ < \text{س} \leq ٢)$.

د) أوجد التوقع والتباين للدالة د.



الحل:

أ) لإثبات أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال

يجب إثبات أن

المساحة تحت المنحنى تساوي ١ .

المساحة تحت المنحنى من الشكل هي مساحة

المنطقة المستطيلة = الطول × العرض

$= ٤ \times \dfrac{١}{٤} = ١$

∴ الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

ب) لإثبات أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم يجب أن تكون الدالة على الصورة:

$\text{د(س)} = \begin{cases} \dfrac{١}{\text{ب} - \text{أ}} & : \quad \text{أ} \leq \text{س} \leq \text{ب} \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

∵ ب = ٢ ، أ = -٢ $\Leftarrow$ ب - أ = ٤

$\therefore$ $\frac{١}{ب - \text{أ}} = \frac{١}{٤}$ $\therefore$ الدالة د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٤} & : \quad -٢ \geq س \geq ٢ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

يمكن وضعها على الصورة:

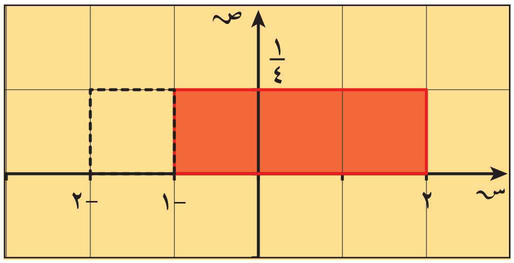
د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{ب - \text{أ}} & : \quad \text{أ} \geq س \geq ب \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

$\therefore$ الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

جـ ل(−١ > س ≥ ٢)

= مساحة المنطقة المظللة

= ٣ × $\frac{١}{٤}$ = $\frac{٣}{٤}$ وحدة مساحة



د التوقع μ = $\frac{\text{أ} + ب}{٢}$ = $\frac{-٢ + ٢}{٢}$ = صفر

التباين σ^2 = $\frac{(ب - \text{أ})^٢}{١٢}$ = $\frac{١٦}{١٢}$ = $١\frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٢٥ لتكن الدالة د: د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٥} & : \quad -٢ \geq س \geq ٣ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أ أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

ب أثبت أن الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

جـ أوجد ل(−١ ≥ س ≥ ٢).

د أوجد التوقع والتباين للدالة د.

مثال (٢٦)

الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

د(س) = $\begin{cases} \frac{١}{٢} & : \quad -٠,٥ \geq س \geq ١,٥ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$

أ أثبت أن الدالة د هي دالة كثافة احتمال.

ب أوجد ل(−٢,٠ ≥ س ≥ ٣,٠).

جـ أوجد التوقع والتباين للدالة د.

الحل:

أ د هي دالة كثافة احتمال إذا كانت المساحة تحت المنحنى تساوي ١

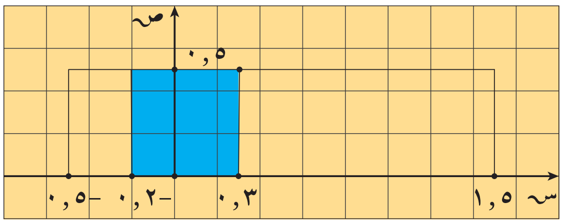
مساحة المنطقة كلّها تساوي $(١,٥ - (-٠,٥)) \times ٠,٥ = ١$

$\therefore$ د هي دالة كثافة احتمال

ب ل$(-٠,٢ \geq$ س $\geq ٠,٣)$ = مساحة المنطقة المظلّلة بالأزرق

$= (٠,٣ - (-٠,٢)) \times ٠,٥$

$= ٠,٢٥$



جـ التوقع: $\mu = \frac{\text{ب} + ٲ}{٢} = \frac{١,٥ + (-٠,٥)}{٢} = \frac{١}{٢}$

التباين: $\sigma^٢ = \frac{(\text{ب} - ٲ)^٢}{١٢} = \frac{[١,٥ - (-٠,٥)]^٢}{١٢}$

$= \frac{٤}{١٢} = \frac{١}{٣}$

حاول أن تحل

٢٦ الدالة د تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم:

$$\text{د(س)} = \begin{cases} \frac{١}{٣} & : \quad ٠ \leq \text{س} \leq ٣ \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

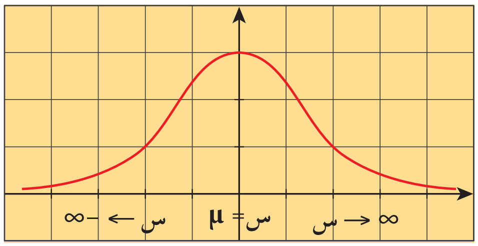
أ أثبت أن هذه الدالة هي دالة كثافة.

ب أوجد ل$(١ \geq$ س $\geq ٢)$.

جـ أوجد التوقع والتباين.

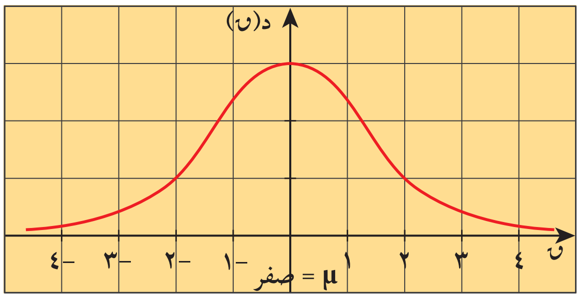
التوزيع الاحتمالي الطبيعي ط(μ، σ^2) Natural Probability Distribution

يعتبر التوزيع الاحتمالي الطبيعي من أهم التوزيعات الاحتمالية المتصلة وقد سبق أن درسنا منحنى التوزيع الطبيعي وخواصه والتي منها:



منحنى التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2)

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره (س = μ).
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $+\infty$ وإلى $-\infty$ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي س = μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).



منحنى التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2)

التوزيع الطبيعي المعياري ط(٠، ١)

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي μ = صفر والانحراف المعياري σ = ١ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

نعلم أن منحنى التوزيع الطبيعي يتحدد بكل من التوقع μ والتباين لها σ^2 ونظرًا لاختلاف قيم σ^2 ، μ، من توزيع لآخر فإننا نقوم بتحويل أي توزيع طبيعي إلى توزيع طبيعي معياري وفق التحويل

$$ن = \frac{س - \mu}{\sigma}$$

وتم وضع جداول التوزيع الطبيعي المعياري في نهاية الوحدة للتوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2).

حساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي ط(μ، σ^2)

إذا كان للمتغير العشوائي سـ التوزيع الطبيعي ط(μ ، σ^2) أي التوزيع الذي توقعه μ وتباينه σ^2 وأردنا حساب احتمالات تتعلق بالمتغير سـ فإننا نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري المرفق آخر الوحدة باتباع الخطوات الموضحة التالية لإيجاد ل(أ < سـ ≤ ب):

١ نوجد القيمة المعيارية المناظرة للقيمة أ بالتعويض في العلاقة $ن_1 = \frac{أ - \mu}{\sigma}$

والقيمة المعيارية المناظرة للقيمة ب: $ن_2 = \frac{ب - \mu}{\sigma}$

٢ نستخدم العلاقة : ل(أ < س ≤ ب) = ل ($ن_1$ < ن ≤ $ن_2$)

٣ نستخدم جدول المساحة تحت المنحنى الطبيعي جدول (٤) وجدول (٥) لحساب الطرف الأيسر من العلاقة السابقة.

لحساب الاحتمالات للتوزيع الطبيعي المعياري ل(ى):

- إذا كانت ى ≥ أ أو ى ≤ أ، حيث أ ≤ صفر نستخدم جدول ى رقم (٤).
- إذا كانت ى ≥ أ أو ى ≤ أ، حيث أ > صفر نستخدم جدول ى رقم (٥).

مثال (٢٧)

إذا كان ى هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

أ ل(ى ≥ ٢,١٨)

ب ل(ى ≤ ٢,٤٣)

جـ ل(١,٤ ≥ ى ≥ ٢,٦)

الحل:

أ لإيجاد ل(ى ≥ ٢,١٨)

∵ ٢,١٨ ≤ ٠

∴ نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري ى رقم (٤) الموجود في نهاية الوحدة.

ل(ى ≥ ٢,١٨) = ٠,٩٨٥٣٧

ب ل(ى ≤ ٢,٤٣) = ١ − ل(ى ≥ ٢,٤٣)

= ١ − ٠,٩٩٢٤٥

= ٠,٠٠٧٥٥

جـ ل(١,٤ ≥ ى ≥ ٢,٦)

= ل(ى ≥ ٢,٦) − ل(ى ≥ ١,٤)

= ٠,٩٩٥٣٤ − ٠,٩١٩٢٤

= ٠,٠٧٦١٠

حاول أن تحل

٢٧ إذا كان ى هو التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

أ ل(ى ≥ ٠,٩٥)

ب ل(ى > ٠,٧١)

جـ ل(١,٤٥ ≥ ى ≥ ٣,٢٦)

مثال (٢٨)

إذا كان ن هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

أ ل(ن ≤ −٠,٥٥).

ب ل(−٢,٢ ≤ ن ≤ −١,٦)

ج ل(−١,٣ ≤ ن ≤ ٠,٢٨)

الحل:

أ لإيجاد ل = (ن ≤ −٠,٥٥)

∵ −٠,٥٥ < ٠

∴ نستخدم جدول التوزيع الطبيعي المعياري ن رقم (٥)

∴ ل(ن ≤ −٠,٥٥) = ٠,٢٩١١٦

ب ل(−٢,٢ ≤ ن ≤ −١,٦) = ل(ن ≤ −١,٦) − ل(ن ≤ −٢,٢)

= ٠,٠٥٤٨٠ − ٠,٠١٣٩٠

= ٠,٠٤٠٩٠

ج ل(−١,٣ ≤ ن ≤ ٠,٢٨) = ل(ن ≤ ٠,٢٨) − ل(ن ≤ −١,٣)

∵ ٠,٢٨ ≥ ٠ ∴ تستخدم جدول ن رقم (٤)

∴ ل(ن ≤ ٠,٢٨) = ٠,٦١٠٢٦

∵ −١,٣ < صفر ∴ نستخدم جدول ن رقم (٥)

∴ ل(ن ≤ −١,٣) = ٠,٠٩٦٨٠

∴ ل(−١,٣ ≤ ن ≤ ٠,٢٨) = ٠,٦١٠٢٦ − ٠,٠٩٦٨٠

= ٠,٥١٣٤٦

حاول أن تحل

٢٨ اذا كان ن هو التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي س فأوجد:

أ ل(ن ≤ −٠,١٢)

ب ل(ن ≥ ٠,٢٥)

ج ل(−٢,٣ ≤ ن ≤ −٠,١)

د ل(−٥,٢٦ ≤ ن ≤ ٠,٦٩)

مثال (٢٩)

المتغير س يمثل درجات الطلاب في مادة ما وهو يتبع التوزيع الطبيعي وتوقعه $\mu = ١٦$ وتباينه $\sigma^٢ = ١٦$. أوجد:

أ) $\text{ل}(١٤ < \text{س} < ١٨)$

ب) $\text{ل}(١١ < \text{س} < ١٣)$

الحل:

أ) $\mu = ١٦$ ، $\sigma^٢ = ١٦ \Leftarrow \sigma = ٤$

بوضع $\text{س}_١ = ١٤ \Leftarrow \text{ى}_١ = \frac{\text{س}_١ - \mu}{\sigma} = \frac{١٤-١٦}{٤} = -\frac{١}{٢}$

$\text{س}_٢ = ١٨ \Leftarrow \text{ى}_٢ = \frac{\text{س}_٢ - \mu}{\sigma} = \frac{١٨-١٦}{٤} = \frac{١}{٢}$

$\text{ل}(١٤ < \text{س} < ١٨) = \text{ل}\left(\text{ى} < \frac{١}{٢}\right) - \text{ل}\left(\text{ى} < -\frac{١}{٢}\right)$

$\text{ل}\left(\text{ى} < \frac{١}{٢}\right) = ٠{,}٦٩١٤٦$ من جدول (٤)

$\text{ل}\left(\text{ى} < -\frac{١}{٢}\right) = ٠{,}٣٠٨٥٤$ من جدول (٥)

$\text{ل}(١٤ < \text{س} < ١٨) = \text{ل}\left(-\frac{١}{٢} < \text{ى} < \frac{١}{٢}\right)$

$= ٠{,}٦٩١٤٦ - ٠{,}٣٠٨٥٤ = ٠{,}٣٨٢٩٢$

ب) $\text{س}_١ = ١١ \Leftarrow \text{ى}_١ = \frac{\text{س}_١ - \mu}{\sigma} = \frac{١١-١٦}{٤} = -\frac{٥}{٤} = -١{,}٢٥$

$\text{س}_٢ = ١٣ \Leftarrow \text{ى}_١ = \frac{\text{س}_٢ - \mu}{\sigma} = \frac{١٣-١٦}{٤} = -\frac{٣}{٤} = -٠{,}٧٥$

$\text{ل}(١١ < \text{س} < ١٣) = \text{ل}\left(\text{ى} < -\frac{٣}{٤}\right) - \text{ل}\left(\text{ى} < -\frac{٥}{٤}\right)$

$\because \text{ل}\left(\text{ى} < -\frac{٣}{٤}\right) = ٠{,}٢٢٦٦٣$ ، $\text{ل}\left(\text{ى} < -\frac{٥}{٤}\right) = ٠{,}١٠٥٦٥$

$\therefore \text{ل}(١١ < \text{س} < ١٣) = ٠{,}٢٢٦٦٣ - ٠{,}١٠٥٦٥ = ٠{,}١٢٠٩٨$

حاول أن تحل

٢٩) يمثل المتغير العشوائي س الزمن الذي يستغرقه أحد الطلاب للوصول إلى المدرسة، وهو متغير يتبع التوزيع الطبيعي توقعه ١٦ دقيقة وتباينه ٤، احسب احتمال أنه في يوم ما سيستغرقه الطالب للوصول إلى المدرسة.

أ) أقل من ٢١ دقيقة.

ب) أكثر من ١٢ دقيقة وأقل من ٢١ دقيقة.

المرشد لحل المسائل

يتبع الراتب السنوي لموظفي شركة كبيرة التوزيع الطبيعي ط(٥٠ ٠٠٠، ٤٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠)

أ أوجد التوقع والتباين.

ب ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أقلّ من ٤٠ ٠٠٠ دينار كويتي؟

جـ ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم بين ٤٥ ٠٠٠ وَ ٦٥ ٠٠٠ دينار كويتي؟

د ما النسبة المئوية للموظفين الذين رواتبهم أكثر من ٧٠ ٠٠٠ دينار كويتي؟

الحل:

أ التوزيع الطبيعي ط(٥٠ ٠٠٠، ٤٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠) ، توقعه μ = ٥٠ ٠٠٠،

تباينه σ^2 = ٤٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠

ب ل(س < ٤٠ ٠٠٠) = ل$\left(ن < \frac{٤٠ ٠٠٠ - ٥٠ ٠٠٠}{\sqrt{٤٠٠ ٠٠٠ ٠٠٠}}\right)$ = ل$\left(ن < -\frac{١}{٢}\right)$

باستخدام الجدول (٥):

ل$\left(ن < -\frac{١}{٢}\right)$ = ٠,٣٠٨٥٤

∴ ٣٠,٨٥٪ من الموظفين راتبهم أقلّ من ٤٠ ٠٠٠ دينار كويتي

جـ ل(٦٥ ٠٠٠ > س > ٤٥ ٠٠٠) = ل(٠,٧٥ > ن > −٠,٢٥)

= ل(ن < ٠,٧٥) − ل(ن < −٠,٢٥)

= ٠,٧٧٣٣٥ − ٠,٤٠ ١٢٩ = ٠,٣٧٢٠٦

∴ ٣٧,٢١٪ من الموظفين راتبهم بين ٦٥ ٠٠٠ وَ ٥٤ ٠٠٠ دينار كويتي.

د ل(س > ٧٠ ٠٠٠) = ١ − ل(س ≤ ٧٠ ٠٠٠)

= ١ − ل(ن < ١) = ١ − ٠,٨٤١٣٤

= ٠,١٥٨٦٦

∴ ١٥,٨٧٪ من الموظفين راتبهم أكثر من ٧٠ ٠٠٠ دينار كويتي.

