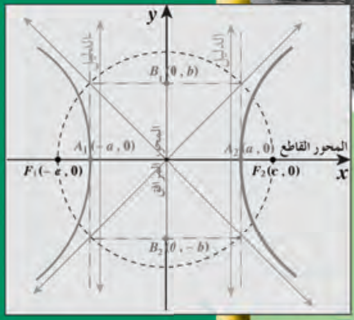
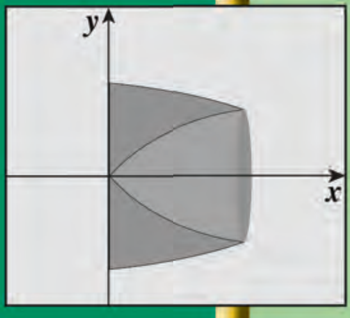
وزارة التربية

الرياضيات

كرّاسة التمارين





الصفّ الثاني عشر علمي

١٢

الفصل الدراسي الثاني

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

كرّاسة التمارين

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي		أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٩ - ١٤٤٠ هـ

٢٠١٨ - ٢٠١٩ م

الطبعة الأولى ٢٠١٤م
الطبعة الثانية ٢٠١٦م
٢٠١٨م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. صديقة أحمد صالح الأنصاري　　أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف
أ. مجدي محمد يس دراز　　أ. يحيى عبد السلام خالد عقل

أ. وضحى ابراهيم مزعل الدوسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤م

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

المحتويات

الوحدة الثامنة: الاحتمال

تمرَّنْ
5–1

التكامل غير المحدد

Indefinite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن: $F(x) = (3x+2)^5 + 7$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = 15(3x+2)^4$.

في التمرينين (3–2)، تحقّق من أن F هي مشتقّة عكسيّة للدالّة f حيث:

(2) $F(x) = \frac{1}{3}x^3 - x^2 + x - 10$

$f(x) = x^2 - 2x + 1$

(3) $F(x) = \sqrt{1+x^4}$

$f(x) = \frac{2x^3}{\sqrt{1+x^4}}$

في التمارين (14–4)، احسب التكامل.

(4) $\int (x^5 - 6x + 3)dx$

(5) $\int (3 - 6x^2)dx$

(6) $\int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}\, dx$

(7) $\int \left(x^3 - \frac{1}{x^3}\right)dx$

(8) $\int \frac{x^4 - 27x}{x^2 - 3x}dx$

(9) $\int (x-2)(2x+3)dx$

(10) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}dx$

(11) $\int \frac{x - \sqrt{x}}{x}dx$

(12) $\int \frac{5+2x}{\sqrt{x}}dx$

(13) $\int \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 dx$

(14) $\int (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[4]{x^3})dx$

(15) إذا كان $F(x) = \int (3x^2 - 5)dx$ وكان $F(2) = 3$، فأوجد $F(x)$.

(16) إذا كان $F(x) = \int (9x^2 - 4x + 5)dx$ وكان $F(-1) = 0$، فأوجد $F(x)$.

(17) **هامش الدخل.** افرض أنّ هامش الدخل عندما يباع x ألف وحدة هو:

$\frac{dr}{dx} = 3x^2 - 6x + 12$ (دينارًا لكل وحدة)

أوجد دالة الدخل $r(x)$ إذا كان $r(0) = 0$

(18) ألقيت كرة إلى الأعلى بسرعة ابتدائية 16 m/s من سطح برج ارتفاعه 115 m عن سطح الأرض.

(a) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى أعلى ارتفاع؟

(b) في أي زمن t سوف تصل الكرة إلى الأرض؟ (علمًا أن عجلة جاذبية الأرض $a(t) = 9.8\text{ m/s}^2$).

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $F(x) = x^{-3}$ هي مشتقة عكسية للدالة: $f(x) = -3x^{-4}$ (a) (b)

(2) $\int(-x^{-3}+x-1)dx = \frac{1}{2}x^{-2}+\frac{1}{2}x^{2}-x+C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{x}+C$ (a) (b)

(4) إذا كانت: $f'(x) = \frac{1}{x^2}+x$ ، $f(2) = 1$ ، فإن: $f(x) = -\frac{1}{x}+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$ (a) (b)

(5) إذا كانت: $F(0) = 400$ ، $F(x) = \int(3x^2-12x+15)dx$ ، فإن: $F(x) = x^3+6x^2+15x+400$

(a) (b)

في التمارين (12—6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int \frac{4}{3}\sqrt[3]{t^2}\,dt =$

(a) $\frac{3t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$

(b) $\frac{4t^{\frac{5}{3}}}{5}+C$

(c) $\frac{4}{3}\sqrt[3]{t^5}+C$

(d) $4\sqrt[3]{t^5}+C$

(7) $\int\left(\sqrt[3]{x^2}+\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)dx =$

(a) $\frac{3}{5}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}+5\right)+C$

(b) $\frac{3}{5}x^{\frac{2}{3}}\left(x^{-\frac{2}{3}}+5\right)+C$

(c) $\frac{5}{3}\sqrt[3]{x}\left(x^{\frac{4}{3}}+5\right)+C$

(d) $\frac{5}{3}x^{\frac{4}{3}}\left(x^{\frac{2}{3}}+5\right)+C$

(8) إذا كان: $x = -1$ ، $y = -5$ ، $\frac{dy}{dx} = x^{-\frac{2}{3}}$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\frac{x^2}{3}-\frac{14}{3}$

(b) $3x^{\frac{1}{3}}+2$

(c) $3x^{\frac{1}{3}}-2$

(d) $3x^{\frac{1}{3}}$

(9) $\int \frac{2x+3}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}}+\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}+C$