مسألة إضافية

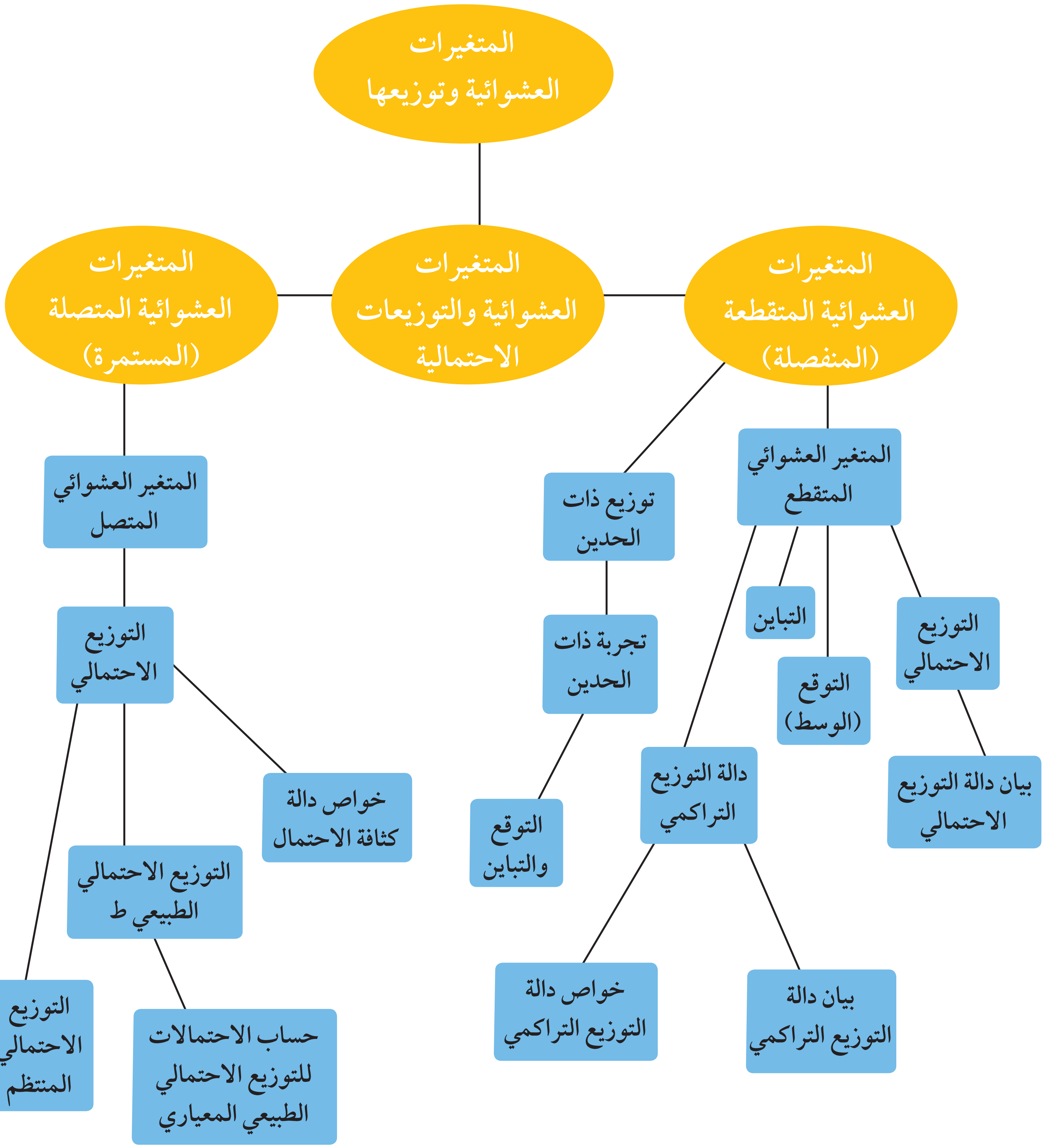
الوقت اللازم لتجميع مكونات سيارة في معمل يتبع التوزيع الطبيعي ط(٢٠، ٤)

أ أوجد التوقع والتباين.

ب ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بأقل من ١٩,٥ ساعة؟

جـ ما احتمال أن يتم تجميع السيارة بوقت يتراوح بين ٢٠ وَ٢٢ ساعة؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- المتغيّر العشوائي: هو دالة مجالها فضاء العينة ف ومجالها المقابل هو ح ومداها مجموعة جزئية من ح حيث س: ف ← ح
(س هو المتغير العشوائي، ف فضاء العينة، ح مجموعة الأعداد الحقيقية).
- يكون المتغير العشوائي س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا إذا كانت مجموعة القيم الممكنة له (المدى) س (ف): هي مجموعة متقطعة أي قابلة للعد، من الأعداد الحقيقية سواء أكانت منتهية أم غير منتهية.
- إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه {س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، ...}، فإن دالة التوزيع الاحتمالي د تعرّف كالتالي:

د(س$_ر$) = احتمال (س = س$_ر$)

أي أن د (س$_ر$) = ل(س = س$_ر$)   لكل ر = ١، ٢، ٣، ...

دالة التوزيع الاحتمالي د للمتغير العشوائي المتقطع س تحقق الشرطين:

١ ٠ ≤ د(س) ≤ ١

٢ مجموع قيم دالة التوزيع الاحتمالي د تساوي الواحد الصحيح،

أي أن د(س$_١$) + د(س$_٢$) + د(س$_٣$) + ... = ١

- إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د،

مدى س = {س$_١$ ، س$_٢$ ، س$_٣$ ، ...}

فإن التوقع للمتغير العشوائي س (يرمز له برمز μ) يكون:

التوقع (μ) = $\sum$ س$_ر$ د(س$_ر$)

أي أن: μ = س$_١$ د (س$_١$) + س$_٢$ د(س$_٢$) + س$_٣$ د (س$_٣$) + ...

- إذا كان س متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا له دالة التوزيع الاحتمالي د فإن التباين للمتغير العشوائي يعطى بالصيغة:

التباين (σ^2) = $\sum$ س$_ر^٢$ د(س$_ر$) − μ^2 حيث μ هو التوقع.

الانحراف المعياري (σ) = $\sqrt{\text{التباين}}$.

- دالة التوزيع التراكمي ت للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة أ

هي احتمال وقوع المتغير العشوائي س بحيث يكون س أصغر من أو يساوي أ

أي أن: ت(أ) = د(س ≤ أ)

١ ل(أ < س ≤ ب) = ت(ب) − ت(أ)

٢ ل(سـ > ؟) = ١ − ل(سـ ≤ ؟) = ١ − ت(؟)

ل(؟ > سـ ≤ ب) = ل(؟ ≤ سـ > ب) = ل(؟ > سـ > ب) = ل(؟ ≤ سـ ≤ ب)

• تجربة ذات الحدين هي تجربة عشوائية تحقق الشروط التالية:

١ تتكوّن التجربة من عدد ن من المحاولات المستقلة والمتماثلة.

(المحاولات المستقلة تعنى أن نتيجة كل محاولة لا تؤثر ولا تتأثر بنتائج المحاولات الأخرى).

٢ كل محاولة يكون لها ناتجان فقط (نجاح أو فشل).

٣ احتمال الحصول على أحد الناتجين يكون ثابتًا من تجربة إلى أخرى. وسوف نرمز لهذا الاحتمال بالرمز ل.

وتسمى كل محاولة من محاولات التجربة بمحاولة برنولي.

ل(سـ = س) = د(س) = ^{ن}ق$_{ر}$ ل^{س} (١ − س)$^{ن-س}$ ، ن ∈ صـ$^{+}$

حيث:

- ن عدد المحاولات
- مجموع القيم الممكنة للمتغير العشوائي سـ = {٠، ١، ٢، ... ن}
- س عدد مرات النجاح من ن في المحاولات
- ل احتمال النجاح
- (١ − ل) احتمال الفشل
- يسمى توزيع المتغير العشوائي سـ بتوزيع ذات الحدين للمعلمتين ل، ن.

التوقع والتباين لتوزيع ذو الحدين:

درسنا كيفية إيجاد التوقع والتباين للمتغير العشوائي المتقطع والآن نتعرّض لإيجاد التوقع والتباين لتوزيع ذات الحدين.

أولًا: التوقع μ = ن ل

ثانيًا: التباين σ^{2} = ن ل(١ − ل)

ثالثًا: الانحراف المعياري σ = $\sqrt{\text{ن ل(١ − ل)}}$

خواص دالة كثافة الاحتمال

• المتغير التي تكون مجموعة القيم الممكنة له عبارة عن فترة من الأعداد الحقيقية أي أن مدى المتغير العشوائي المتصل سـ = {س: ؟ ≤ س ≤ ب} وهي مجموعة غير قابلة للعد.

١ د(س) هي دالة متصلة على مجالها.

٢ د(س) ≥ ٠ لكل قيم س التي تنتمي لمجال الدالة.

٣ قيمة المساحة المحددة بمنحنى الدالة د(س) ومحور السينات تساوي الواحد الصحيح.

٤ يمكن إيجاد الاحتمال ل(؟ > سـ ≤ ب) بحساب المساحة تحت المنحنى ل بين القيمة ؟، ب.

٥ تنعدم المساحة المظللة إذا كان ﺃ = ب

أي أنه لأي متغير عشوائي متصل فإن ل(ﺃ = ﺃ) = صفر

يعرّف التوزيع الاحتمالي المنتظم على [ﺃ، ب] بأنه توزيع احتمالي دالة كثافة الاحتمال له

$$\text{هي: د(س)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\text{ب} - \text{ﺃ}} & : \quad \text{ﺃ} \leq \text{س} \leq \text{ب} \\ \text{صفر} & : \quad \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

– التوقع (الوسط) للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\mu = \dfrac{\text{ﺃ} + \text{ب}}{2}$

– التباين للتوزيع الاحتمالي المنتظم هو: $\sigma^2 = \dfrac{(\text{ب} - \text{ﺃ})^2}{12}$

التوزيع الاحتمالي الطبيعي (ط، σ^2)

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره (س = μ).
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى $+\infty$ وإلى $-\infty$ (لا يقطع محور السينات).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).
- المستقيم الرأسي س = μ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى قطعتين متماثلتين مساحة كل منها تساوي نصف (نصف وحدة مساحة).

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

ن	س	ل										
		٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
٢	٠	٠,٩٠٢	٠,٨١٠	٠,٦٤٠	٠,٤٩٠	٠,٣٦٠	٠,٢٥٠	٠,١٦٠	٠,٠٩٠	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢
	١	٠,٠٩٥	٠,١٨٠	٠,٣٢٠	٠,٤٢٠	٠,٤٨٠	٠,٥٠٠	٠,٤٨٠	٠,٤٢٠	٠,٣٢٠	٠,١٨٠	٠,٠٩٥
	٢	٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,٠٩٠	٠,١٦٠	٠,٢٥٠	٠,٣٦٠	٠,٠٤٩٠	٠,٠٦٤٠	٠,٠٨١٠	٠,٠٩٠٢
٣	٠	٠,٨٥٧	٠,٧٢٩	٠,٥١٢	٠,٣٤٣	٠,٢١٦	٠,١٢٥	٠,٠٦٤	٠,٠٢٧	٠,٠٠٨	٠,٠٠١	
	١	٠,١٣٥	٠,٢٤٣	٠,٣٨٤	٠,٤٤١	٠,٤٣٢	٠,٣٧٥	٠,٢٨٨	٠,١٨٩	٠,٠٩٦	٠,٠٢٧	٠,٠٠٧
	٢	٠,٠٠٧	٠,٠٢٧	٠,٠٩٦	٠,١٨٩	٠,٢٨٨	٠,٣٧٥	٠,٤٣٢	٠,٤٤١	٠,٣٨٤	٠,٢٤٣	٠,١٣٥
	٣		٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٢٧	٠,٠٦٤	٠,١٢٥	٠,٢١٦	٠,٣٤٣	٠,٥١٢	٠,٧٢٩	٠,٨٥٧
٤	٠	٠,٨١٥	٠,٦٥٦	٠,٤١٠	٠,٢٤٠	٠,١٣٠	٠,٠٦٢	٠,٠٢٦	٠,٠٠٨	٠,٠٠٢		
	١	٠,١٧١	٠,٢٩٢	٠,٤١٠	٠,٤١٢	٠,٣٤٦	٠,٢٥٠	٠,١٥٤	٠,٠٧٦	٠,٠٢٦	٠,٠٠٤	
	٢	٠,٠١٤	٠,٠٤٩	٠,١٥٤	٠,٢٦٥	٠,٣٤٦	٠,٣٧٥	٠,٣٤٦	٠,٢٦٥	٠,١٥٤	٠,٠٤٩	٠,٠١٤
	٣		٠,٠٠٤	٠,٠٢٦	٠,٠٧٦	٠,١٥٤	٠,٢٥٠	٠,٣٤٦	٠,٤١٢	٠,٤١٠	٠,٢٩٢	٠,١٧١
	٤			٠,٠٠٢	٠,٠٠٨	٠,٠٢٦	٠,٠٦٢	٠,١٣٠	٠,٢٤٠	٠,٤١٠	٠,٦٥٦	٠,٨١٥
٥	٠	٠,٧٧٤	٠,٥٩٠	٠,٣٢٨	٠,١٦٨	٠,٠٧٨	٠,٠٣١	٠,٠١٠	٠,٠٠٢			
	١	٠,٢٠٤	٠,٣٢٨	٠,٤١٠	٠,٣٦٠	٠,٢٥٩	٠,١٥٦	٠,٠٧٧	٠,٠٢٨	٠,٠٠٦		
	٢	٠,٠٢١	٠,٠٧٣	٠,٢٠٥	٠,٣٠٩	٠,٣٤٦	٠,٣١٢	٠,٢٣٠	٠,١٣٢	٠,٠٥١	٠,٠٠٨	٠,٠٠١
	٣	٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٥١	٠,١٣٢	٠,٢٣٠	٠,٣١٢	٠,٣٤٦	٠,٣٠٩	٠,٢٠٥	٠,٠٧٣	٠,٠٢١
	٤			٠,٠٠٦	٠,٠٢٨	٠,٠٧٧	٠,١٥٦	٠,٢٥٩	٠,٣٦٠	٠,٤١٠	٠,٣٢٨	٠,٢٠٤
	٥				٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٣١	٠,٠٧٨	٠,١٦٨	٠,٣٢٨	٠,٥٩٠	٠,٧٧٤
٦	٠	٠,٧٣٥	٠,٥٣١	٠,٢٦٢	٠,١١٨	٠,٠٤٧	٠,٠١٦	٠,٠٠٤	٠,٠٠١			
	١	٠,٢٣٢	٠,٣٥٤	٠,٣٩٣	٠,٣٠٣	٠,١٨٧	٠,٠٩٤	٠,٠٣٧	٠,٠١٠	٠,٠٠٢		
	٢	٠,٠٣١	٠,٠٩٨	٠,٢٤٦	٠,٣٢٤	٠,٣١١	٠,٢٣٤	٠,١٣٨	٠,٠٦٠	٠,٠١٥	٠,٠٠١	
	٣	٠,٠٠٢	٠,٠١٥	٠,٠٨٢	٠,١٨٥	٠,٢٧٦	٠,٣١٢	٠,٢٧٦	٠,١٨٥	٠,٠٨٢	٠,٠١٥	٠,٠٠٢
	٤		٠,٠٠١	٠,٠١٥	٠,٠٦٠	٠,١٣٨	٠,٢٣٤	٠,٣١١	٠,٣٢٤	٠,٢٤٦	٠,٠٩٨	٠,٠٣١
	٥			٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٣٧	٠,٠٩٤	٠,١٨٧	٠,٣٠٣	٠,٣٩٣	٠,٣٥٤	٠,٢٣٢
	٦				٠,٠٠١	٠,٠٠٤	٠,٠١٦	٠,٠٤٧	٠,١١٨	٠,٢٦٢	٠,٥٣١	٠,٧٣٥
٧	٠	٠,٦٩٨	٠,٤٧٨	٠,٢١٠	٠,٠٨٢	٠,٠٢٨	٠,٠٠٨	٠,٠٠٢				
	١	٠,٢٥٧	٠,٣٧٢	٠,٣٦٧	٠,٢٤٧	٠,١٣١	٠,٠٥٥	٠,٠١٧	٠,٠٠٤			
	٢	٠,٠٤١	٠,١٢٤	٠,٢٧٥	٠,٣١٨	٠,٢٦١	٠,١٦٤	٠,٠٧٧	٠,٠٢٥	٠,٠٠٤		
	٣	٠,٠٠٤	٠,٠٢٣	٠,١١٥	٠,٢٢٧	٠,٢٩٠	٠,٢٧٣	٠,١٩٤	٠,٠٩٧	٠,٠٢٩	٠,٠٠٣	
	٤		٠,٠٠٣	٠,٠٢٩	٠,٠٩٧	٠,١٩٤	٠,٢٧٣	٠,٢٩٠	٠,٢٢٧	٠,١١٥	٠,٠٢٣	٠,٠٠٤
	٥			٠,٠٠٤	٠,٠٢٥	٠,٠٧٧	٠,١٦٤	٠,٢٦١	٠,٣١٨	٠,٢٧٥	٠,١٢٤	٠,٠٤١
	٦				٠,٠٠٤	٠,٠١٧	٠,٠٥٥	٠,١٣١	٠,٢٤٧	٠,٣٦٧	٠,٣٧٢	٠,٢٥٧
	٧					٠,٠٠٢	٠,٠٠٨	٠,٠٢٨	٠,٠٨٢	٠,٢١٠	٠,٤٧٨	٠,٦٩٨