(b) $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

(c) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+6x^{\frac{1}{2}}+C$

(d) $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{6}x^{\frac{1}{2}}+C$

(10) $\int \sqrt{x}(2+x^2)dx =$

ⓐ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓑ $\frac{3}{4}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓒ $\frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

ⓓ $\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{7}{2}x^{\frac{7}{2}} + C$

(11) $\int \frac{2+\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt{x}}dx =$

ⓐ $x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓑ $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{7}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓒ $x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

ⓓ $4x^{\frac{1}{2}} + \frac{7}{6}x^{\frac{7}{6}} + C$

(12) $\int \left(\frac{x^2-4x+4}{x-2} + 2\right)^2 dx =$

ⓐ $x^2 + C$

ⓑ $2x + C$

ⓒ $\frac{x^2}{2} + 2x + C$

ⓓ $\frac{1}{3}x^3 + C$

التكامل بالتعويض

Integration by Substitution

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (12−1)، استخدم التعويض المناسب لإيجاد التكامل.

(1) $\int (2x-3)\sqrt{x^2-3x+5}\,dx$

(2) $\int (4x-5)^8\,dx$

(3) $\int (x+2)\sqrt[3]{x^2+4x-1}\,dx$

(4) $\int (x^2-1)\sqrt{x^3-3x+5}\,dx$

(5) $\int (x^2-2x)(x^3-3x^2+4)^5\,dx$

(6) $\int \frac{x^2}{\sqrt[3]{4+x^3}}\,dx$

(7) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{2-3x}}$

(8) $\int x(3x+2)^6\,dx$

(9) $\int \frac{x}{\sqrt{1+3x}}\,dx$

(10) $\int x^2\sqrt{x-1}\,dx$

(11) $\int x^3\sqrt{x^2-2}\,dx$

(12) $\int x^5\sqrt[3]{x^3+1}\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5−1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x(x^2-1)^{10}\,dx = \frac{1}{18}(x^2-1)^9 + C$ (a) (b)

(2) $\int (x+1)\sqrt[3]{x^2+2x+3}\,dx = \frac{3}{8}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^4} + C$ (a) (b)

(3) $\int \frac{dx}{\sqrt{3x-2}} = 2\sqrt{3x-2} + C$ (a) (b)

(4) $\int (2x^2-1)(2x^3-3x+4)^5\,dx = \frac{1}{18}(2x^3-3x+4)^6 + C$ (a) (b)

(5) $\int x\sqrt[3]{x+2}\,dx = \frac{3}{7}(x+2)^{\frac{7}{3}} - \frac{3}{2}(x+2)^{\frac{4}{3}} + C$ (a) (b)

في التمارين (12−6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int x(x^2+2)^7\,dx =$

(a) $\frac{1}{16}(x^2+2)^8 + C$

(b) $\frac{1}{4}(x^2+2)^8 + C$

(c) $\frac{1}{12}(x^2+2)^6 + C$

(d) $\frac{1}{3}(x^2+2)^6 + C$

(7) $\int \frac{x-1}{\sqrt{x-1}}dx =$

(a) $\frac{1}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(b) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{3}{2}} + C$

(c) $\frac{2}{3}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(d) $\frac{3}{2}(x-1)^{\frac{2}{3}} + C$

(8) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{3x+1}} =$

(a) $\frac{2}{9}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(b) $\frac{2}{3}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(c) $2(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(d) $\frac{1}{2}(3x+1)^{\frac{2}{3}} + C$

(9) $\int \frac{(2+\sqrt{x})^{12}}{\sqrt{x}}dx =$

(a) $\frac{13}{2}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(b) $\frac{2}{13}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(c) $\frac{1}{26}(2+\sqrt{x})^{13} + C$

(d) $\frac{1}{22}(2+\sqrt{x})^{11} + C$

(10) $\int \frac{(x+1)}{\sqrt[3]{x^2+2x+3}}dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

(b) $\frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

(c) $3\sqrt[3]{(x^2+2x+3)^2} + C$

(d) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{x^2+2x+3} + C$

(11) $\int \frac{x}{\sqrt{x+1}}dx =$

(a) $\frac{3}{2}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

(b) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{2}\sqrt{x+1} + C$

(c) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} - 2\sqrt{x+1} + C$

(d) $\frac{2}{3}\sqrt{(x+1)^3} + 2\sqrt{x+1} + C$

(12) إذا كانت: $F(x) = \int (x+1)(2x^2+4x-1)dx$ ، $F(-2) = \frac{9}{8}$، فإن: $F(x)$ تساوي:

(a) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + \frac{5}{4}$

(b) $\frac{1}{8}(2x^2+4x-1)^2 + 1$

(c) $\frac{1}{4}(2x^2+4x-1)^2 + 1$

(d) $4(2x^2+4x-1)^2 - 1$

تمرَّنْ
5–3

تكامل الدوال المثلثية

Integral of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أوجد قيمة التكامل.

(1) $\int (\sec x \tan x + \sin x)\,dx$

(2) $\int (\csc x \cot x + \sec^2 x)\,dx$

(3) $\int \left(\frac{-1}{x^2} + 5\sin 3x\right)dx$

(4) $\int \sin^4 x \cos x\,dx$

(5) $\int \cos^5 x \sin x\,dx$

(6) $\int x^2 \sin(x^3+1)\,dx$

(7) $\int \frac{\sin x}{\cos^3 x}\,dx$

(8) $\int \sec^3 x \tan x\,dx$

(9) $\int \csc^3 x \cot x\,dx$

(10) $\int \sqrt{\cot x}\,\csc^2 x\,dx$

(11) $\int \sqrt{\tan x}\,\sec^2 x\,dx$

(12) $\int \sqrt{1+\sin x}\,\cos x\,dx$

(13) $\int \frac{dx}{(\sin^2 x)\sqrt{1+\cot x}}$

(14) $\int \frac{dx}{(\cos^2 x)\sqrt{1+\tan x}}$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \sec^2 x\,dx = \tan x + C$ — (a) (b)

(2) $\int \csc^2 x\,dx = \cot x + C$ — (a) (b)

(3) $\left(F'(x) = \sec^2 x\ ,\ F\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1\right) \Longrightarrow F(x) = \tan x + 2$ — (a) (b)

(4) $(F'(x) = \cos x + \sin x\ ,\ F(\pi) = 1) \Longrightarrow F(x) = \sin x - \cos x$ — (a) (b)

(5) $(F'(x) = \sec x\ \tan x\ ,\ F(0) = 4) \Longrightarrow F(x) = \sec x + 3$ — (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الصورة العامة للمشتقة العكسية للدالة f حيث $f(x) = 8 + \csc x \cot x$ هي:

(a) $F(x) = 8x + \csc x + C$

(b) $F(x) = 8x - \cot x + C$

(c) $F(x) = 8x - \csc x + C$

(d) $F(x) = 8x + \cot x + C$

(7) $\int \csc(5x)\cot(5x)\,dx =$

(a) $\frac{1}{5}\csc(5x)+C$

(b) $\csc(5x)+C$

(c) $\frac{1}{5}\cot(5x)+C$

(d) $-\frac{1}{5}\csc(5x)+C$

(8) $\int \sqrt[3]{\cot x}\,\csc^2 x\,dx =$

(a) $\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

(b) $-\frac{3}{4}\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

(c) $-\frac{3}{4}\sqrt[4]{(\cot x)^3}+C$

(d) $3\sqrt[3]{(\cot x)^4}+C$

(9) إذا كانت $y_{\theta=0}=-3$, $\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta$ فإنّ y تساوي:

(a) $-\cos\theta$

(b) $2-\cos\theta$

(c) $-2-\cos\theta$

(d) $4-\cos\theta$

(10) $\int \sec^5 x\tan x\,dx =$

(a) $\frac{5}{3}\sec^5 x+C$

(b) $\frac{1}{5}\sec^6 x+C$

(c) $\frac{1}{5}\sec^5 x+C$

(d) $-\frac{5}{3}\sec^5 x+C$

(11) $\int \frac{\csc^2 x}{\sqrt[3]{2+\cot x}}\,dx =$

(a) $\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

(b) $-\frac{3}{2}(2+\cot x)^{\frac{2}{3}}+C$

(c) $-2\sqrt{2+\cot x}+C$

(d) $\frac{4}{3}(2+\cot x)^{\frac{4}{3}}+C$

(12) $\int \frac{\sin(4x)}{\cos^5(4x)}\,dx =$

(a) $-\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$

(b) $\frac{1}{16}\cos^{-4}(4x)+C$

(c) $-\cos^{-4}(4x)+C$

(d) $\cos^{-4}(4x)+C$

تمرَّنْ
5–4

الدوالّ الأسيّة واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—15)، أوجد $\frac{dy}{dx}$.

(1) $y = 7^x$
(2) $y = 5^{\sqrt{x+1}}$
(3) $y = 8^{\tan x}$
(4) $y = 2e^x$
(5) $y = e^{-x}$
(6) $y = 3e^{\frac{x}{5}}$
(7) $y = e^{x^2-x+1}$
(8) $y = e^{2\sqrt{x}+3}$
(9) $y = e^{\csc x}$
(10) $y = e^{x^4-5}$
(11) $y = \ln(x^3)$
(12) $y = \ln\left(\frac{1}{x^2}\right)$
(13) $y = \ln(x+2)$
(14) $y = \ln(2-\cos x)$
(15) $y = \ln(\ln x)$

في التمارين (16—27)، أوجد التكامل غير المحدد في كل مما يلي:

(16) $\int e^{0.1x}\,dx$
(17) $\int \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}\,dx$
(18) $\int (2x+1)e^{x^2+x+4}\,dx$
(19) $\int (x^2-2)e^{x^3-6x}\,dx$
(20) $\int \left(e^{0.5x} + \frac{0.5}{x}\right)dx$
(21) $\int \frac{e^x}{e^x+1}\,dx$
(22) $\int \frac{x+1}{x^2+2x+5}\,dx$
(23) $\int \frac{x^3-x}{x^4-2x^2}\,dx$
(24) $\int \frac{x^2+1}{x}\,dx$
(25) $\int \frac{2}{3x+1}\,dx$
(26) $\int (2\tan x - \csc^2 x)\,dx$
(27) $\int (\cot x + x^2)\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—6)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت: $y = 4^{x-2}$ فإن: $\frac{dy}{dx} = 4x$ — (a) (b)
(2) إذا كانت: $f(x) = e^{x^2}$ فإن: $f'(x) = 2xe^{2x}$ — (a) (b)
(3) إذا كانت: $g(x) = \ln(2x+2)$ فإن: $g'(x) = \frac{1}{2x+2}$ — (a) (b)
(4) إذا كانت: $y = x\ln x - x$ فإن: $y' = \ln x$ — (a) (b)
(5) $\int \frac{1}{2x}\,dx = \frac{\ln x}{2} + C$ — (a) (b)
(6) $\int \frac{1}{3x+1}\,dx = \ln(3x+1) + C$ — (a) (b)