جدول (١)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

		ل										
ن	س	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
٨	٠	٠,٦٦٣	٠,٤٣٠	٠,١٦٨	٠,٠٥٨	٠,٠١٧	٠,٠٠٤	٠,٠٠١				
	١	٠,٢٧٩	٠,٣٨٣	٠,٣٣٦	٠,١٩٨	٠,٠٩٠	٠,٠٣١	٠,٠٠٨	٠,٠٠١			
	٢	٠,٠٥١	٠,١٤٩	٠,٢٩٤	٠,٢٩٦	٠,٢٠٩	٠,١٠٩	٠,٠٤١	٠,٠١٠	٠,٠٠١		
	٣	٠,٠٠٥	٠,٠٣٣	٠,١٤٧	٠,٢٥٤	٠,٢٧٩	٠,٢١٩	٠,١٢٤	٠,٠٤٧	٠,٠٠٩		
	٤		٠,٠٠٥	٠,٠٤٦	٠,١٣٦	٠,٢٣٢	٠,٢٧٣	٠,٢٣٢	٠,١٣٦	٠,٠٤٦	٠,٠٠٥	
	٥			٠,٠٠٩	٠,٠٤٧	٠,١٢٤	٠,٢١٩	٠,٢٧٩	٠,٢٥٤	٠,١٤٧	٠,٠٣٣	٠,٠٠٥
	٦			٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,٠٤١	٠,١٠٩	٠,٢٠٩	٠,٢٩٦	٠,٢٩٤	٠,١٤٩	٠,٠٥١
	٧				٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٣١	٠,٠٩٠	٠,١٩٨	٠,٣٣٦	٠,٣٨٣	٠,٢٧٩
	٨					٠,٠٠١	٠,٠٠٤	٠,٠١٧	٠,٠٥٨	٠,١٦٨	٠,٤٣٠	٠,٦٦٣
٩	٠	٠,٦٣٠	٠,٣٨٧	٠,١٣٤	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢					
	١	٠,٢٩٩	٠,٣٨٧	٠,٣٠٢	٠,١٥٦	٠,٠٦٠	٠,٠١٨	٠,٠٠٤				
	٢	٠,٠٦٣	٠,١٧٢	٠,٣٠٢	٠,٢٦٧	٠,١٦١	٠,٠٧٠	٠,٠٢١	٠,٠٠٤			
	٣	٠,٠٠٨	٠,٠٤٥	٠,١٧٦	٠,٢٦٧	٠,٢٥١	٠,١٦٤	٠,٠٧٤	٠,٠٢١	٠,٠٠٣		
	٤	٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٦٥	٠,١٧٢	٠,٢٥١	٠,٢٤٦	٠,١٦٧	٠,٠٧٤	٠,٠١٧	٠,٠٠١	
	٥		٠,٠٠١	٠,٠١٧	٠,٠٧٤	٠,١٦٧	٠,٢٤٦	٠,٢٥١	٠,١٧٢	٠,٠٦٦	٠,٠٠٧	٠,٠٠١
	٦			٠,٠٠٣	٠,٠٢١	٠,٠٧٤	٠,١٦٤	٠,٢٥١	٠,٢٦٧	٠,١٧٦	٠,٠٤٥	٠,٠٠٨
	٧				٠,٠٠٤	٠,٠٢١	٠,٠٧٠	٠,١٦١	٠,٢٦٧	٠,٣٠٢	٠,١٧٢	٠,٠٦٣
	٨					٠,٠٠٤	٠,٠١٨	٠,٠٦٠	٠,١٥٦	٠,٣٠٢	٠,٣٨٧	٠,٢٩٩
	٩						٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,١٣٤	٠,٣٨٧	٠,٦٣٠
١٠	٠	٠,٥٩٩	٠,٣٤٩	٠,١٠٧	٠,٠٢٨	٠,٠٠٦	٠,٠٠١					
	١	٠,٣١٥	٠,٣٨٧	٠,٢٦٨	٠,١٢١	٠,٠٤٠	٠,٠١٠	٠,٠٠٢				
	٢	٠,٠٧٥	٠,١٩٤	٠,٣٠٢	٠,٢٣٣	٠,١٢١	٠,٠٤٤	٠,٠١١	٠,٠٠١			
	٣	٠,٠١٠	٠,٠٥٧	٠,٢٠١	٠,٢٦٧	٠,٢١٥	٠,١١٧	٠,٠٤٢	٠,٠٠٩	٠,٠٠١		
	٤	٠,٠٠١	٠,٠١١	٠,٠٨٨	٠,٢٠٠	٠,٢٥١	٠,٢٠٥	٠,١١١	٠,٠٣٧	٠,٠٠٦		
	٥		٠,٠٠١	٠,٠٢٦	٠,١٠٣	٠,٢٠١	٠,٢٤٦	٠,٢٠١	٠,١٠٣	٠,٠٢٦	٠,٠٠١	
	٦			٠,٠٠٦	٠,٠٣٧	٠,١١١	٠,٢٠٥	٠,٢٥١	٠,٢٠٠	٠,٠٨٨	٠,٠١١	٠,٠٠١
	٧			٠,٠٠١	٠,٠٠٩	٠,٠٤٢	٠,١١٧	٠,٢١٥	٠,٢٦٧	٠,٢٠١	٠,٠٥٧	٠,٠١٠
	٨				٠,٠٠١	٠,٠١١	٠,٠٤٤	٠,١٢١	٠,٢٣٣	٠,٣٠٢	٠,١٩٤	٠,٠٧٥
	٩					٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٤٠	٠,١٢١	٠,٢٦٨	٠,٣٨٧	٠,٣١٥
	١٠						٠,٠٠١	٠,٠٠٦	٠,٠٢٨	٠,١٠٧	٠,٣٤٩	٠,٥٩٩

جدول (٢)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

		ل										
ن	س	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
١١	٠	٠,٥٦٩	٠,٣١٤	٠,٠٨٦	٠,٠٢٠	٠,٠٠٤						
	١	٠,٣٢٩	٠,٣٨٤	٠,٢٣٦	٠,٠٩٣	٠,٠٢٧	٠,٠٠٥	٠,٠٠١				
	٢	٠,٠٨٧	٠,٢١٣	٠,٢٩٥	٠,٢٠٠	٠,٠٨٩	٠,٠٢٧	٠,٠٠٥	٠,٠٠١			
	٣	٠,٠١٤	٠,٠٧١	٠,٢٢١	٠,٢٥٧	٠,١٧٧	٠,٠٨١	٠,٠٢٣	٠,٠٠٤			
	٤	٠,٠٠١	٠,٠١٦	٠,١١١	٠,٢٢٠	٠,٢٣٦	٠,١٦١	٠,٠٧٠	٠,٠١٧	٠,٠٠٢		
	٥		٠,٠٠٢	٠,٠٣٩	٠,١٣٢	٠,٢٢١	٠,٢٢٦	٠,١٤٧	٠,٠٥٧	٠,٠١٠		
	٦			٠,٠١٠	٠,٠٥٧	٠,١٤٧	٠,٢٢٦	٠,٢٢١	٠,١٣٢	٠,٠٣٩	٠,٠٠٢	
	٧			٠,٠٠٢	٠,٠١٧	٠,٠٧٠	٠,١٦١	٠,٢٣٦	٠,٢٢٠	٠,١١١	٠,٠١٦	٠,٠٠١
	٨				٠,٠٠٤	٠,٠٢٣	٠,٠٨١	٠,١٧٧	٠,٢٥٧	٠,٢٢١	٠,٠٧١	٠,٠١٤
	٩				٠,٠٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٢٧	٠,٠٨٩	٠,٢٠٠	٠,٢٩٥	٠,٢١٣	٠,٠٨٧
	١٠					٠,٠٠١	٠,٠٠٥	٠,٠٢٧	٠,٠٩٣	٠,٢٣٦	٠,٣٨٤	٠,٣٢٩
	١١							٠,٠٠٤	٠,٠٢٠	٠,٠٨٦	٠,٣١٤	٠,٥٦٩
١٢	٠	٠,٥٤٠	٠,٢٨٢	٠,٠٦٩	٠,٠١٤	٠,٠٠٢						
	١	٠,٣٤١	٠,٣٧٧	٠,٢٠٦	٠,٠٧١	٠,٠١٧	٠,٠٠٣					
	٢	٠,٠٩٩	٠,٢٣٠	٠,٢٨٣	٠,١٦٨	٠,٠٦٤	٠,٠١٦	٠,٠٠٢				
	٣	٠,٠١٧	٠,٠٨٥	٠,٢٣٦	٠,٢٤٠	٠,١٤٢	٠,٠٥٤	٠,٠١٢	٠,٠٠١			
	٤	٠,٠٠٢	٠,٠٢١	٠,١٣٣	٠,٢٣١	٠,٢١٣	٠,١٢١	٠,٠٤٢	٠,٠٠٨	٠,٠٠١		
	٥		٠,٠٠٤	٠,٠٥٣	٠,١٥٨	٠,٢٢٧	٠,١٩٣	٠,١٠١	٠,٠٢٩	٠,٠٠٣		
	٦			٠,٠١٦	٠,٠٧٩	٠,١٧٧	٠,٢٢٦	٠,١٧٧	٠,٠٧٩	٠,٠١٦		
	٧			٠,٠٠٣	٠,٠٢٩	٠,١٠١	٠,١٩٣	٠,٢٢٧	٠,١٥٨	٠,٠٥٣	٠,٠٠٤	
	٨			٠,٠٠١	٠,٠٠٨	٠,٠٤٢	٠,١٢١	٠,٢١٣	٠,٢٣١	٠,١٣٣	٠,٠٢١	٠,٠٠٢
	٩				٠,٠٠١	٠,٠١٢	٠,٠٥٤	٠,١٤٢	٠,٢٤٠	٠,٢٣٦	٠,٠٨٥	٠,٠١٧
	١٠					٠,٠٠٢	٠,٠١٠	٠,٠٦٤	٠,١٦٨	٠,٢٨٣	٠,٢٣٠	٠,٠٩٩
	١١						٠,٠٠٣	٠,٠١٧	٠,٠٧١	٠,٢٠٦	٠,٣٧٧	٠,٣٤١
	١٢							٠,٠٠٢	٠,٠١٤	٠,٠٦٩	٠,٢٨٢	٠,٥٤٠

جدول (٣)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

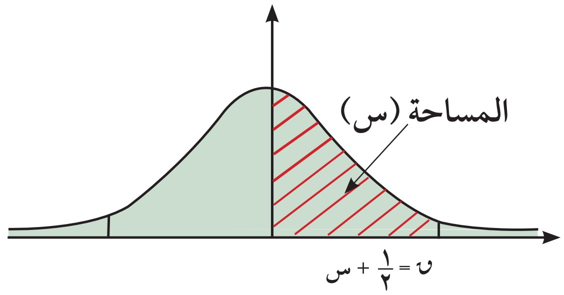
		ل										
ن	س	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
١٣	٠	٠,٥١٣	٠,٢٥٤	٠,٠٥٥	٠,٠١٠	٠,٠٠١						
	١	٠,٣٥١	٠,٣٦٧	٠,١٧٩	٠,٠٥٤	٠,٠١١	٠,٠٠٢					
	٢	٠,١١١	٠,٢٤٥	٠,٢٦٨	٠,١٣٩	٠,٠٤٥	٠,٠١٠	٠,٠٠١				
	٣	٠,٠٢١	٠,١٠٠	٠,٢٤٦	٠,٢١٨	٠,١١١	٠,٠٣٥	٠,٠٠٥	٠,٠٠١			
	٤	٠,٠٠٣	٠,٠٢٨	٠,١٥٤	٠,٢٣٤	٠,١٨٤	٠,٠٨٧	٠,٠٢٤	٠,٠٠٣			
	٥		٠,٠٠٦	٠,٠٦٩	٠,١٨٠	٠,٢٢١	٠,١٥٧	٠,٠٦٦	٠,٠١٤	٠,٠٠١		
	٦		٠,٠٠١	٠,٠٢٣	٠,١٠٣	٠,١٩٧	٠,٢٠٩	٠,١٣١	٠,٠٤٤	٠,٠٠٦		
	٧			٠,٠٠٦	٠,٠٤٤	٠,١٣١	٠,٢٠٩	٠,١٩٧	٠,١٠٣	٠,٠٢٣	٠,٠٠١	
	٨			٠,٠٠١	٠,٠١٤	٠,٠٦٦	٠,١٥٧	٠,٢٢١	٠,١٨٠	٠,٠٦٩	٠,٠٠٦	
	٩				٠,٠٠٣	٠,٠٢٤	٠,٠٨٧	٠,١٨٤	٠,٢٣٤	٠,١٥٤	٠,٠٢٨	٠,٠٠٣
	١٠				٠,٠٠١	٠,٠٠٦	٠,٠٣٥	٠,١١١	٠,٢١٨	٠,٢٤٦	٠,١٠٠	٠,٠٢١
	١١					٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,٠٤٥	٠,١٣٩	٠,٢٦٨	٠,٢٤٥	٠,١١١
	١٢						٠,٠٠٢	٠,٠١١	٠,٠٥٤	٠,١٧٩	٠,٣٦٧	٠,٣٥١
	١٣							٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,٠٥٥	٠,٢٥٤	٠,٥١٣
١٤	٠	٠,٤٨٨	٠,٢٢٩	٠,٠٤٤	٠,٠٠٧	٠,٠٠١						
	١	٠,٣٥٩	٠,٣٥٦	٠,١٥٤	٠,٠٤١	٠,٠٠٧	٠,٠٠١					
	٢	٠,١٢٣	٠,٢٥٧	٠,٢٥٠	٠,١١٣	٠,٠٣٢	٠,٠٠٦	٠,٠٠١				
	٣	٠,٠٢٦	٠,١١٤	٠,٢٥٠	٠,١٩٤	٠,٠٨٥	٠,٠٢٢	٠,٠٠٣				
	٤	٠,٠٠٤	٠,٠٣٥	٠,١٧٢	٠,٢٢٩	٠,١٥٥	٠,٠٦١	٠,٠١٤	٠,٠٠١			
	٥		٠,٠٠٨	٠,٠٨٦	٠,١٩٦	٠,٢٠٧	٠,١٢٢	٠,٠٤١	٠,٠٠٧			
	٦		٠,٠٠١	٠,٠٣٢	٠,١٢٦	٠,٢٠٧	٠,١٨٣	٠,٠٩٢	٠,٠٢٣	٠,٠٠٢		
	٧			٠,٠٠٩	٠,٠٦٢	٠,١٥٧	٠,٢٠٩	٠,١٥٧	٠,٠٦٢	٠,٠٠٠٩		
	٨			٠,٠٠٢	٠,٠٢٣	٠,٠٩٢	٠,١٨٣	٠,٢٠٧	٠,١٢٦	٠,٠٣٢	٠,٠٠١	
	٩				٠,٠٠٧	٠,٠٤١	٠,١٢٢	٠,٢٠٧	٠,١٩٦	٠,٠٨٦	٠,٠٠٨	
	١٠				٠,٠٠١	٠,٠١٤	٠,٠٦١	٠,١٥٥	٠,٢٢٩	٠,١٧٢	٠,٠٣٥	٠,٠٠٤
	١١					٠,٠٠٣	٠,٠٢٢	٠,٠٨٥	٠,١٩٤	٠,٢٥٠	٠,١١٤	٠,٠٢٦
	١٢					٠,٠٠١	٠,٠٠٦	٠,٠٣٢	٠,١١٣	٠,٢٥٠	٠,٢٥٧	٠,١٢٣
	١٣						٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٤١	٠,١٥٤	٠,٣٥٦	٠,٣٥٩
	١٤							٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٤٤	٠,٢٢٩	٠,٤٨٨

تابع - جدول (٣)

الاحتمالات في توزيع ذات الحدين: د(س)

		ل										
ن	س	٠,٠٥	٠,١	٠,٢	٠,٣	٠,٤	٠,٥	٠,٦	٠,٧	٠,٨	٠,٩	٠,٩٥
١٥	٠	٠,٤٦٣	٠,٢٠٦	٠,٠٣٥	٠,٠٠٥							
	١	٠,٣٦٦	٠,٣٤٣	٠,١٣٢	٠,٠٣١	٠,٠٠٥						
	٢	٠,١٣٥	٠,٢٦٧	٠,٢٣١	٠,٠٩٢	٠,٠٢٢	٠,٠٠٣					
	٣	٠,٠٣١	٠,١٢٩	٠,٢٥٠	٠,١٧٠	٠,٠٦٣	٠,٠١٤	٠,٠٠٢				
	٤	٠,٠٠٥	٠,٠٤٣	٠,١٨٨	٠,٢١٩	٠,١٢٧	٠,٠٤٢	٠,٠٠٧	٠,٠٠١			
	٥	٠,٠٠١	٠,٠١٠	٠,١٠٣	٠,٢٠٦	٠,١٨٦	٠,٠٩٢	٠,٠٢٤	٠,٠٠٣			
	٦		٠,٠٠٢	٠,٠٤٣	٠,١٤٧	٠,٢٠٧	٠,١٥٣	٠,٠٦١	٠,٠١٢	٠,٠٠١		
	٧			٠,٠١٤	٠,٠٨١	٠,١٧٧	٠,١٩٦	٠,١١٨	٠,٠٣٥	٠,٠٠٣		
	٨			٠,٠٠٣	٠,٠٣٥	٠,١١٨	٠,١٩٦	٠,١٧٧	٠,٠٨١	٠,٠١٤		
	٩			٠,٠٠١	٠,٠١٢	٠,٠٦١	٠,١٥٣	٠,٢٠٧	٠,١٤٧	٠,٠٤٣	٠,٠٠٢	
	١٠				٠,٠٠٣	٠,٠٢٤	٠,٠٩٢	٠,١٨٦	٠,٢٠٦	٠,١٠٣	٠,٠١٠	٠,٠٠١
	١١				٠,٠٠١	٠,٠٠٧	٠,٠٤٢	٠,١٢٧	٠,٢١٠	٠,١٨٨	٠,٠٤٣	٠,٠٠٥
	١٢					٠,٠٠٢	٠,٠١٤	٠,٠٦٣	٠,١٧٠	٠,٢٥٠	٠,١٢٩	٠,٠٣١
	١٣						٠,٠٠٣	٠,٠٢٢	٠,٠٩٢	٠,٢٣١	٠,٢٦٧	٠,١٣٥
	١٤							٠,٠٠٥	٠,٠٣١	٠,١٣٢	٠,٣٤٣	٠,٣٦٦
	١٥								٠,٠٠٥	٠,٠٣٥	٠,٢٠٦	٠,٤٦٣

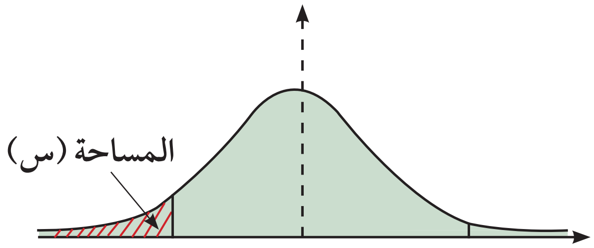
تابع -جدول (٣)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (ن) لحساب قيم المساحات من اليسار

ن	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
٠,٠	٠,٥٠٠٠٠	٠,٥٠٣٩٩	٠,٥٠٧٩٨	٠,٥١١٩٧	٠,٥١٥٩٥	٠,٥١٩٩٤	٠,٥٢٣٩٢	٠,٥٢٧٩٠	٠,٥٣١٨٨	٠,٥٣٥٨٦
٠,١	٠,٥٣٩٨٣	٠,٥٤٣٨٠	٠,٥٤٧٧٦	٠,٥٥١٧٢	٠,٥٥٥٦٧	٠,٥٥٩٦٢	٠,٥٦٣٥٦	٠,٥٦٧٤٩	٠,٥٧١٤٢	٠,٥٧٥٣٥
٠,٢	٠,٥٧٩٢٦	٠,٥٨٣١٧	٠,٥٨٧٠٦	٠,٥٩٠٩٥	٠,٥٩٤٨٣	٠,٥٩٨٧١	٠,٦٠٢٥٧	٠,٦٠٦٤٢	٠,٦١٠٢٦	٠,٦١٤٠٩
٠,٣	٠,٦١٧٩١	٠,٦٢١٧٢	٠,٦٢٥٥٢	٠,٦٢٩٣٠	٠,٦٣٣٠٧	٠,٦٣٦٨٣	٠,٦٤٠٥٨	٠,٦٤٤٣١	٠,٦٤٨٠٣	٠,٦٥١٧٣
٠,٤	٠,٦٥٥٤٢	٠,٦٥٩١٠	٠,٦٦٢٧٦	٠,٦٦٦٤٠	٠,٦٧٠٠٣	٠,٦٧٣٦٤	٠,٦٧٧٢٤	٠,٦٨٠٨٢	٠,٦٨٤٣٩	٠,٦٨٧٩٣
٠,٥	٠,٦٩١٤٦	٠,٦٩٤٩٧	٠,٦٩٨٤٧	٠,٧٠١٩٤	٠,٧٠٥٤٠	٠,٧٠٨٨٤	٠,٧١٢٢٦	٠,٧١٥٦٦	٠,٧١٩٠٤	٠,٧٢٢٤٠
٠,٦	٠,٧٢٥٧٥	٠,٧٢٩٠٧	٠,٧٣٢٣٧	٠,٧٣٥٦٥	٠,٧٣٨٩١	٠,٧٤٢١٥	٠,٧٤٥٣٧	٠,٧٤٨٥٧	٠,٧٥١٧٥	٠,٧٥٤٩٠
٠,٧	٠,٧٥٨٠٤	٠,٧٦١١٥	٠,٧٦٤٢٤	٠,٧٦٧٣٠	٠,٧٧٠٣٥	٠,٧٧٣٣٧	٠,٧٧٦٣٧	٠,٧٧٩٣٥	٠,٧٨٢٣٠	٠,٧٨٥٢٤
٠,٨	٠,٧٨٨١٤	٠,٧٩١٠٣	٠,٧٩٣٨٩	٠,٧٩٦٧٣	٠,٧٩٩٥٥	٠,٨٠٢٣٤	٠,٨٠٥١١	٠,٨٠٧٨٥	٠,٨١٠٥٧	٠,٨١٣٢٧
٠,٩	٠,٨١٥٩٤	٠,٨١٨٥٩	٠,٨٢١٢١	٠,٨٢٣٨١	٠,٨٢٦٣٩	٠,٨٢٨٩٤	٠,٨٣١٤٧	٠,٨٣٣٩٨	٠,٨٣٦٤٦	٠,٨٣٨٩١
١,٠	٠,٨٤١٣٤	٠,٨٤٣٧٥	٠,٨٤٦١٤	٠,٨٤٨٤٩	٠,٨٥٠٨٣	٠,٨٥٣١٤	٠,٨٥٥٤٣	٠,٨٥٧٦٩	٠,٨٥٩٩٣	٠,٨٦٢١٤
١,١	٠,٨٦٤٣٣	٠,٨٦٦٥٠	٠,٨٦٨٦٤	٠,٨٧٠٧٦	٠,٨٧٢٨٦	٠,٨٧٤٩٣	٠,٨٧٦٩٨	٠,٨٧٩٠٠	٠,٨٨١٠٠	٠,٨٨٢٩٨
١,٢	٠,٨٨٤٩٣	٠,٨٨٦٨٦	٠,٨٨٨٧٧	٠,٨٩٠٦٥	٠,٨٩٢٥١	٠,٨٩٤٣٥	٠,٨٩٦١٧	٠,٨٩٧٩٦	٠,٨٩٩٧٣	٠,٩٠١٤٧
١,٣	٠,٩٠٣٢٠	٠,٩٠٤٩٠	٠,٩٠٦٥٨	٠,٩٠٨٢٤	٠,٩٠٩٨٨	٠,٩١١٤٩	٠,٩١٣٠٩	٠,٩١٤٦٦	٠,٩١٦٢١	٠,٩١٧٧٤
١,٤	٠,٩١٩٢٤	٠,٩٢٠٧٣	٠,٩٢٢٢٠	٠,٩٢٣٦٤	٠,٩٢٥٠٧	٠,٩٢٦٤٧	٠,٩٢٧٨٥	٠,٩٢٩٢٢	٠,٩٣٠٥٦	٠,٩٣١٨٩
١,٥	٠,٩٣٣١٩	٠,٩٣٤٤٨	٠,٩٣٥٧٤	٠,٩٣٦٩٩	٠,٩٣٨٢٢	٠,٩٣٩٤٣	٠,٩٤٠٦٢	٠,٩٤١٧٩	٠,٩٤٢٩٥	٠,٩٤٤٠٨
١,٦	٠,٩٤٥٢٠	٠,٩٤٦٣٠	٠,٩٤٧٣٨	٠,٩٤٨٤٥	٠,٩٤٩٥٠	٠,٩٥٠٥٣	٠,٩٥١٥٤	٠,٩٥٢٥٤	٠,٩٥٣٥٢	٠,٩٥٤٤٩
١,٧	٠,٩٥٥٤٣	٠,٩٥٦٣٧	٠,٩٥٧٢٨	٠,٩٥٨١٨	٠,٩٥٩٠٧	٠,٩٥٩٩٤	٠,٩٦٠٨٠	٠,٩٦١٦٤	٠,٩٦٢٤٦	٠,٩٦٣٢٧
١,٨	٠,٩٦٤٠٧	٠,٩٦٤٨٥	٠,٩٦٥٦٢	٠,٩٦٦٣٨	٠,٩٦٧١٢	٠,٩٦٧٨٤	٠,٩٦٨٥٦	٠,٩٦٩٢٦	٠,٩٦٩٩٥	٠,٩٧٠٦٢
١,٩	٠,٩٧١٢٨	٠,٩٧١٩٣	٠,٩٧٢٥٧	٠,٩٧٣٢٠	٠,٩٧٣٨١	٠,٩٧٤٤١	٠,٩٧٥٠٠	٠,٩٧٥٥٨	٠,٩٧٦١٥	٠,٩٧٦٧٠
٢,٠	٠,٩٧٧٢٥	٠,٩٧٧٧٨	٠,٩٧٨٣١	٠,٩٧٨٨٢	٠,٩٧٩٣٢	٠,٩٧٩٨٢	٠,٩٨٠٣٠	٠,٩٨٠٧٧	٠,٩٨١٢٤	٠,٩٨١٦٩
٢,١	٠,٩٨٢١٤	٠,٩٨٢٥٧	٠,٩٨٣٠٠	٠,٩٨٣٤١	٠,٩٨٣٨٢	٠,٩٨٤٢٢	٠,٩٨٤٦١	٠,٩٨٥٠٠	٠,٩٨٥٣٧	٠,٩٨٥٧٤
٢,٢	٠,٩٨٦١٠	٠,٩٨٦٤٥	٠,٩٨٦٧٩	٠,٩٨٧١٣	٠,٩٨٧٤٥	٠,٩٨٧٧٨	٠,٩٨٨٠٩	٠,٩٨٨٤٠	٠,٩٨٨٧٠	٠,٩٨٨٩٩
٢,٣	٠,٩٨٩٢٨	٠,٩٨٩٥٦	٠,٩٨٩٨٣	٠,٩٩٠١٠	٠,٩٩٠٣٦	٠,٩٩٠٦١	٠,٩٩٠٨٦	٠,٩٩١١١	٠,٩٩١٣٤	٠,٩٩١٥٨
٢,٤	٠,٩٩١٨٠	٠,٩٩٢٠٢	٠,٩٩٢٢٤	٠,٩٩٢٤٥	٠,٩٩٢٦٦	٠,٩٩٢٨٦	٠,٩٩٣٠٥	٠,٩٩٣٢٤	٠,٩٩٣٤٣	٠,٩٩٣٦١
٢,٥	٠,٩٩٣٧٩	٠,٩٩٣٩٦	٠,٩٩٤١٣	٠,٩٩٤٣٠	٠,٩٩٤٤٦	٠,٩٩٤٦١	٠,٩٩٤٧٧	٠,٩٩٤٩٢	٠,٩٩٥٠٦	٠,٩٩٥٢٠
٢,٦	٠,٩٩٥٣٤	٠,٩٩٥٤٧	٠,٩٩٥٦٠	٠,٩٩٥٧٣	٠,٩٩٥٨٥	٠,٩٩٥٩٨	٠,٩٩٦٠٩	٠,٩٩٦٢١	٠,٩٩٦٣٢	٠,٩٩٦٤٣
٢,٧	٠,٩٩٦٥٣	٠,٩٩٦٦٤	٠,٩٩٦٧٤	٠,٩٩٦٨٣	٠,٩٩٦٩٣	٠,٩٩٧٠٢	٠,٩٩٧١١	٠,٩٩٧٢٠	٠,٩٩٧٢٨	٠,٩٩٧٣٦
٢,٨	٠,٩٩٧٤٤	٠,٩٩٧٥٢	٠,٩٩٧٦٠	٠,٩٩٧٦٧	٠,٩٩٧٧٤	٠,٩٩٧٨١	٠,٩٩٧٨٨	٠,٩٩٧٩٥	٠,٩٩٨٠١	٠,٩٩٨٠٧
٢,٩	٠,٩٩٨١٣	٠,٩٩٨١٩	٠,٩٩٨٢٥	٠,٩٩٨٣١	٠,٩٩٨٣٦	٠,٩٩٨٤١	٠,٩٩٨٤٦	٠,٩٩٨٥١	٠,٩٩٨٥٦	٠,٩٩٨٦١
٣,٠	٠,٩٩٨٦٥	٠,٩٩٨٦٩	٠,٩٩٨٧٤	٠,٩٩٨٧٨	٠,٩٩٨٨٢	٠,٩٩٨٨٦	٠,٩٩٨٨٩	٠,٩٩٨٩٣	٠,٩٩٨٩٦	٠,٩٩٩٠٠
٣,١	٠,٩٩٩٠٣	٠,٩٩٩٠٦	٠,٩٩٩١٠	٠,٩٩٩١٣	٠,٩٩٩١٦	٠,٩٩٩١٨	٠,٩٩٩٢١	٠,٩٩٩٢٤	٠,٩٩٩٢٦	٠,٩٩٩٢٩
٣,٢	٠,٩٩٩٣١	٠,٩٩٩٣٤	٠,٩٩٩٣٦	٠,٩٩٩٣٨	٠,٩٩٩٤٠	٠,٩٩٩٤٢	٠,٩٩٩٤٤	٠,٩٩٩٤٦	٠,٩٩٩٤٨	٠,٩٩٩٥٠
٣,٣	٠,٩٩٩٥٢	٠,٩٩٩٥٣	٠,٩٩٩٥٥	٠,٩٩٩٥٧	٠,٩٩٩٥٨	٠,٩٩٩٦٠	٠,٩٩٩٦١	٠,٩٩٩٦٢	٠,٩٩٩٦٤	٠,٩٩٩٦٥
٣,٤	٠,٩٩٩٦٦	٠,٩٩٩٦٨	٠,٩٩٩٦٩	٠,٩٩٩٧٠	٠,٩٩٩٧١	٠,٩٩٩٧٢	٠,٩٩٩٧٣	٠,٩٩٩٧٤	٠,٩٩٩٧٥	٠,٩٩٩٧٦
٣,٥	٠,٩٩٩٧٧	٠,٩٩٩٧٨	٠,٩٩٩٧٨	٠,٩٩٩٧٩	٠,٩٩٩٨٠	٠,٩٩٩٨١	٠,٩٩٩٨١	٠,٩٩٩٨٢	٠,٩٩٩٨٣	٠,٩٩٩٨٣
٣,٦	٠,٩٩٩٨٤	٠,٩٩٩٨٥	٠,٩٩٩٨٥	٠,٩٩٩٨٦	٠,٩٩٩٨٦	٠,٩٩٩٨٧	٠,٩٩٩٨٧	٠,٩٩٩٨٨	٠,٩٩٩٨٨	٠,٩٩٩٨٩
٣,٧	٠,٩٩٩٨٩	٠,٩٩٩٩٠	٠,٩٩٩٩٠	٠,٩٩٩٩٠	٠,٩٩٩٩١	٠,٩٩٩٩١	٠,٩٩٩٩٢	٠,٩٩٩٩٢	٠,٩٩٩٩٢	٠,٩٩٩٩٢
٣,٨	٠,٩٩٩٩٣	٠,٩٩٩٩٣	٠,٩٩٩٩٣	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٤	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٥
٣,٩	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٥	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٦	٠,٩٩٩٩٧	٠,٩٩٩٩٧

جدول (٤)



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (ن) لحساب قيم المساحات من اليسار