في التمارين (14–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إذا كانت $y = e^{-5x}$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ e^{-5x}
ⓑ $-e^{-5x}$
ⓒ $-5e^{-5x}$
ⓓ $5e^{-5x}$

(8) إذا كانت $y = x^2 e^x - x\,e^x$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $e^x(x^2+x-1)$
ⓑ $e^x(x^2-x)$
ⓒ $2x\,e^x - e^x$
ⓓ $e^x(x^2+2x+1)$

(9) إذا كانت $y = (\ln x)^2$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $\frac{\ln x}{x}$
ⓑ $\frac{2\ln x}{x}$
ⓒ $\frac{x\ln x}{2}$
ⓓ $\frac{2\ln^2 x}{x}$

(10) إذا كانت $y = \ln\left(\frac{10}{x}\right)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $-\frac{10}{x}$
ⓑ $\frac{10}{x}$
ⓒ $\frac{1}{x}$
ⓓ $-\frac{1}{x}$

(11) إذا كانت $y = \ln(x^2+1)$، فإنّ $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

ⓐ $\frac{x}{x^2+1}$
ⓑ $\frac{2}{x^2+1}$
ⓒ $\frac{2x}{x^2+1}$
ⓓ $-\frac{2x}{x^2+1}$

(12) $\int \frac{2x}{x^2+1}\,dx =$

ⓐ $2\ln(x^2+1)+C$
ⓑ $\ln(x^2+1)+C$
ⓒ $\frac{x^2}{x^2+1}+C$
ⓓ $\frac{x}{\frac{1}{3}x^2+1}+C$

(13) $\int \frac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx =$

ⓐ $\frac{e^x-e^{-x}}{2}+C$
ⓑ $\frac{e^x+e^{-x}}{2}+C$
ⓒ $\frac{e^{-x}-e^x}{2}+C$
ⓓ $\frac{e^{2x}-e^{-2x}}{2}+C$

(14) $\int \frac{e^x}{e^x-4}\,dx =$

ⓐ $-\frac{1}{2}(e^x-4)+C$
ⓑ $\ln|e^x-4|+C$
ⓒ $-\ln|e^x-4|+C$
ⓓ $\frac{1}{2}\ln|e^x-4|+C$

تمرَّنْ
5–5

التكامل بالتجزيء

Integration by Parts

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (14–1)، أوجد التكامل.

(1) $\int x\cos(3x)\,dx$

(2) $\int x\sin(5x)\,dx$

(3) $\int x\,e^{x-3}\,dx$

(4) $\int (x-5)e^{x-5}\,dx$

(5) $\int \ln\sqrt[4]{x}\,dx$

(6) $\int \ln(2x-1)\,dx$

(7) $\int (2x+1)\ln(x+1)\,dx$

(8) $\int \frac{\ln(x)}{x^2}\,dx$

(9) $\int \frac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}\,dx$

(10) $\int x^2\ln x^2\,dx$

(11) $\int (x^2-2x)\cos x\,dx$

(12) $\int (x^2+3x)\sin x\,dx$

(13) $\int x^2\,e^{x+1}\,dx$

(14) $\int x^2\,e^{2x-3}\,dx$

(15) $\int (\ln(x))^2\,dx$

(16) $\int e^{2x}\sin x\,dx$

(17) $\int \sin(\ln x)\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int x\cos(2x)\,dx = \frac{1}{2}x\sin(2x)+\frac{1}{4}\cos 2x + C$ — (a) (b)

(2) $\int x\sin(\pi x)\,dx = -\frac{x}{\pi}\cos(\pi x)+\frac{1}{\pi^2}\sin(\pi x)+C$ — (a) (b)

(3) $\int x\,e^{6x}\,dx = \frac{1}{6}x\,e^{6x}-\frac{1}{36}e^{6x}+C$ — (a) (b)

(4) $\int x\,e^{-x}\,dx = -x\,e^{-x}+e^{-x}+C$ — (a) (b)

(5) $\int x\sec^2 x\,dx = x\tan x-\ln|\sec x|+C$ — (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\int (2x+1)\sin x\, dx$

(a) $(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(b) $-(2x+1)\cos x + 2\sin x + C$

(c) $-(x+1)\cos x - 2\sin x + C$

(d) $(2x+1)\cos x - \sin x + C$

(7) $\int x^2 \ln(x)\, dx =$

(a) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{3} + C$

(b) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

(c) $\frac{1}{3}x^3\ln(x) + \frac{x^3}{9} + C$

(d) $-\frac{1}{3}x^3\ln(x) - \frac{x^3}{9} + C$

في التمرينين (9–8)، إذا كان $\int (2x+1)\ln x\, dx = uv - \int v du$ فإن:

(8) $uv =$

(a) $(2x+1)\ln x$

(b) $2x\ln x$

(c) $\frac{2x+1}{2}\ln x$

(d) $x(x+1)\ln x$

(9) $\int v du =$

(a) $\frac{1}{2}x\ln x + C$

(b) $\frac{1}{2}x^2 + x + C$

(c) $(2x+1)\ln x + C$

(d) $\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 + C$

في التمرينين (11–10)، إذا كان $\int (3x-1)e^{3x+2}\, dx = uv - \int v du$ فإن:

(10) $uv =$

(a) $(3x-1)e^{3x+2}$

(b) $\frac{1}{3}(3x-1)e^{3x+2}$

(c) $(3x-1)e^{x+2}$

(d) $\frac{1}{3}(x-1)e^{3x+2}$

(11) $\int v du =$

(a) $-\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(b) $-e^{3x+2} + C$

(c) $\frac{1}{3}e^{3x+2} + C$

(d) $e^{3x+2} + C$

التكامل باستخدام الكسور الجزئية

Integration Using Partial Fractions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1—4)، أوجد الكسور الجزئيّة لكل دالة f مما يلي ثم أوجد $\int f(x)dx$.