ن	٠,٠٠	٠,٠١	٠,٠٢	٠,٠٣	٠,٠٤	٠,٠٥	٠,٠٦	٠,٠٧	٠,٠٨	٠,٠٩
-٣,٩	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٤	٠,٠٠٠٠٣	٠,٠٠٠٠٣
-٣,٨	٠,٠٠٠٠٧	٠,٠٠٠٠٧	٠,٠٠٠٠٧	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٦	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٥	٠,٠٠٠٠٥
-٣,٧	٠,٠٠٠١١	٠,٠٠٠١٠	٠,٠٠٠١٠	٠,٠٠٠١٠	٠,٠٠٠٠٩	٠,٠٠٠٠٩	٠,٠٠٠٠٨	٠,٠٠٠٠٨	٠,٠٠٠٠٨	٠,٠٠٠٠٨
-٣,٦	٠,٠٠٠١٦	٠,٠٠٠١٥	٠,٠٠٠١٥	٠,٠٠٠١٤	٠,٠٠٠١٤	٠,٠٠٠١٣	٠,٠٠٠١٣	٠,٠٠٠١٢	٠,٠٠٠١٢	٠,٠٠٠١١
-٣,٥	٠,٠٠٠٢٣	٠,٠٠٠٢٢	٠,٠٠٠٢٢	٠,٠٠٠٢١	٠,٠٠٠٢٠	٠,٠٠٠١٩	٠,٠٠٠١٩	٠,٠٠٠١٨	٠,٠٠٠١٧	٠,٠٠٠١٧
-٣,٤	٠,٠٠٠٣٤	٠,٠٠٠٣٢	٠,٠٠٠٣١	٠,٠٠٠٣٠	٠,٠٠٠٢٩	٠,٠٠٠٢٨	٠,٠٠٠٢٧	٠,٠٠٠٢٦	٠,٠٠٠٢٥	٠,٠٠٠٢٤
-٣,٣	٠,٠٠٠٤٨	٠,٠٠٠٤٧	٠,٠٠٠٤٥	٠,٠٠٠٤٣	٠,٠٠٠٤٢	٠,٠٠٠٤٠	٠,٠٠٠٣٩	٠,٠٠٠٣٨	٠,٠٠٠٣٦	٠,٠٠٠٣٥
-٣,٢	٠,٠٠٠٦٩	٠,٠٠٠٦٦	٠,٠٠٠٦٤	٠,٠٠٠٦٢	٠,٠٠٠٦٠	٠,٠٠٠٥٨	٠,٠٠٠٥٦	٠,٠٠٠٥٤	٠,٠٠٠٥٢	٠,٠٠٠٥٠
-٣,١	٠,٠٠٠٩٧	٠,٠٠٠٩٤	٠,٠٠٠٩٠	٠,٠٠٠٨٧	٠,٠٠٠٨٤	٠,٠٠٠٨٢	٠,٠٠٠٧٩	٠,٠٠٠٧٦	٠,٠٠٠٧٤	٠,٠٠٠٧١
-٣,٠	٠,٠٠١٣٥	٠,٠٠١٣١	٠,٠٠١٢٦	٠,٠٠١٢٢	٠,٠٠١١٨	٠,٠٠١١٤	٠,٠٠١١١	٠,٠٠١٠٧	٠,٠٠١٠٤	٠,٠٠١٠٠
-٢,٩	٠,٠٠١٨٧	٠,٠٠١٨١	٠,٠٠١٧٥	٠,٠٠١٦٩	٠,٠٠١٦٤	٠,٠٠١٥٩	٠,٠٠١٥٤	٠,٠٠١٤٩	٠,٠٠١٤٤	٠,٠٠١٣٩
-٢,٨	٠,٠٠٢٥٦	٠,٠٠٢٤٨	٠,٠٠٢٤٠	٠,٠٠٢٣٣	٠,٠٠٢٢٦	٠,٠٠٢١٩	٠,٠٠٢١٢	٠,٠٠٢٠٥	٠,٠٠١٩٩	٠,٠٠١٩٣
-٢,٧	٠,٠٠٣٤٧	٠,٠٠٣٣٦	٠,٠٠٣٢٦	٠,٠٠٣١٧	٠,٠٠٣٠٧	٠,٠٠٢٩٨	٠,٠٠٢٨٩	٠,٠٠٢٨٠	٠,٠٠٢٧٢	٠,٠٠٢٦٤
-٢,٦	٠,٠٠٤٦٦	٠,٠٠٤٥٣	٠,٠٠٤٤٠	٠,٠٠٤٢٧	٠,٠٠٤١٥	٠,٠٠٤٠٢	٠,٠٠٣٩١	٠,٠٠٣٧٩	٠,٠٠٣٦٨	٠,٠٠٣٥٧
-٢,٥	٠,٠٠٦٢١	٠,٠٠٦٠٤	٠,٠٠٥٨٧	٠,٠٠٥٧٠	٠,٠٠٥٥٤	٠,٠٠٥٣٩	٠,٠٠٥٢٣	٠,٠٠٥٠٨	٠,٠٠٤٩٤	٠,٠٠٤٨٠
-٢,٤	٠,٠٠٨٢٠	٠,٠٠٧٩٨	٠,٠٠٧٧٦	٠,٠٠٧٥٥	٠,٠٠٧٣٤	٠,٠٠٧١٤	٠,٠٠٦٩٥	٠,٠٠٦٧٦	٠,٠٠٦٥٧	٠,٠٠٦٣٩
-٢,٣	٠,٠١٠٧٢	٠,٠١٠٤٤	٠,٠١٠١٧	٠,٠٠٩٩٠	٠,٠٠٩٦٤	٠,٠٠٩٣٩	٠,٠٠٩١٤	٠,٠٠٨٨٩	٠,٠٠٨٦٦	٠,٠٠٨٤٢
-٢,٢	٠,٠١٣٩٠	٠,٠١٣٥٥	٠,٠١٣٢١	٠,٠١٢٨٧	٠,٠١٢٥٥	٠,٠١٢٢٢	٠,٠١١٩١	٠,٠١١٦٠	٠,٠١١٣٠	٠,٠١١٠١
-٢,١	٠,٠١٧٨٦	٠,٠١٧٤٣	٠,٠١٧٠٠	٠,٠١٦٥٩	٠,٠١٦١٨	٠,٠١٥٧٨	٠,٠١٥٣٩	٠,٠١٥٠٠	٠,٠١٤٦٣	٠,٠١٤٢٦
-٢,٠	٠,٠٢٢٧٥	٠,٠٢٢٢٢	٠,٠٢١٦٩	٠,٠٢١١٨	٠,٠٢٠٦٨	٠,٠٢٠١٨	٠,٠١٩٧٠	٠,٠١٩٢٣	٠,٠١٨٧٦	٠,٠١٨٣١
-١,٩	٠,٠٢٨٧٢	٠,٠٢٨٠٧	٠,٠٢٧٤٣	٠,٠٢٦٨٠	٠,٠٢٦١٩	٠,٠٢٥٥٩	٠,٠٢٥٠٠	٠,٠٢٤٤٢	٠,٠٢٣٨٥	٠,٠٢٣٣٠
-١,٨	٠,٠٣٥٩٣	٠,٠٣٥١٥	٠,٠٣٤٣٨	٠,٠٣٣٦٢	٠,٠٣٢٨٨	٠,٠٣٢١٦	٠,٠٣١٤٤	٠,٠٣٠٧٤	٠,٠٣٠٠٥	٠,٠٢٩٣٨
-١,٧	٠,٠٤٤٥٧	٠,٠٤٣٦٣	٠,٠٤٢٧٢	٠,٠٤١٨٢	٠,٠٤٠٩٣	٠,٠٤٠٠٦	٠,٠٣٩٢٠	٠,٠٣٨٣٦	٠,٠٣٧٥٤	٠,٠٣٦٧٣
-١,٦	٠,٠٥٤٨٠	٠,٠٥٣٧٠	٠,٠٥٢٦٢	٠,٠٥١٥٥	٠,٠٥٠٥٠	٠,٠٤٩٤٧	٠,٠٤٨٤٦	٠,٠٤٧٤٦	٠,٠٤٦٤٨	٠,٠٤٥٥١
-١,٥	٠,٠٦٦٨١	٠,٠٦٥٥٢	٠,٠٦٤٢٦	٠,٠٦٣٠١	٠,٠٦١٧٨	٠,٠٦٠٥٧	٠,٠٥٩٣٨	٠,٠٥٨٢١	٠,٠٥٧٠٥	٠,٠٥٥٩٢
-١,٤	٠,٠٨٠٧٦	٠,٠٧٩٢٧	٠,٠٧٧٨٠	٠,٠٧٦٣٦	٠,٠٧٤٩٣	٠,٠٧٣٥٣	٠,٠٧٢١٥	٠,٠٧٠٧٨	٠,٠٦٩٤٤	٠,٠٦٨١١
-١,٣	٠,٠٩٦٨٠	٠,٠٩٥١٠	٠,٠٩٣٤٢	٠,٠٩١٧٦	٠,٠٩٠١٢	٠,٠٨٨٥١	٠,٠٨٦٩١	٠,٠٨٥٣٤	٠,٠٨٣٧٩	٠,٠٨٢٢٦
-١,٢	٠,١١٥٠٧	٠,١١٣١٤	٠,١١١٢٣	٠,١٠٩٣٥	٠,١٠٧٤٩	٠,١٠٥٦٥	٠,١٠٣٨٣	٠,١٠٢٠٤	٠,١٠٠٢٧	٠,٠٩٨٥٣
-١,١	٠,١٣٥٦٧	٠,١٣٣٥٠	٠,١٣١٣٦	٠,١٢٩٢٤	٠,١٢٧١٤	٠,١٢٥٠٧	٠,١٢٣٠٢	٠,١٢١٠٠	٠,١١٩٠٠	٠,١١٧٠٢
-١,٠	٠,١٥٨٦٦	٠,١٥٦٢٥	٠,١٥٣٨٦	٠,١٥١٥١	٠,١٤٩١٧	٠,١٤٦٨٦	٠,١٤٤٥٧	٠,١٤٢٣١	٠,١٤٠٠٧	٠,١٣٧٨٦
-٠,٩	٠,١٨٤٠٦	٠,١٨١٤١	٠,١٧٨٧٩	٠,١٧٦١٩	٠,١٧٣٦١	٠,١٧١٠٦	٠,١٦٨٥٣	٠,١٦٦٠٢	٠,١٦٣٥٤	٠,١٦١٠٩
-٠,٨	٠,٢١١٨٦	٠,٢٠٨٩٧	٠,٢٠٦١١	٠,٢٠٣٢٧	٠,٢٠٠٤٥	٠,١٩٧٦٦	٠,١٩٤٨٩	٠,١٩٢١٥	٠,١٨٩٤٣	٠,١٨٦٧٣
-٠,٧	٠,٢٤١٩٦	٠,٢٣٨٨٥	٠,٢٣٥٧٦	٠,٢٣٢٧٠	٠,٢٢٩٦٥	٠,٢٢٦٦٣	٠,٢٢٣٦٣	٠,٢٢٠٦٥	٠,٢١٧٧٠	٠,٢١٤٧٦
-٠,٦	٠,٢٧٤٢٥	٠,٢٧٠٩٣	٠,٢٦٧٦٣	٠,٢٦٤٣٥	٠,٢٦١٠٩	٠,٢٥٧٨٥	٠,٢٥٤٦٣	٠,٢٥١٤٣	٠,٢٤٨٢٥	٠,٢٤٥١٠
-٠,٥	٠,٣٠٨٥٤	٠,٣٠٥٠٣	٠,٣٠١٥٣	٠,٢٩٨٠٦	٠,٢٩٤٦٠	٠,٢٩١١٦	٠,٢٨٧٧٤	٠,٢٨٤٣٤	٠,٢٨٠٩٦	٠,٢٧٧٦٠
-٠,٤	٠,٣٤٤٥٨	٠,٣٤٠٩٠	٠,٣٣٧٢٤	٠,٣٣٣٦٠	٠,٣٢٩٩٧	٠,٣٢٦٣٦	٠,٣٢٢٧٦	٠,٣١٩١٨	٠,٣١٥٦١	٠,٣١٢٠٧
-٠,٣	٠,٣٨٢٠٩	٠,٣٧٨٢٨	٠,٣٧٤٤٨	٠,٣٧٠٧٠	٠,٣٦٦٩٣	٠,٣٦٣١٧	٠,٣٥٩٤٢	٠,٣٥٥٦٩	٠,٣٥١٩٧	٠,٣٤٨٢٧
-٠,٢	٠,٤٢٠٧٤	٠,٤١٦٨٣	٠,٤١٢٩٤	٠,٤٠٩٠٥	٠,٤٠٥١٧	٠,٤٠١٢٩	٠,٣٩٧٤٣	٠,٣٩٣٥٨	٠,٣٨٩٧٤	٠,٣٨٥٩١
-٠,١	٠,٤٦٠١٧	٠,٤٥٦٢٠	٠,٤٥٢٢٤	٠,٤٤٨٢٨	٠,٤٤٤٣٣	٠,٤٤٠٣٨	٠,٤٣٦٤٤	٠,٤٣٢٥١	٠,٤٢٨٥٨	٠,٤٢٤٦٥
-٠,٠	٠,٥٠٠٠٠	٠,٤٩٦٠١	٠,٤٩٢٠٢	٠,٤٨٨٠٣	٠,٤٨٤٠٥	٠,٤٨٠٠٦	٠,٤٧٦٠٨	٠,٤٧٢١٠	٠,٤٦٨١٢	٠,٤٦٤١٤

جدول (٥)

الوحدة الخامسة

المتباينات والبرمجة الخطية

Inequalities and Linear Programming

مشروع الوحدة: أفضل مردود من الحملة الإعلانية

١ مقدمة المشروع: تعتبر البرمجة الخطية من الوسائل المهمة لتحقيق أفضل النتائج عند استخدامها في مواقف حياتية واقعية، مثل كيفية الحصول على أكبر ربح عند مبيع أي منتج أو تخفيض كلفة إنتاج سلعة معينة. لذا دخلت البرمجة الخطية كوسيلة أساسية في مجالات العلوم، والصناعة، والتسويق، ...

٢ الهدف: إيجاد أكبر عدد من الأشخاص استمعوا إلى الإعلان أو شاهدوه وقد تناول الترويج لمبيع سلعة معينة عبر أجهزة الإعلام المسموعة (راديو) والمرئية (التلفاز).

٣ اللوازم: آلة حاسبة مبرمجة - ورق رسم بياني - مسطرة - حاسوب (اختياري).

٤ أسئلة حول التطبيق:

أطلقت إحدى المؤسسات التجارية حملة إعلانية لتسويق سلعة معينة وذلك عبر أجهزة الإعلام المسموعة (الراديو) والمرئية (التلفاز)، حيث توقعت هذه المؤسسة أن يشارك ٦٠ جهازًا مسموعًا ومرئيًّا على الأقل. على أن يكون عدد الأجهزة المسموعة المشاركة على الأقل مثلي عدد الأجهزة المرئية. إذا كانت كلفة الإعلان المسموع ٦ دنانير كويتية وكلفة الإعلان المرئي ٢٤ دينارًا كويتيًّا وقد وضعت المؤسسة ميزانية إجمالية للإعلان قيمتها ١٠٨٠ دينارًا كويتيًّا. وقدرت أن يكون عدد مستعمي كل جهاز مسموع ٢٠٠٠ مستمع وعدد مشاهدي كل جهاز مرئي ١٥٠٠ مشاهد.

فما عدد كل وسيلة إعلانية (مرئية ومسموعة) يتوجب اعتمادها للقيام بهذه المهمة وإيصال هذا الإعلان إلى أكبر عدد ممكن من المستهلكين؟

لنأخذ س عدد الأجهزة المسموعة (راديو) المشاركة في الإعلان، ص عدد الأجهزة المرئية (تلفاز) المشاركة في الإعلان.

أ اكتب متباينة خطية تبيّن توقعات الأجهزة المشاركة في الإعلان.

ب اكتب متباينة خطية تبيّن العلاقة المتوقعة لعدد بث الإعلانات بين الأجهزة المسموعة والمرئية.

جـ اكتب معادلة تبيّن العلاقة بين عدد المستمعين الإجمالي وعدد المشاهدين الإجمالي.

د اكتب نظام المتباينات والمعادلات التي حصلت عليها وأضف س $\geq$ ٠، ص $\geq$ ٠.

هـ مثّل على نظام إحداثي متعامد المتباينات التي حصلت عليها، ثم حدّد منطقة الحل.

و أوجد في منطقة الحل قيمة (س، ص) التي تحقق أكبر عدد من المستمعين والمشاهدين.

٥ التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يعكس الجهد في عملك، وطريقة حصولك على الإجابة، ويتضمن الحسابات والرسم البياني.

دروس الوحدة

٥-١ المتباينات	٥-٢ البرمجة الخطية
(٥-١ - أ) منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًّا	

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- حل المعادلات.
- تحديد النقاط في المستوى الإحداثي.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل المتباينات من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًّا.
- إيجاد منطقة الحل المشتركة لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًّا.

المصطلحات الأساسية

المتباينات - منطقة الحل - متغير بياني - برمجة خطية - منطقة الحل المشترك - الشروط (القيود) - متغيرات القرار - دالة الهدف.

أضف إلى معلوماتك

إن أهمية حل المتباينات يكمن في حل المسائل وأنظمة البرمجة الخطيّة، وهي تعتبر مهمة في اتخاذ القرارات في العمليّات الاقتصادية، التجارية، الزراعية، الصناعية... بحيث يجب أن تحاكي عدة شروط لتحقيق أفضل النتائج الممكنة.

ففي الزراعة مثلًا، المطلوب زيادة الإنتاج، وخفض التكلفة بأقل مساحة. أما في الصناعة فالمطلوب زيادة الإنتاج، وخفض التكلفة، وتحقيق أعلى نسبة أرباح.

وفي التجارة، المطلوب إمكانية المفاضلة بين عرضين أو سلعتين من النوع نفسه بحيث يتمكن المستهلك من اختيار الأفضل.

٥ ــ ١

المتباينات

Inequalities

سوف تتعلم

- حل متباينات من الدرجة الأولى.
- إيجاد منطقة الحل المشترك لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى.

دعنا نفكر ونتناقش

تريد شراء سيارة ثمنها أقل من ٥ ٦٩٥ دينارًا كويتيًّا وذلك بعد إضافة ضريبة المبيعات بقيمة ٥٪ على ثمنها. وتريد أن تكون كلفة استهلاكها للوقود أقل من ٥٧٠ دينارًا كويتيًّا لمسافة الـ ٩٠ ٠٠٠ كيلومتر التي من المرتقب أن تقطعها السنة المقبلة.

تقدر أن يكون معدل كلفة الوقود ٠,٠٦٥ دينار كويتي في اللتر الواحد.

أي سيارة تستوفي شروطك بشكل أفضل؟ وضّح ذلك.

السيارة	أ	ب	ج	د	هـ	و	ز	ح
ثمن السيارة (بالدينار الكويتي)	٥ ٦٩٢ دينارًا كويتيًّا	٤ ٦٨٠ دينارًا كويتيًّا	٥ ٤٨٠ دينارًا كويتيًّا	٥ ٢٥٠ دينارًا كويتيًّا	٥ ٤١٠ دينار كويتيّ	٦ ٤٦٥ دينارًا كويتيًّا	٥ ٥٥٠ دينارًا كويتيًّا	٥ ٤٠٥ دينارًا كويتيًّا
كمية الوقود المستهلكة (كم/لتر)	١٠,٦ كم/لتر	١١,٤ كم/لتر	٩,٣ كم/لتر	٩ كم/لتر	٨ كم/لتر	٧,٢ كم/لتر	١٢,٣ كم/لتر	٦ كم/لتر

نعلم أن س > ٥ جملة رياضية تسمى متباينة من الدرجة الأولى في متغير واحد هو س.

وأن س + ص ≤ ٣ جملة رياضية تسمى متباينة من الدرجة الأولى في متغيرين هما س، ص. ولحل هذه المتباينات يلزمنا مراجعة بعض خواص التباين.

خواص التباين

إذا كانت س، ص، ع أعدادًا حقيقية وكان س < ص فإن:

١ س + ع < ص + ع ∀ س ، ص ، ع ∈ ح

٢ س ع < ص ع ∀ س ، ص ∈ ح ، ع > ٠

٣ س ع > ص ع ∀ س ، ص ∈ ح ، ع < ٠

مثال (١)

أوجد مجموعة حل المتباينات التالية ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقيّة.

أ ٢س − ٣ ≤ ٥

ب ٥ − ٣س ≤ ٧

جـ −٢ < ٧س − ٥ ≤ ٣

الحل:

أ ٢س − ٣ ≤ ٥

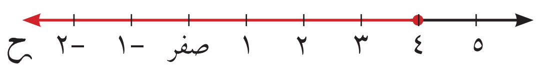
٢س − ٣ + ٣ ≤ ٥ + ٣   بإضافة ٣ إلى الطرفين

٢س ≤ ٨

س ≤ ٤   بضرب الطرفين في $\frac{١}{٢}$

∴ م . ح . = (−∞، ٤]

التمثيل على خط الأعداد الحقيقيّة



ب ٥ − ٣س ≤ ٧

−٥ + ٥ − ٣س ≤ −٥ + ٧   بإضافة −٥

−٣س ≤ ٢

س ≥ $\frac{-٢}{٣}$ بالضرب في − $\frac{١}{٣}$

∴ م . ح . = [− $\frac{٢}{٣}$ ، ∞)

التمثيل على خط الأعداد الحقيقيّة

جـ −٢ < ٧س − ٥ ≤ ٣

− ٢ + ٥ < ٧س − ٥ + ٥ ≤ ٣ + ٥   بإضافة +٥

٣ < ٧س ≤ ٨

$\frac{٣}{٧}$ < س ≤ $\frac{٨}{٧}$ بالضرب في $\frac{١}{٧}$

∴ م . ح . = ($\frac{٣}{٧}$ ، $\frac{٨}{٧}$]

التمثيل على خط الأعداد الحقيقيّة

حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية ومثّل مجموعة الحل على خط الأعداد الحقيقيّة.

أ ٧ + ٢س ≥ ٤

ب −٤ < ٢س + ١ ≤ ٥

جـ ٢ − س ≤ ٨

(٥–١–أ) منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًا

Graphically Solution Region For First Degree Inequality in Two Variables

نعلم أن المتباينة من الدرجة الأولى في متغيرين تأخذ أحد الأشكال التالية:

أ س + ب ص > جـ

أ س + ب ص ≥ جـ

أ س + ب ص < جـ

أ س + ب ص ≤ جـ

حيث أ، ب ∈ ح − {٠} ، جـ ∈ ح بينما س، ص متغيران من الدرجة الأولى.