(1) $f(x) = \dfrac{2}{(x-5)(x-3)}$

(2) $f(x) = \dfrac{1}{x^2+2x}$

(3) $f(x) = \dfrac{-x+10}{x^2+x-12}$

(4) $f(x) = \dfrac{12}{x^3+2x^2-3x}$

في التمارين (5—11)، أوجد:

(5) $\int \dfrac{x+17}{2x^2+5x-3}\,dx$

(6) $\int \dfrac{-6x+25}{x^3-6x^2+9x}\,dx$

(7) $\int \dfrac{3x^2-4x+3}{x^3-3x^2}\,dx$

(8) $\int \dfrac{x^2+3x+2}{(x-3)^2}\,dx$

(9) $\int \dfrac{2x^2+x+3}{x^2-1}\,dx$

(10) $\int \dfrac{x^3-2}{x^2+x}\,dx$

(11) $\int \dfrac{x^4-2x^3+x^2+2x-1}{x^2-2x+1}\,dx$

(12) لنأخذ: $f(x) = \dfrac{2x^4-5x^3-7x^2+32x-28}{x^3-2x^2-4x+8}$

(a) اكتب $f(x)$ على صورة $q(x)+\dfrac{r(x)}{h(x)}$، حيث درجة $r(x)$ أصغر من درجة $h(x)$.

(b) أوجد الكسور الجزئيّة للحدودية النسبية $\dfrac{r(x)}{h(x)}$.

(c) أوجد $\int f(x)dx$.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1—4)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int \dfrac{4dx}{(x+3)(x+7)} = \ln|x+3| + \ln|x+7| + C$ (a) (b)

(2) $\int \dfrac{-6dx}{x^2+3x} = -2\ln|x+3| + 2\ln|x| + C$ (a) (b)

(3) الدالة: $f(x)=\frac{4x-11}{2x^2-x-3}$ على صورة كسور جزئية هي: $f(x)=\frac{3}{x+1}-\frac{2}{2x-3}$ ⓐ ⓑ

(4) للحدودية النسبية: $\frac{x^2-x+2}{x^3-2x^2+x}$ ثلاثة كسور جزئية. ⓐ ⓑ

في التمارين (10–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) $\int \frac{6}{x^2-9}dx =$

ⓐ $\ln|x+3|-\ln|x-3|+C$

ⓑ $\ln(x-3)-\ln(x+3)+C$

ⓒ $\ln|x+3|+\ln|x-3|+C$

ⓓ $\ln|x-3|-\ln|x+3|+C$

(6) $\int \frac{7x-7}{x^2-3x-10}dx =$

ⓐ $4\ln|x+2|+3\ln|x-5|+C$

ⓑ $3\ln|x+2|+2\ln|x-5|+C$

ⓒ $4\ln|x-5|+3\ln|x+2|+C$

ⓓ $4\ln|x-5|-3\ln|x+2|+C$

(7) الدالة النسبية: $f(x)=\frac{x}{x^2-4}$ على صورة كسور جزئية هي $f(x)$ تساوي:

ⓐ $\frac{1}{x-2}+\frac{1}{x+2}$

ⓑ $\frac{1}{2(x-2)}+\frac{1}{2(x+2)}$

ⓒ $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x+2}$

ⓓ $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{2(x+2)}$

(8) $\int \frac{2x^2-4x+3}{x^2-1}dx =$

ⓐ $2+2\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

ⓑ $\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

ⓒ $2x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-\frac{9}{2}\ln|x+1|+C$

ⓓ $x+\frac{1}{2}\ln|x-1|-9\ln|x+1|+C$

(9) $\int \frac{3x^2+2x}{x^2-4}dx =$

ⓐ $4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$

ⓑ $3x+2\ln|x-2|-2\ln|x-2|+C$

ⓒ $3x+4\ln|x-2|-2\ln|x+2|+C$

ⓓ $3x+4\ln|x-2|+2\ln|x+2|+C$

(10) $\int \frac{x^3+2}{x^2-x}dx =$

ⓐ $\frac{x^2}{2}+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

ⓑ $\frac{x^2}{2}-x+3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

ⓒ $\frac{x^2}{2}-3\ln|x-1|+2\ln|x|+C$

ⓓ $\frac{x^2}{2}+x+3\ln|x-1|-2\ln|x|+C$

تمرَّنْ
5–7

التكامل المحدد

Definite Integral

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (7–1)، أوجد:

(1) $\int_{-1}^{1} 3x(x-4)\,dx$

(2) $\int_{0}^{2} (x+1)^2\,dx$

(3) $\int_{0}^{4} \frac{x^2-1}{x+1}\,dx$

(4) $\int_{0}^{\frac{\pi}{3}} \cos 3x\,dx$

(5) $\int_{1}^{4} \frac{8-x^4}{2x^2}\,dx$

(6) $\int_{0}^{1} x\sqrt{x}\,dx$

(7) $\int_{1}^{2} \left(3e^x + \frac{5}{x}\right) dx$

في التمارين (10–8)، أوجد:

(8) $\int_{-1}^{3} |x-2|\,dx$

(9) $\int_{-1}^{1} |x^3|\,dx$

(10) $\int_{-2}^{3} (x|x|+3)\,dx$

في التمارين (13–11)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(11) $\int_{-4}^{2} (x^2+2x-8)\,dx \le 0$

(12) $\int_{-1}^{0} (x^3-5x^2-6x)\,dx \ge 0$

(13) $\int_{0}^{1} (x^2-3x+7)\,dx \ge \int_{0}^{1} (4x-5)\,dx$

في التمارين (15–14)، استعن برسم بيان الدوال لإيجاد:

(14) $\int_{-3}^{3} \sqrt{9-x^2}\,dx$

(15) $\int_{-5}^{0} -\sqrt{25-x^2}\,dx$

في التمارين (19–16)، استخدم التعويض المناسب لحساب التكامل.

(16) $\int_{0}^{3} \frac{dx}{(1+x)^2}$

(17) $\int_{e}^{6} \frac{dx}{x\ln x}$

(18) $\int_{1}^{e} \frac{\ln^6 x}{x}\,dx$

(19) $\int_{-1}^{3} \frac{x\,dx}{x^2+1}$

في التمارين (23–20)، أوجد:

(20) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} x\sin x\,dx$

(21) $\int_{0}^{\pi} x\cos 3x\,dx$

(22) $\int_{1}^{3} x^3\ln x\,dx$

(23) $\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{2x}\cos x\,dx$

في التمارين (26–24)، أوجد:

(24) $\int_{-1}^{1} \frac{4}{x^2-4}\,dx$

(25) $\int_{-2}^{0} \frac{5x-1}{x^2+2x-3}\,dx$

(26) $\int_{1}^{3} \frac{x^2}{(x+1)^2}\,dx$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت العبارة صحيحة و(b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,dx - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} \cos^2 x\,dx = \frac{\pi}{2}$ (a) (b)

(2) $\int_{-3}^{-2} (|x| + x + 5)\,dx = -2$ (a) (b)

(3) $\int_{-1}^{1} (|x|)^3\,dx = -\frac{1}{2}$ (a) (b)

(4) $\int_0^1 12(3x-2)^3\,dx = -15$ (a) (b)

(5) $\int_{-1}^{1} \frac{1}{\pi}\sqrt{1-x^2}\,dx = 1$ (a) (b)

(6) $\int_2^3 f(x)\,dx + \int_3^5 f(x)\,dx - \int_5^2 f(x)\,dx = 0$ (a) (b)

(7) $\int_2^4 f(x)\,dx + \int_4^2 g(x)\,dx = 0$ (a) (b)

في التمارين (12–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان: $\int_3^{-1} g(x)\,dx = 2$, $\int_{-1}^{3} f(x)\,dx = 4$ فإن $\int_{-1}^{3} (2f(x) + 3g(x) + 1)\,dx$ تساوي:

(a) 18 (b) -6 (c) 6 (d) 12

(9) $\int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{18}} \sqrt{2}\,dx =$

(a) 2 (b) $2\sqrt{2}$ (c) 4 (d) 8

(10) $\int_{-1}^{1} (1 - |x|)\,dx =$

(a) 1 (b) -1 (c) 0 (d) $\frac{1}{2}$

(11) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x + \cos x)\,dx =$

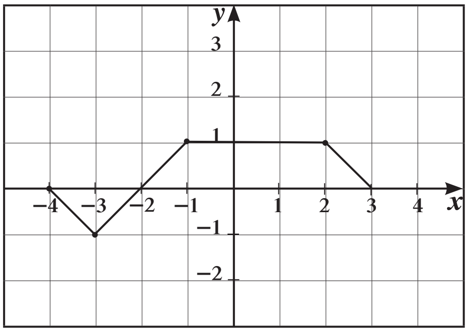
(a) 4 (b) 2 (c) 0 (d) π

(12) لتكن: $f(x) = x^2 + 5$ فإن: $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx > 0$ لكل قيم a تنتمي إلى:

(a) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^-$ (b) $\mathbb{R} - \mathbb{R}^+$ (c) $\mathbb{R}^-$ (d) $\mathbb{R}^+$

في التمارين (13–15)، لديك قائمتان، اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين من القائمة (1) لتحصل على عبارة صحيحة.

إذا كان بيان الدالة f كما في الشكل المقابل، فإن:



(1)	(2)
(13) $\int_{-4}^{3} f(x)\,dx$ يساوي:	ⓐ 6
(14) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي:	ⓑ 5
	ⓒ 0
(15) $\int_{-4}^{-1} \left(f(x) + \frac{1}{6}\right)dx$ يساوي:	ⓓ 3

اختبار الوحدة الخامسة

(1) أثبت أن: $F(x) = \frac{1}{3}\sqrt{(2x^2+6x+5)^3} + 8$ هي مشتقة عكسية للدالة $f(x) = (2x+3)\sqrt{2x^2+6x+5}$.

(2) إذا كان: $F(x) = \int (3x^2 - 2x)dx$ وكان: $F(2) = 6$، فأوجد $F(x)$.