وتعرف منطقة الحل لأي من المتباينات السابقة بأنها جميع النقاط (س، ص) في المستوى الإحداثي التي تحقق هذه المتباينة.

مثال (٢)

بيّن أيًّا من النقاط التالية: أ(١، ١)، ب(−١، ١)، جـ(١، −١) تحقق المتباينة: ٢س − ٣ص ≥ ١

الحل:

بالتعويض بإحداثيا النقطة (س، ص) في الطرف الأيمن من المتباينة يمكن الحصول على النقاط التي تحقق المتباينة

∵ أ(١، ١) ، ٢س − ٣ص ≥ ١

بالتعويض في الطرف الأيمن

∴ ٢س − ٣ص = ٢ × ١ − ٣ × ١

= ٢ − ٣ = −١

وحيث −١ ≥ ١

∴ النقطة أ(١، ١) تحقق المتباينة.

أي أن النقطة أ(١، ١) تقع في منطقة حل المتباينة: ٢س − ٣ص ≥ ١

∵ ب(−١، ١) ، ٢س − ٣ص ≥ ١

بالتعويض في الطرف الأيمن

∴ ٢س − ٣ص = ٢ × (−١) − ٣ × ١

= −٥

وحيث −٥ ≥ ١

∴ ب(−١، ١) تحقق المتباينة.

أي أن النقطة ب(−١، ١) تقع في منطقة حل المتباينة: ٢س − ٣ص ≥ ١

∵ جـ(١، −١) ، ٢س − ٣ص ≤ ١

بالتعويض في الطرف الأيمن

∴ ٢س − ٣ص = ٢ × ١ − ٣ × (−١)

= ٥

وحيث إن ٥ ≰ ١

∴ جـ(١، −١) لا تحقق المتباينة.

أي أن النقطة جـ(١، −١) لا تقع في منطقة حل المتباينة: ٢س − ٣ص ≤ ١

حاول أن تحل

٢ بيّن أيًّا من النقاط التالية: أ(١، −١)، ب(٢، ٠)، جـ(−١، ١) تحقق المتباينة: ٥س − ٢ص > ٧

عند إيجاد منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى بيانيًّا في متغيرين سوف نحتاج إلى ما يسمى بخط الحدود وهو عبارة عن المستقيم أس + ب ص = جـ الذي يمكن استنتاجه من إحدى المتباينات السابقة.

وسنمثّل خط الحدود بمستقيم متصل في حالة أي من المتباينتين:

أس + ب ص ≥ جـ ، أس + ب ص ≤ جـ

ونمثّل خط الحدود بمستقيم متقطع في حالة أي من المتباينتين:

أس + ب ص > جـ ، أس + ب ص < جـ

مثال (٣)

ارسم خط الحدود لكلّ من:

أ ٢س + ٥ص ≥ ٥

ب ٣س + ٢ص > ٦

الحل:

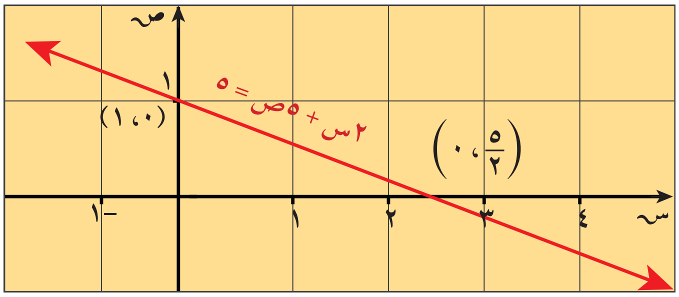
أ لرسم خط الحدود للمتباينة: ٢س + ٥ص ≥ ٥

١ نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: ٢س + ٥ص = ٥

٢ نرسم الخط المستقيم الذي يمثّل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول.

س	٠	$\frac{٥}{٢}$	٥
ص	١	٠	−١
(س، ص)	(٠، ١)	$\left(\frac{٥}{٢}، ٠\right)$	(٥، −١)

فيكون على الصورة:



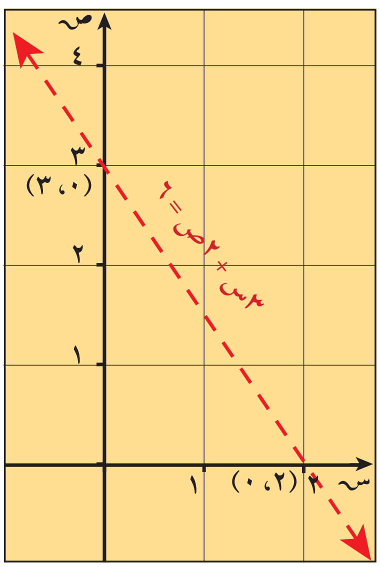
ب لرسم خط الحدود للمتباينة: ٣س + ٢ص > ٦

١ نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: ٣س + ٢ص = ٦

٢ نرسم الخط المستقيم المتقطع الذي يمثّل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول:

س	٠	٢	٣
ص	٣	٠	$-١\frac{١}{٢}$

فيكون على الصورة:



حاول أن تحل

٣ ارسم خط الحدود لكل من:

أ س + ص > ٦

ب ٥س + ٢ص ≥ ٢٠

مثال (٤)

ارسم خط الحدود لكل من:

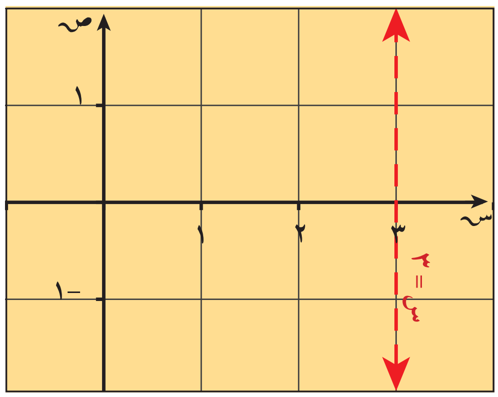
أ س > ٣

ب ص ≥ −٢

الحل:

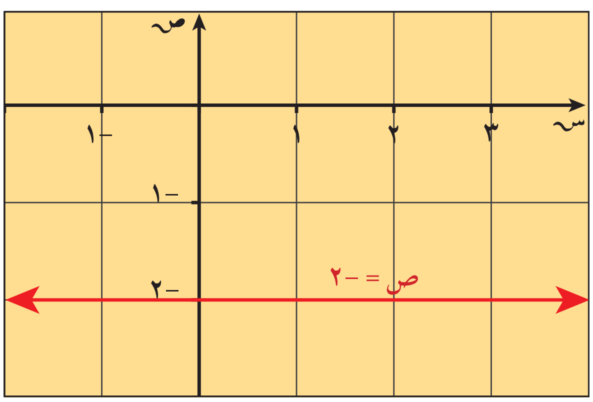
أ المعادلة المناظرة هي: س = ٣

ويكون الرسم التالي:



ب المعادلة المناظرة هي: ص = −٢

ويكون الرسم التالي:



حاول أن تحل

٤ ارسم خط الحدود لكل من:

أ ص > ٣

ب س ≥ −٤

خطوات إيجاد منطقة الحل لمتباينة من الدرجة الأولى بيانيًا

Steps to Find Graphically Solution Region For First Degree Inequality

١ نرسم خط الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتصل في حالة (≤ أو ≥) والخط المتقطع في حالة (< أو >).

٢ نقوم بتحديد المنطقة التي تمثل جانب منطقة حل المتباينة، ولتحديد هذا الجانب نختار أي نقطة من أحد جانبي خط الحدود ونعوض بها في المتباينة، إذا نتج عن ذلك عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل، لكن إذا نتج عن ذلك عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل.

٣ في حالة (≤ أو ≥) تتكوّن منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على خط الحدود بالإضافة إلى جميع النقاط الواقعة إلى جانب منطقة الحل.

وفي حالة (< أو >) تتكوّن منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على جانب منطقة الحل.

٤ نظلّل المنطقة التي تمثّل منطقة حل المتباينة.

مثال (٥)

مثّل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة: ٣س + ص ≤ ٦.

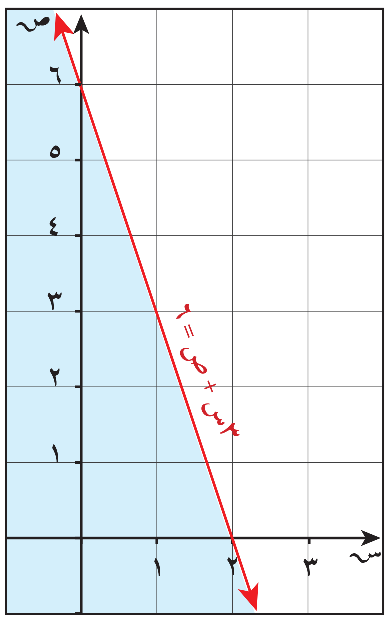
الحل:

نرسم خط الحدود للمتباينة: ٣س + ص ≤ ٦

نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: ٣س + ص = ٦

نرسم الخط المستقيم المتصل الذي يمثّل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول.

س	٠	٢	٣
ص	٦	٠	٣-



عند تحديد جانب منطقة الحل نعوض بنقطة الأصل (٠، ٠) في المتباينة (حيث خط الحدود لا يمر بنقطة الأصل).

٣ × ٠ + ٠ ≤ ٦ ⟵ ٠ ≤ ٦ عبارة صحيحة

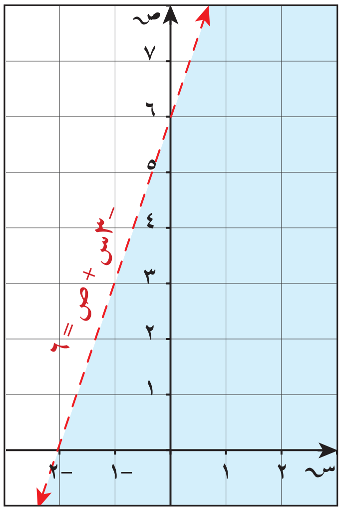
∴ نظلّل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل (٠، ٠).

حاول أن تحل

٥ **مثّل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة: ٤س + ص ≤ ٨**

مثال (٦)

مثّل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة: $-٣س + ص < ٦$



الحل:

نرسم خط الحدود للمتباينة: $-٣س + ص < ٦$

نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: $-٣س + ص = ٦$

نرسم الخط المستقيم المتقطع الذي يمثّل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول.

س	٠	-٢	-١
ص	٦	٠	٣

لتحديد جانب منطقة الحل نعوّض بنقطة الأصل (٠، ٠) في المتباينة

$-٣ \times ٠ + ٠ < ٦$

$٠ < ٦$ عبارة صحيحة

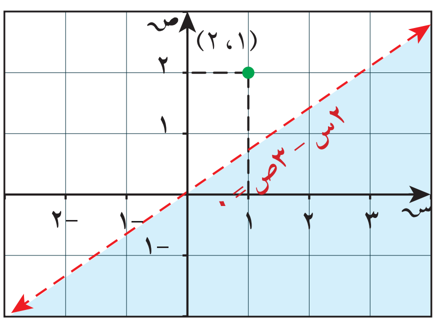
∴ نظلّل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.

حاول أن تحل

٦ مثّل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة: $-٢س + ص < ٤$

مثال (٧)

مثّل بيانيًا منطقة الحل للمتباينة: $٢س - ٣ص > ٠$



الحل:

نرسم خط الحدود للمتباينة: $٢س - ٣ص > ٠$

نوجد المعادلة المناظرة للمتباينة وهي: $٢س - ٣ص = ٠$

نرسم الخط المستقيم المتقطع الذي يمثّل المعادلة المناظرة بعد تكوين الجدول.

س	٠	$\frac{٣}{٢}$	٣
ص	٠	١	٢

لتحديد جانب منطقة الحل نعوّض بنقطة غير نقطة الأصل لا يمر بها المستقيم ولتكن (١، ٢).

٢ × ١ − ٣ × ٢ > ٠

٢ − ٦ > ٠

−٤ > ٠

وهي عبارة غير صحيحة.

∴ نظلّل الجانب الذي لا يحوي النقطة (١ ، ٢)

حاول أن تحل

٧ مثّل بيانيًّا منطقة الحل للمتباينة: س − ٥ص ≥ ٠

منطقة الحل المشترك لمتباينتين أو أكثر من الدرجة الأولى في متغيرين بيانيًّا

مثال (٨)

مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

س + ص ≤ ٦

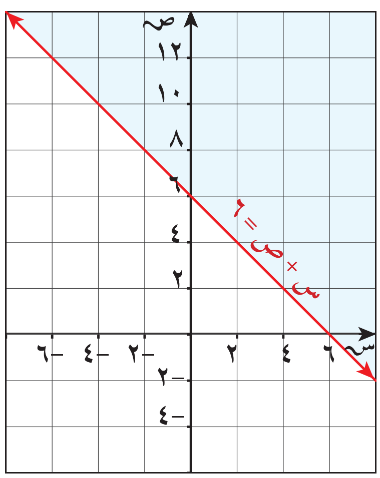
٥س + ٢ص ≥ ١٠

الحل:

١ نرسم خط الحدود للمتباينة: س + ص ≤ ٦

من المعادلة المناظرة: س + ص = ٦

س	٠	٣	٦
ص	٦	٣	٠



نعوّض بنقطة الأصل (٠ ، ٠) في المتباينة فنجد أن:

٠ + ٠ ≤ ٦

٠ ≤ ٦

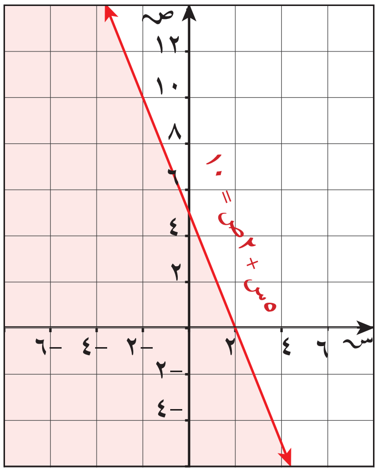
عبارة غير صحيحة

∴ نظلّل المنطقة التي لا تحوي نقطة الأصل.

٢ نرسم خط الحدود للمتباينة: ٥س + ٢ص ≤ ١٠

من المعادلة المناظرة: ٥س + ٢ص = ١٠

س	٠	٢	−٢
ص	٥	٠	١٠

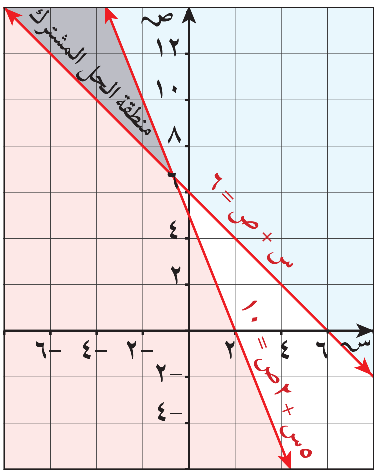


نعوّض بنقطة الأصل في المتباينة: ٥س + ٢ص ≤ ١٠

نجد أن ٠ ≤ ١٠ عبارة صحيحة

∴ نظلّل المنطقة التي تحوي نقطة الأصل.

٣ نظلّل منطقة الحل المشترك



حاول أن تحل

٨ مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

س − ٢ص > ٢

٢س + ٣ص ≤ ٦

مثال (٩)

مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

٢س − ص ≥ −٣

٢ص > − س + ١

الحل:

١ نرسم خط الحدود للمتباينة: ٢س − ص ≥ −٣

من المعادلة المناظرة: ٢س − ص = −٣

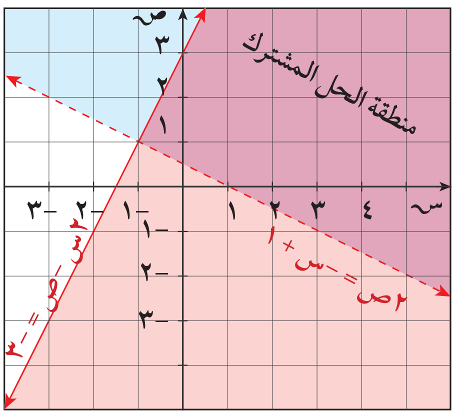
س	−١ ½	−١	٠
ص	٠	١	٣

نعوّض بنقطة الأصل (٠، ٠) في المتباينة

فنجد أن ٠ ≥ −٣

وهي عبارة صحيحة.

نظلّل المنطقة التي تحوي النقطة (٠، ٠)



٢ نرسم خط الحدود للمتباينة: ٢ص > − س + ١

من المعادلة المناظرة: ٢ص = −س + ١

س	−١	٠	١
ص	١	½	٠

نعوّض بالنقطة (٠، ٠) في المتباينة

نجد ٠ > ١

وهي عبارة غير صحيحة.

∴ نظلّل المنطقة التي لا تحوي (٠، ٠).

٣ نحدّد منطقة الحل المشترك.

حاول أن تحل

٩ مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينتين:

س + ٢ص ≤ ٤

ص ≥ −س − ١

استخدام نظام متباينات Using System of Inequalities

يمكنك أحيانًا أن تنمذج حالة من الواقع الحياتي باستخدام نظام من المتباينات الخطية. غالبًا ما تكون حلول هذه المسائل أعدادًا كليّة، لذا فإن بعض النقاط الواقعة في منطقة الحل المشترك ستحل المسألة.

مثال (١٠)

ينظم المركز الثقافي في مدينتك حفلًا ترفيهيًّا من أجل جمع على الأقل مبلغ ٣٠ ٠٠٠ دينار كويتيّ لقسم الخدمات الاجتماعية.