في التمارين (20–3)، أوجد:

(3) $\int (x+2)\sqrt{x^2+4x+7}\, dx$

(4) $\int \frac{2x-1}{(x^2-x+7)^5}\, dx$

(5) $\int x^2 \sqrt[3]{x-3}\, dx$

(6) $\int x^3 \sqrt{x^2-8}\, dx$

(7) $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}+1}\, dx$

(8) $\int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\, dx$

(9) $\int \sin x \sqrt[3]{\cos^2 x}\, dx$

(10) $\int \sec^7 x \tan x\, dx$

(11) $\int \left(e^{3x} + \frac{4}{2x-1}\right) dx$

(12) $\int \frac{1}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}}\, dx$

(13) $\int \frac{x^2-4x}{x^3-6x^2+1}\, dx$

(14) $\int \frac{e^{2x}+x}{e^{2x}+x^2+3}\, dx$

(15) $\int (x^2-4)\cos x\, dx$

(16) $\int \ln(3x+2)\, dx$

(17) $\int 3x\, e^{2x+1}\, dx$

(18) $\int x^2 e^{2x-1}\, dx$

(19) $\int \frac{x^2-3x}{x^2-3x-28}\, dx$

(20) $\int \frac{x^4+2x^2+6x}{x^3+4x^2+4x}\, dx$

في التمارين (26–21)، أوجد:

(21) $\int_1^e \frac{1}{x}\, dx$

(22) $\int_{-1}^{1} 2x\sin(1-x^2)\, dx$

(23) $\int_0^5 |2x-5|\, dx$

(24) $\int_{-6}^{0} -\sqrt{36-x^2}\, dx$

(25) $\int_3^5 \frac{x^2-3}{x^2-3x+2}\, dx$

(26) $\int_1^3 \frac{x^3-2x^2+2}{x^3+6x^2+9x}\, dx$

في التمارين (29–27)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(27) $\int_2^5 (-x^2+7x+8)\, dx \geq 0$

(28) $\int_{-4}^{-2} (x^2+7x+10)\, dx \leq 0$

(29) $\int_{-5}^{-4} (x^2+13x+9)dx \leq \int_{-5}^{-4} (5x-6)dx$

تمارين إثرائية

في التمرينين (2—1)، ارسم بيانيًا الدالة على الفترة المعطاة، ثمّ أوجد:

(a) تكامل الدالّة على الفترة.

(b) المساحة للمنطقة بين المنحنى ومحور السينات.

(1) $y = -x^2 + 5x - 4 \ , \ [0,2]$

(2) $y = x^2 - 4x \ , \ [0,5]$

في التمرينين (4—3)، أوجد قيمة y.

(3) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 \ln x$

(4) $\dfrac{dy}{d\theta} = \csc\theta \cot\theta$

(5) أوجد المشتقة العكسية لِـ y باستخدام القيمة الابتدائية: $\dfrac{d^2y}{dx^2} = 2 - 6x \ , \ y(0) = 1 \ , \ y'(0) = 4$

(6) **تكلفة الطباعة.** يتكلّف طبع 25 نسخة من إحدى الأوراق 50 دينارًا، ولطبع x نسخة تعطى التكلفة الحديّة بالعلاقة $\dfrac{dc}{dx} = \dfrac{2}{\sqrt{x}}$ دينارًا كويتيًا لكلّ نسخة.

أوجد التكلفة الكلّيّة لطبع 500 2 نسخة.

في التمرينين (8—7)، أوجد التكامل:

(7) $\int x^3 e^x \, dx$

(8) $\int x^3 \ln x \, dx$

(9) استخدم الكسور الجزئية لتوجد التكاملات التالية:

(a) $\int \dfrac{x-2}{2x^2 - 5x + 3} \, dx$

(b) $\int \dfrac{x^2 - 9}{(2x+1)(x^2 + 10x + 25)} \, dx$

(c) $\int \dfrac{x^4 + 3x^2 - 7}{(x-1)(x^2 + 5x - 6)} \, dx$

في التمرينين (11—10) استعن برسم بيان الدوال لايجاد:

(10) $\int_{-1}^{1} \sqrt{4 - x^2} \, dx$

(11) $\int_{-4}^{4} \left(\dfrac{1}{\pi} - x\right)\sqrt{16 - x^2} \, dx$

في التمارين (14—12)، أوجد التكامل المحدد.

(12) $\int_0^2 \dfrac{2x+3}{x^2 + 5x + 4} \, dx$

(13) $\int_1^2 \dfrac{x^3 - 6x^2 + 3}{x^3 - 6x^2 + 9x} \, dx$

(14) $\int_3^5 x^3 \sqrt{x^2 - 4} \, dx$

في التمرينين (16—15)، دون حساب قيمة التكامل أثبت أن:

(15) $\int_0^2 (-x^2 + 9x - 18) \, dx \leq 0$

(16) $\int_{-1}^{2} (x^2 + 13x + 15) \, dx \geq \int_{-1}^{2} (3x - 6) \, dx$

تمرَّنْ
6−1

المساحات في المستوي
Areas in the Plane

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 8x^3$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 1$, $x = 3$

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 5x$ ومحور السينات.

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 12 - x^2$ ومحور السينات.

في التمارين (6—4)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في الفترة المحددة:

(4) $f(x) = x^2 - x - 6$, $[-3, 2]$

(5) $f(x) = x^3 - 6x$, $[0, 3]$

(6) $f(x) = \cos 2x$, $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$

(7) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4x - x^2$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = 5 + x^2$ والمستقيمين $x = 0$, $x = 2$ علمًا بأن منحنيي الدالتين f , g غير متقاطعين.

(8) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = \sqrt[3]{x}$, $f(x) = x$ ، والمستقيمين $x = 8$, $x = 1$.

(9) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = 3 - x$ والمستقيمين $x = 3$, $x = 0$.

(10) أوجد مساحة المنطقة بين المنحنى $f(x) = 3 - x^2$ والمستقيم $g(x) = -1$.