تبلغ أسعار التذاكر ٢٠ دينارًا كويتيًّا لمقاعد الصفوف الخلفية و٣٠ دينارًا كويتيًّا لمقاعد الصفوف الأمامية. إذا كان لدى المركز ٥٠٠ تذكرة للصفوف الأمامية و ١٢٥٠ تذكرة للصفوف الخلفية، فكم تذكرة من كل نوع على المركز أن يبيع؟

الحل:

اربط ٢٠ × مقعدًا خلفيًّا + ٣٠ × مقعدًا أماميًّا ≤ ٣٠ ٠٠٠

مقعدًا خلفيًا ≥ ١٢٥٠

حدّد افترض أن س = عدد تذاكر المقاعد الخلفية المباعة.

وأن ص = عدد تذاكر المقاعد الأمامية المباعة.

اكتب ٢٠س + ٣٠ص ≤ ٣٠ ٠٠٠

ص ≥ ٥٠٠

س ≥ ١٢٥٠

لاحظ أن س، ص هما عددان كليان لأنهما يمثلان عدد المقاعد (يحددان معًا الربع الأول).

معادلات خط الحدود المناظرة للمتباينات الثلاث هي:

٢٠س + ٣٠ص = ٣٠ ٠٠٠

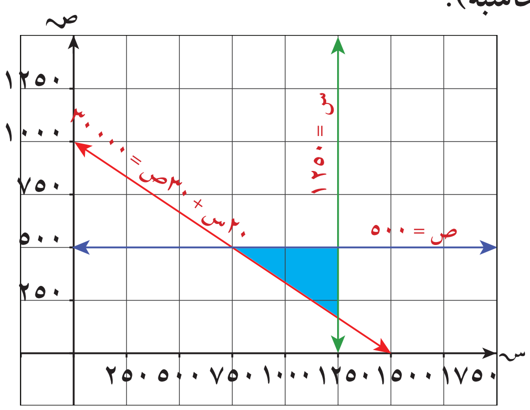
ص = ٥٠٠

س = ١٢٥٠

معلومة:

تمثل النقاط الواقعة في منطقة الحل المشترك تذاكر المقاعد الأمامية والخلفية التي تبلغ قيمتها الإجمالية ٣٠ ٠٠٠ دينار كويتيّ أو أكثر.

مثّل المتباينات بيانيًا (يمكنك استخدام آلتك الحاسبة).



المنطقة المظللة بالأزرق هي منطقة الحل.

تحقق:

إذا باع المركز الثقافي ٩٠٠ تذكرة للمقاعد الخلفية و ٤٥٠ تذكرة للمقاعد الأمامية، فهل سيحقق المركز الثقافي هدفه؟

٢٠(٩٠٠) + ٣٠(٤٥٠) ≤؟ ٣٠٠٠٠

١٨٠٠٠ + ١٣٢٥٠ ≤؟ ٣٠٠٠٠

٣١٢٥٠ ≤ ٣٠٠٠٠ ✔

٥٠٠ ≤؟ ٤٥٠ ، ١٢٥٠ ≤؟ ٩٠٠

٥٠٠ ≤ ٤٥٠ ✔ ، ١٢٥٠ ≤ ٩٠٠ ✔

بما أنه يجب أن يكون عدد المقاعد عددًا كليًّا، فلا يعتبر حلًّا إلّا النقاط التي تقع في منطقة الحل المشترك والتي هي أعدادًا كليّة.

حاول أن تحل

١٠ يتقاضى مطعم لبيع الفطائر دينارًا كويتيًّا واحدًا عن كل صنف من الخضار يضاف إلى الطبقة العلوية، و٢ دينار كويتيّ عن كل صنف من اللحوم يضاف إلى الطبقة العلوية. إذا كنت تريد أن تضيف ٥ أصناف على الأقل إلى الطبقة العلوية من فطيرتك ولديك ١٠ دنانير كويتية لتنفقها على الأصناف المضافة إلى الطبقة العلوية للفطيرة.
فعلى كم صنف من كل نوع من الطبقات العلوية يمكنك أن تحصل على الأكثر؟

مثال (١١)

مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

س + ص ≥ ١

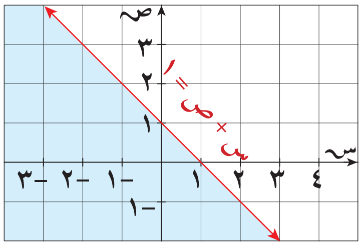
س − ص < ٢

٣س + ٤ص < ١٢

الحل:

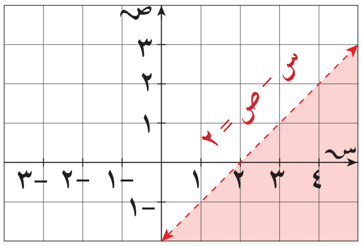
١ معادلات خط الحدود للمتباينات الثلاث هي:

س + ص ≥ ١ المعادلة المناظرة هي: س + ص = ١



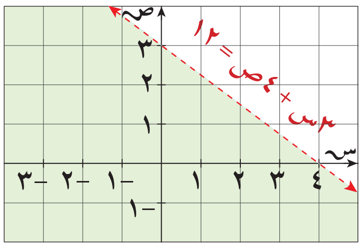
س	١−	٠	١
ص	٢	١	٠

س − ص > ٢ المعادلة المناظرة هي: س − ص = ٢

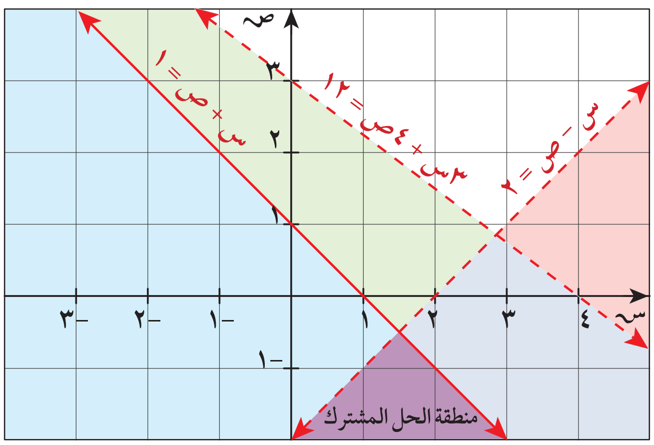


س	٠	١	٢
ص	٢−	١−	٠

٣س + ٤ص < ١٢ المعادلة المناظرة هي: ٣س + ٤ص = ١٢



س	٠	٢	٤
ص	٣	$1\frac{1}{2}$	٠



حاول أن تحل

١١ مثّل بيانيًّا منطقة الحل المشترك للمتباينات التالية:

س + ص ≥ ٢

س − ص ≤ ٣

ص ≥ ٠

البرمجة الخطية

Linear Programming

سوف تتعلم

- البرمجة الخطية وأساليبها.
- اختيار الحل الأمثل.

دعنا نفكر ونتناقش

لا تريد أن تنفق أكثر من ٤٠ دينارًا كويتيًا على شراء ١٥ شتلة بندورة كحد أقصى.

تريد أن تزيد كيلوجرامات البندورة التي ستحصل عليها للحد الأقصى.

ما عدد شتلات البندورة من كل نوع التي عليك شراؤها؟

شتلات بندورة ذات حبة كبيرة المحصول المضمون من البندورة ٨ كجم/ شتلة	٢ دينار كويتي/ شتلة
شتلات بندورة ذات حبة صغيرة المحصول المضمون من البندورة ١٠ كجم/ شتلة	٣ دنانير كويتية/ شتلة

البرمجة الخطية Linear Programming

تقدمت وسائل التحليل الرياضي للمشاكل الإدارية والاقتصادية تقدمًا كبيرًا وتعتبر البرمجة الخطية إحدى هذه الوسائل وقد استخدمت كلمة البرمجة كأداة تهدف إلى استغلال الموارد المتاحة لتحقيق أكبر عائد ممكن بأقل تكلفة ممكنة.

وتهدف البرمجة الخطية إلى الإجابة بأسلوب التحليل الرياضي على بعض الأسئلة وحل المشاكل بما يحقق أكبر ربح ممكن أو أقل تكلفة ممكنة في ظل البنود والشروط القائمة.

وعمومًا فإن أداء أي عمل بأفضل الوسائل يعين في البحث عن الحدود الدنيا أو القصوى.

فعندما تتعلق المشكلة بالتكاليف فإن الهدف يكون الوصول إلى الحد الأدنى للتكلفة وإذا تعلّق الأمر بالأرباح فإن الهدف يكون الوصول للحد الأعلى للربح.

تعريف: البرمجة الخطية

هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية. وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًا.

ونلاحظ أن القيمة العظمى أو القيمة الصغرى للدالة ذات الصلة تكون غالبًا عند أحد رؤوس منطقة الحل.

ويمكن تمثيل المشاكل من حياتنا اليومية على شكل علاقات خطية متعددة.

تقود هذه العلاقات الخطية إلى ما يسمى بالبرمجة الخطية التي تعطي حلًا للمشكلة.

أساسيات البرمجة الخطية

تشترك كل مسائل البرمجة الخطية في العناصر الأساسية التالية:

١ **متغيرات القرار:**

هي المتغيرات التي يجب إيجاد قيمها لاتخاذ القرار.

٢ **دالة الهدف:**

هي الدالة الخطية التي يرغب متخذ القرار في تعظيمها أو تصغيرها.
(أي إيجاد أكبر قيمة لها أو أصغر قيمة لها) للحصول على أكبر قيمة للأرباح أو أصغر قيمة للتكلفة.

٣ **القيود (الشروط):**

هي مجموعة المتباينات أو المعادلات الواجب تحقيقها من قبل متخذ القرار.

وبالتالي فإن الهدف من البرمجة الخطية يكون إيجاد الحل الأمثل على النحو التالي:

١ يتم تعظيم أو تصغير دالة خطية في متغيرات القرار. وهذه الدالة تسمى **دالة الهدف**.

٢ تحقق قيم متغيرات القرار مجموعة من القيود يمكن صياغتها على شكل متباينات أو معادلات خطية.

فضاء الحلول الممكنة

يتكوّن فضاء الحلول الممكنة من جميع النقاط التي تحقق جميع القيود. بمعنى آخر فإن منطقة الحل المشترك للقيود الموضوعة للمسألة هي فضاء الحلول الممكنة.

تعريف: الحل الأمثل

يعرف الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية لتعظيم (أو تصغير) دالة الهدف بأنه نقطة في فضاء الحلول الممكنة تكون عندها دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن.

صياغة المشكلة

تعتبر صياغة المشكلة الخطوة الأولى والأساسية لحل أي مشكلة، وتحدّد طريقة الحل في وضع المشكلة على شكل نموذج رياضي يعبر عنها، ومن ثم يحل هذا النموذج بالأساليب المختلفة.
يمكن اتباع الخطوات التالية في بناء النموذج الرياضي:

١ **تحديد المتغيرات التي تحتاج إلى قيم مثلى ولتكن $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$**

٢ **يتم تحديد هدف المشكلة ونعبّر عنه رياضيًّا باستخدام المتغيرات $س_١$، $س_٢$، ....، $س_ن$ بما يسمى دالة الهدف ويرمز لها بالرمز هـ.**

٣ **تحديد القيود وتمثيلها على شكل متباينات باستخدام المتغيرات.**

٤ نضع شرط عدم السلبية أي أن جميع المتغيرات يجب أن تكون أكبر من أن تساوي الصفر.

٥ نقوم بتحريك دالة الهدف هـ = أس + ب ص بشكل متوازٍ في اتجاه زيادتها (تباعديًّا من نقطة الأصل) ونتوقف عندما نصل إلى قيمة $هـ_ع$ التي إذا زدنا عنها يكون خط دالة الهدف بالكامل خارج فضاء الحلول الممكنة.

(كلما تغيرت قيمة هـ حصلنا على خطوط متوازية).

ملاحظات مهمة:

١ الحل الأمثل يكون أحد أركان المضلع (وفي هذه الحالة يكون الحل الأمثل وحيد).

٢ إذا كانت دالة الهدف موازية لأحد أضلاع مضلع فضاء الإمكانات، فإن الحل الأمثل يكون عدد غير منته من النقاط (الحلول).

٣ بعد احتساب دالة الهدف هـ عند كل ركن من أركان مضلع فضاء الحلول الممكنة، يكون الحل الأمثل عند إحداثيات الركن الذي تكون قيمة هـ أكبر (أو أصغر) ما يمكن.

ملاحظة:

سنكتفي بالحالة التي يكون فيها الحل الأمثل حلًّا وحيدًا،

وسنكتفي أيضًا بطريقة التعويض في الحل للحصول على الحل الأمثل.

خطوات إيجاد الحل الأمثل في البرمجة الخطية

١ تحديد المتغيرات.

٢ كتابة نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.

٣ تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا.

٤ إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

٥ كتابة دالة الهدف هـ (الدالة الخطية) التي نريد إيجاد قيمتها الصغرى أو العظمى.

٦ التعويض بإحداثيات الرؤوس في الدالة.

٧ اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.

مثال (١)

أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ص ≤ ٤ ، ٣س + ص ≤ ٦

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ = ٥س + ٣ص أكبر ما يمكن.

الحل:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان معًا الربع الأول

خط الحدود: س + ص = ٤

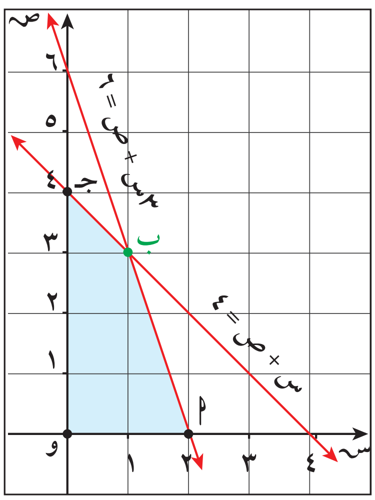
س	٠	٤
ص	٤	٠

يمر بالنقطتين (٠، ٤) ، (٤، ٠)

خط الحدود: ٣س + ص = ٦

س	٠	٢
ص	٦	٠

يمر بالنقطتين (٠، ٦) ، (٢، ٠)



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب جـ و،

حيث أ(٢، ٠) ، ب (١، ٣) ، جـ(٠، ٤) ، و(٠، ٠)

∵ دالة الهدف هـ = ٥س + ٣ ص

بالتعويض بالنقاط للحصول على المطلوب

∴ هـ أ = ٥ × ٢ + ٣ × ٠ = ١٠

∴ هـ ب = ٥ × ١ + ٣ × ٣ = ١٤

∴ هـ جـ = ٥ × ٠ + ٣ × ٤ = ١٢

∴ هـ و = ٥ × ٠ + ٣ × ٠ = صفر

∴ دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ب(١، ٣) وقيمتها هـ = ١٤

حاول أن تحل

١ أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ٦ ، ٣س + ٢ص ≤ ١٢

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أكبر ما يمكن حيث هـ = ٦ س + ٤ ص.

مثال (٢)

أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠، س + ٢ص ≤ ٤ ، س + ص ≤ ٣

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن حيث هـ = ٥س + ٤ص.

الحل:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان معًا الربع الأول

$هـ_١$: س + ٢ص = ٤

س	٠	٤
ص	٢	٠

يمر بالنقطتين (٠، ٢) ، (٤، ٠)

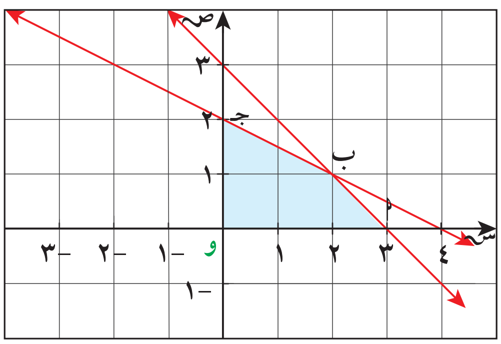
$هـ_٢$: س + ص = ٣

س	٠	٣
ص	٣	٠

يمر بالنقطتين (٠، ٣) ، (٣، ٠)

مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أ ب جـ و

حيث أ(٣، ٠) ، ب (٢، ١) ، جـ (٠، ٢) ، و(٠، ٠)



∵ دالة الهدف هـ = ٥ س + ٤ ص

بالتعويض بالنقاط للحصول على المطلوب

∵ هـ = ٥ س + ٤ ص

∴ $هـ_{أ}$ = ٥ × ٣ + ٤ × ٠ = ١٥

$هـ_{ب}$ = ٥ × ٢ + ٤ × ١ = ١٤

$هـ_{جـ}$ = ٥ × ٠ + ٤ × ٢ = ٨

$هـ_{و}$ = ٥ × ٠ + ٤ × ٠ = ٠

∴ دالة الهدف هـ تكون أصغر ما يمكن عند النقطة و(٠، ٠) وقيمتها تساوي صفر.

حاول أن تحل

٢ أوجد بيانيًّا مجموعة حل المتباينات التالية:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٢ص ≤ ١١ ، ٣ س + ٢ ص ≤ ١٢

ثم أوجد من مجموعة الحل قيم (س، ص) التي تجعل دالة الهدف هـ أصغر ما يمكن حيث هـ = ٤س + ص.

مثال (٣)

مطحن لديه ٩٠ كجم من الذرة، ١٢٠ كجم من القمح، ينتج نوعين من الدقيق ويضعهما في أكياس بحيث يلزم الكيس من النوع الأول كيلوجرام واحد من الذرة، ٢ كجم من القمح، يلزم لكيس من النوع الثاني ٣ كجم من الذرة، ٢ كجم من القمح.

أوجد عدد الأكياس من كل نوع التي يجب أن ينتجها المطحن ليكون دخله أكبر ما يمكن علمًا بأن ثمن الكيس من النوع الأول ٣ دنانير، ومن النوع الثاني ٥ دنانير.

الحل: لتكن س عدد الأكياس من النوع الأول، ص عدد الأكياس من النوع الثاني

	النوع الأول س	النوع الثاني ص	الكمية المتاحة
ذرة	١	٣	٩٠
قمح	٢	٢	١٢٠
الثمن	٣	٥	

∵ س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ، س + ٣ص ≤ ٩٠ ، ٢ س + ٢ ص ≤ ١٢٠

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ يحددان الربع الأول

خط الحدود: س + ٣ص = ٩٠

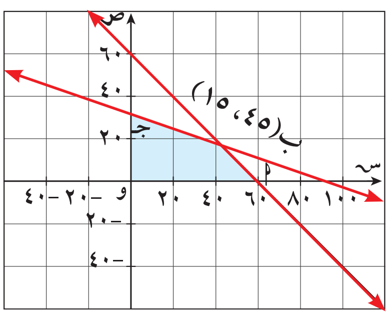
س	٠	٩٠
ص	٣٠	٠

يمر بالنقطتين (٠، ٣٠) ، (٩٠، ٠)

خط الحدود: ٢س + ٢ص = ١٢٠

س	٠	٦٠
ص	٦٠	٠

يمر بالنقطتين (٠، ٦٠) ، (٦٠، ٠)



مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل المقابل المضلع أب جـ و

حيث أ(٦٠، ٠) ، ب(٤٥، ١٥) ، جـ(٠، ٣٠) ، و(٠، ٠)

∵ دالة الهدف هـ = ٣س + ٥ص

بالتعويض بالنقاط للحصول على المطلوب

هـ$_{أ}$ = ٣ × ٦٠ + ٥ × ٠ = ١٨٠

هـ$_{ب}$ = ٣ × ٤٥ + ٥ × ١٥ = ٢١٠

هـ$_{جـ}$ = ٣ × ٠ + ٥ × ٣٠ = ١٥٠

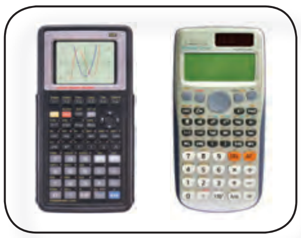
هـ$_{و}$ = ٣ × ٠ + ٥ × ٠ = ٠

∴ دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة ب(٤٥، ١٥) وقيمتها هـ = ٢١٠ دنانير

حاول أن تحل

٣ خياط لديه ٩٠ مترًا من القطن و١٢٠ مترًا من الصوف، ينتج نوعين من الثياب بحيث يلزم لعمل ثوب من النوع الأول متر واحد من القطن و٣ أمتار من الصوف وللنوع الثاني متران من القطن ومتران من الصوف. إذا كان ثمن الثوب من النوع الأول ٣٠ دينارًا وثمن الثوب من النوع الثاني ٤٠ دينارًا، فأوجد عدد الثياب من كل نوع التي يجب أن ينتجها الخياط ليكون دخله أكبر ما يمكن.

مثال (٤)



تنتج إحدى الشركات الإلكترونية آلات حاسبة علمية وبيانية وتتوقع أن يكون الطلب على الأقل يوميًّا ٨٠ آلة حاسبة علمية و٩٠ آلة حاسبة بيانية ولكن لأسباب فنية لا تستطيع الشركة إنتاج أكثر من ١٨٠ آلة حاسبة علمية و١٦٠ آلة حاسبة بيانية في اليوم الواحد.

تبيع الشركة على الأقل ٢٠٠ آلة حاسبة من النوعين في اليوم الواحد. علمًا أن كل آلة حاسبة علمية تباع بخسارة دينار واحد وكل آلة حاسبة بيانية تباع بربح قدره ٣ دنانير، فما العدد من كل نوع الذي يجب أن تنتجه الشركة في اليوم الواحد لتحقق أكبر ربح ممكن؟

الحل:

ليكن: س عدد الآلات الحاسبة العلمية المنتجة في اليوم

ص عدد الآلات الحاسبة البيانية المنتجة في اليوم

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ،

س ≥ ٨٠ ، ص ≥ ٩٠ ،

س ≤ ١٨٠ ، ص ≤ ١٦٠ ،

س + ص ≥ ٢٠٠

هـ = −س + ٣ص (دالة الهدف)

فنحصل على المتباينات التالية:

س ≥ ٠ ، ص ≥ ٠ ،

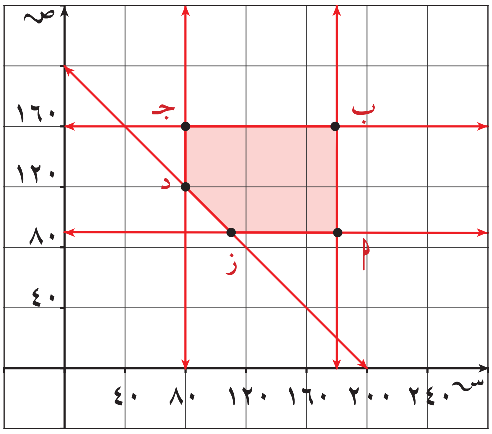
٨٠ ≤ س ≤ ١٨٠ ،

٩٠ ≤ ص ≤ ١٦٠ ،

س + ص ≥ ٢٠٠

دالة الهدف: هـ = −س + ٣ص

نقاط الحدود لمنطقة الحل:



أ(١٨٠، ٩٠) ، ب(١٨٠، ١٦٠) ، جـ(٨٠، ١٦٠) ، د(٨٠، ١٢٠) ، ز(١١٠، ٩٠)

هـ$_{أ}$ = −١٨٠ + ٣(٩٠) = ٩٠

هـ$_{ب}$ = −١٨٠ + ٣(١٦٠) = ٣٠٠

هـ$_{جـ}$ = −٨٠ + ٣(١٦٠) = ٤٠٠

هـ$_{د}$ = −٨٠ + ٣(١٢٠) = ٢٨٠

هـ$_{ز}$ = −١١٠ + ٣(٩٠) = ١٦٠

∴ دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة جـ(٨٠ ، ١٦٠) وقيمتها هـ = ٤٠٠

أي يجب أن تنتج الشركة في اليوم الواحد ٨٠ آلة حاسبة علمية و١٦٠ آلة حاسبة بيانية فتكون دالة الهدف قيمتها ٤٠٠ دينار.

حاول أن تحل

٤ في اختبار من فئتين أ، ب ينال الطالب ٨ درجات عن كل إجابة صحيحة في الفئة أ و١٢ درجة عن كل إجابة صحيحة في الفئة ب. الحد الأقصى من الزمن لكل سؤال في الفئة أ هو ٥ دقائق وفي الفئة ب هو ٨ دقائق على ألّا يتجاوز الزمن الكلي ١٢٠ دقيقة ويسمح للطالب بالإجابة عن ١٨ سؤالًا على الأكثر. على افتراض أن كافة الإجابات صحيحة، فما عدد الإجابات الصحيحة من كل فئة التي يجب أن يجيب عنها الطالب المشارك ليحقق أعلى درجة؟

المرشد لحل المسائل

نوعية الهواء: أرادت إحدى المدن أن تغرس أشجار القيقب والراتنج (التنوب:نوع من الأشجار الصنوبرية) لامتصاص ثاني أكسيد الكربون.

إذا كان لديها ٢١٠٠ دينار كويتي لتنفقها على زراعة أشجار القيقب والراتنج. وتريد غرس مساحة ٤٥٠٠ متر.

شجرة القيقب　　شجرة الراتنج

أ استخدم البيانات من الجدول. ثم اكتب نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.

ب اكتب دالة الهدف.

ج مثّل نظام المتباينات بيانيًّا وأوجد إحداثيات الرؤوس.

د كم شجرة من كل نوع على المدينة أن تغرس لتزيد من عملية امتصاص ثاني أكسيد الكربون للحد الأقصى؟

بيانات حول أشجار القيقب والراتنج

	الراتنج	القيقب
كلفة غرس الأشجار	٣٠ دينارًا كويتيًّا	٤٠ دينارًا كويتيًّا
المساحة المطلوبة	٦٠ مترًا	٩٠ مترًا
امتصاص ثاني أكسيد الكربون	٦٥٠ كجم/ السنة	٣٠٠ كجم/ السنة

الحل: لنفترض أن: س = عدد أشجار الراتنج

م = عدد أشجار القيقب

أ نظام المتباينات الخطية:

٣٠س + ٤٠م ≤ ٢١٠٠

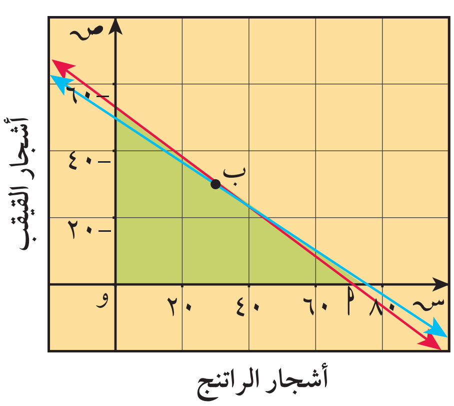
٦٠س + ٩٠م ≤ ٤٥٠٠

س ≥ ٠ ؛ م ≥ ٠

ب دالة الهدف:

هـ = ٦٥٠س + ٣٠٠م

علينا إيجاد قيم س، م التي تجعل دالة الهدف هـ أكبر ما يمكن.



ج مجموعة حل المتباينات تمثلها المنطقة المظللة بالشكل أب جـ و ،

حيث أ(٧٠، ٠) ، ب(٣٠، ٣٠) ، جـ(٠، ٥٠) ، و(٠، ٠)

د ∵ دالة الهدف هـ = ٦٥٠س + ٣٠٠م

$هـ_{أ}$ = ٦٥٠ × ٧٠ + ٣٠٠ × ٠ = ٤٥ ٥٠٠

$هـ_{ب}$ = ٦٥٠ × ٣٠ + ٣٠٠ × ٢٠ = ٢٨ ٥٠٠

$هـ_{جـ}$ = ٦٥٠ × ٠ + ٣٠٠ × ٥٠ = ١٥ ٠٠٠

$هـ_{و}$ = ٦٥٠ × ٠ + ٣٠٠ × ٠ = ٠

∴ دالة الهدف هـ تكون أكبر ما يمكن عند النقطة أ(٧٠، ٠) وقيمتها هـ = ٤٥ ٥٠٠

أي أنه لزيادة امتصاص ثاني أكسيد الكربون للحد الأقصى، علينا أن نغرس ٧٠ شجرة راتنج.

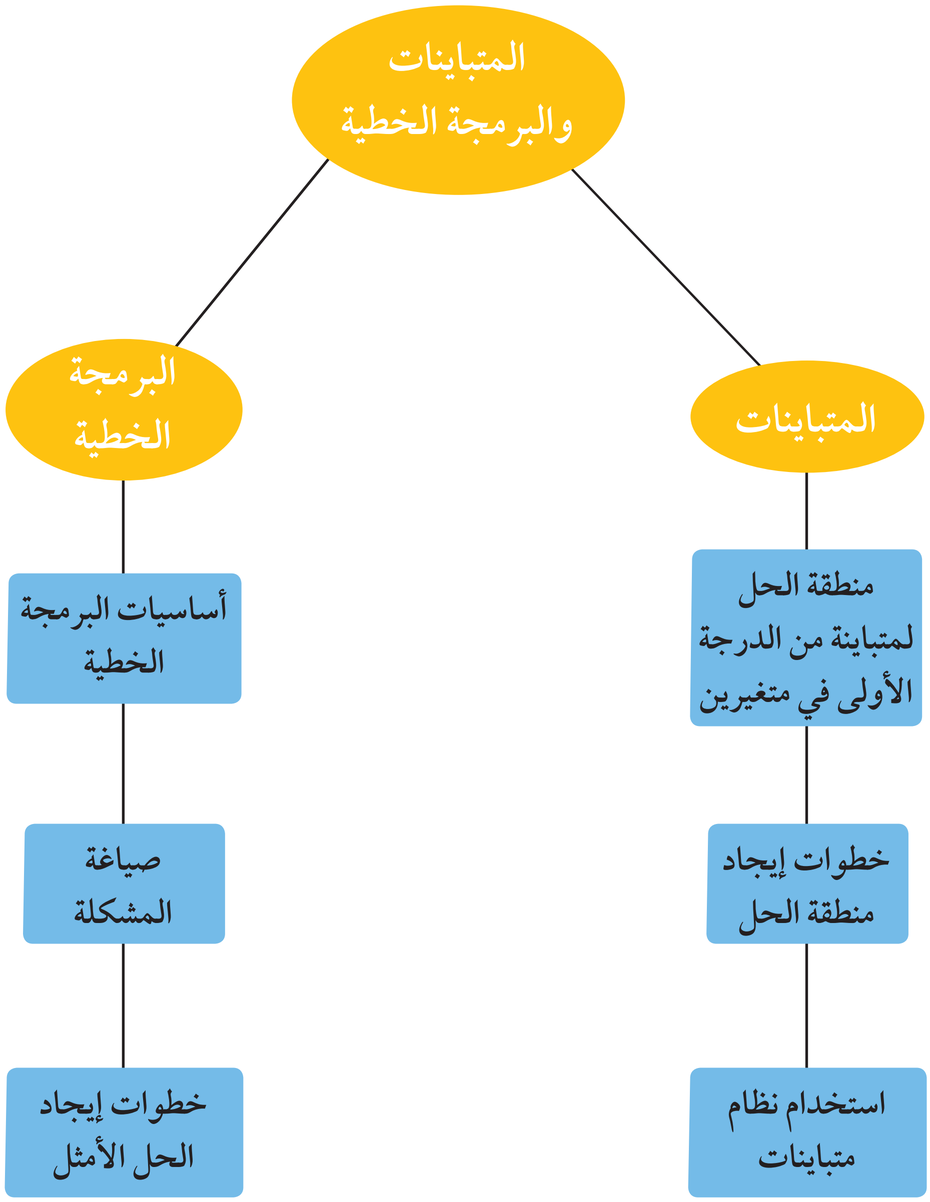
مسألة إضافية:

يقوم عالم أحياء بتطوير نوعين جديدين من البكتيريا. تنتج كل عينة من النوع الأول من البكتيريا أربع بكتيريا جديدة قابلة للنمو. فيما تنتج كل عينة من النوع الثاني ثلاث بكتيريا جديدة قابلة للنمو.

يجب إنتاج على الأقل ٢٤٠ بكتيريا جديدة قابلة للنمو من كلا النوعين. ويجب أن تكون ٣٠ عينة على الأقل من النوع الأول من العينات الأصلية، على ألا يتجاوز عددها الـ ٦٠. ولا يمكن أن يكون عدد العينات أكثر من ٧٠ عينة من النوع الثاني من العينات الأصلية. تبلغ كلفة عينة من النوع الأول ٥ دنانير كويتية، فيما تبلغ كلفة عينة من النوع الثاني ٧ دنانير كويتية.

كم عينة من النوع الثاني من البكتيريا على عالم الأحياء أن يستخدم لتقليص الكلفة للحد الأدنى؟

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- خواص التباين:

إذا كانت س، ص، ع أعدادًا حقيقية وكان س < ص فإن:

١ س + ع < ص + ع   ∀ س ، ص ، ع ∈ ح

٢ س ع < ص ع   ∀ س ، ص ∈ ح ، ع > ٠

٣ س ع > ص ع   ∀ س ، ص ∈ ح ، ع < ٠

- أشكال المتباينة من الدرجة الأولى:

أس + ب ص < جـ

أس + ب ص ≤ جـ

أس + ب ص > جـ

أس + ب ص ≥ جـ

- خط الحدود هو المستقيم أس + ب ص = جـ الذي يمكن استنتاجه من إحدى المتباينات.
- يمثل خط الحدود بمستقيم متصل في حالة أي من المتباينتين:

أس + ب ص ≤ جـ ، أس + ب ص ≥ جـ

- يمثل خط الحدود بمستقيم متقطع في حالة أي من المتباينتين:

أس + ب ص < جـ ، أس + ب ص > جـ

- خطوات إيجاد منطقة الحل:

١ نرسم خط الحدود للمتباينة باستخدام الخط المتصل في حالة (≤ أو ≥) والخط المتقطع في حالة (< أو >).

٢ نقوم بتحديد المنطقة التي تمثل جانب منطقة حل المتباينة، ولتحديد هذا الجانب نختار أي نقطة من أحد جانبي خط الحدود ونعوض بها في المتباينة، إذا نتج عن ذلك عبارة صحيحة يكون هذا الجانب هو جانب منطقة الحل، لكن إذا نتج عن ذلك عبارة غير صحيحة يكون الجانب الآخر هو جانب منطقة الحل.

٣ في حالة (≤ أو ≥) تتكوّن منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على خط الحدود بالإضافة إلى جميع النقاط الواقعة إلى جانب منطقة الحل.

وفي حالة (< أو >) تتكوّن منطقة الحل من جميع النقاط الواقعة على جانب منطقة الحل.

٤ نظلّل المنطقة التي تمثّل منطقة حل المتباينة.

- البرمجة الخطية: هي طريقة لإيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة ما تحت قيود معينة كل منها عبارة عن متباينة خطية وذلك بعد تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا.
- الحل الأمثل: يعرف الحل الأمثل لمسألة البرمجة الخطية لتعظيم (أو تصغير) دالة الهدف بأنه نقطة في فضاء الحلول الممكنة التي تكون عندها دالة الهدف أكبر (أو أصغر) ما يمكن.
- خطوات إيجاد الحل الأمثل:

١ تحديد المتغيرات.

٢ كتابة نظام المتباينات الخطية الذي يمثل المسألة.

٣ تمثيل نظام المتباينات بيانيًّا.

٤ إيجاد إحداثيات رؤوس منطقة الحل.

٥ كتابة دالة الهدف هـ (الدالة الخطية) التي نريد إيجاد قيمتها الصغرى أو العظمى.

٦ التعويض بإحداثيات الرؤوس في الدالة.

٧ اختيار القيمة العظمى أو القيمة الصغرى وفقًا لما هو مطلوب في المسألة.