في التمارين (13—11)، أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيات التالية:

(11) $f(x) = x^2 - 2$, $g(x) = 2$

(12) $f(x) = 2x - x^2$, $g(x) = -2x$

(13) $f(x) = 7 - 2x^2$, $g(x) = x^2 + 4$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = a \ , \ x = b$ هي: $\int_a^b f(x)\,dx$ — (a) (b)

(2) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 4 - x^2$ ومحور السينات في $[-2,2]$ هي: $2\int_0^2 f(x)\,dx$ — (a) (b)

(3) إذا كانت: $f(x) \le 0 \quad \forall x \in [a,b]$ فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات في $[a,b]$ هي: $\int_b^a f(x)\,dx$ — (a) (b)

(4) إذا كان منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ يقطع محور السينات عند $x = -1$ ، $x = 3$. فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات هي: $A = \int_{-1}^3 f(x)\,dx$ — (a) (b)

(5) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = |x|$ ومحور السينات. في الفترة $[-2,2]$ هي: 2 وحدة مساحة — (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$ ومحور السينات هي:

(a) 9π units^2 (b) 6π units^2

(c) 3π units^2 (d) $\frac{9}{2}\pi$ units^2

(7) مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة g : $g(x) = (x-2)^3$ ومحور السينات في الفترة $[0,4]$ بالوحدات المربعة هي:

(a) $2\int_0^2 g(x)\,dx$ (b) $-2\int_0^2 g(x)\,dx$

(c) $\int_0^4 g(x)\,dx$ (d) $-2\int_2^4 g(x)\,dx$

(8) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f(x) = 2$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = -\sqrt{x}$ والمستقيمين $x = 0$ ، $x = 4$ هي:

(a) 20 units^2 (b) $\frac{8}{3}$ units^2

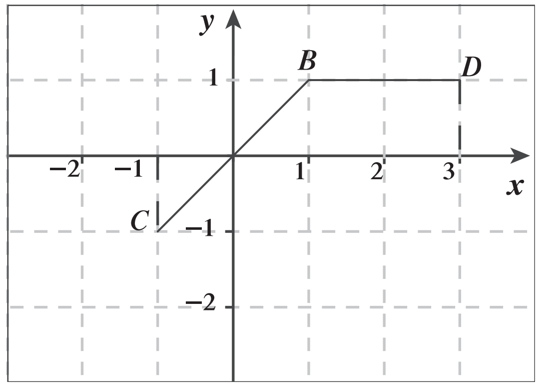
(c) $\frac{40}{3}$ units^2 (d) 8 units^2

(9) مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt{4 - x^2}$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = x + 2$ في $[-2,2]$ هي:

(a) $\pi - 2$ units^2 (b) π units^2

(c) $\pi + 2$ units^2 (d) 2 units^2

(10) إذا كان بيان الدالة f يمثله $\overline{CB} \cup \overline{BD}$ كما هو موضح بالشكل فإن مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = -1$ هي:



ⓐ 3 units^2 ⓑ 4 units^2 ⓒ 2 units^2 ⓓ 5 units^2

تمرَّنْ
6-2

حجوم الأجسام الدورانية

Volumes of Revolution Solids

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (8–1)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دوران المنطقة المستوية دورة كاملة حول محور السينات والمحددة بكل من المستقيمات والمنحنيات التالية:

(1) $y_1 = x^2\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 2,\ x = 0$

(2) $y_1 = \frac{1}{x}\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 1\ ,\ x = 4$

(3) $y_1 = \sqrt{1 - x^2}\ ,\ y_2 = 0$

(4) $y_1 = x^2 + 1\ ,\ y_2 = x + 3$

(5) $y_1 = \sec x\ ,\ y_2 = \sqrt{2}\ ,\ -\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{\pi}{4}$

(6) $y_1 = x + 1\ ,\ y_2 = x - 1\ ,\ x = 1\ ,\ x = 4$

(7) $y_1 = x\ ,\ y_2 = 1\ ,\ x = 0$

(8) $y_1 = \sqrt{x}\ ,\ y_2 = 0\ ,\ x = 4$

(9) باستخدام التكامل المحدد استنتج الصيغة التي تعطى حجم مخروط دائري قائم ارتفاعه h (وحدة طول) وطول نصف قطر قاعدته r (وحدة طول) من دوران منطقة مستوية دورة كاملة حول محور السينات.
(إرشاد: استخدم الدالة f : $f(x) = \frac{r}{h}x$ في الفترة $[0, h]$)

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x}$ في الفترة $[1, 8]$ هو: $V = \pi\int_8^1 (\sqrt[3]{x})^2 dx$

(a) (b)

(2) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 2\sqrt{x}$ في الفترة $[1, 4]$ هو: $V = \pi\int_0^4 4x dx - \pi\int_0^1 4x dx$

(a) (b)

(3) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = \frac{1}{2}x^2$ هو: $V = \pi\int_0^2 \left(x - \frac{1}{2}x^2\right) dx$

(a) (b)

(4) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3$ ومنحنى الدالة g : $g(x) = 8$ و $x = 0$ يساوي حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات لمنحنى الدالة f ومنحنى الدالة h: $h(x) = -8\ ,\ x = 0$

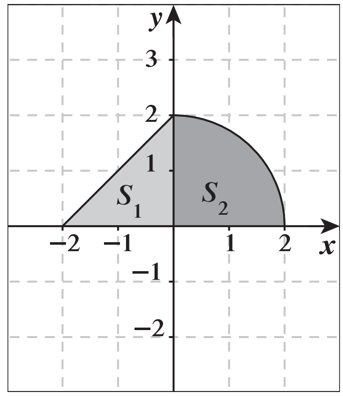
(a) (b)

في التمارين (12–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = 3$ ومحور السينات في الفترة $[-1,1]$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 6π (b) 18 (c) 18π (d) 81π

(6) المنطقة المظللة $S = S_1 \cup S_2$ حيث S_1 منطقة مثلثة، S_2 منطقة ربع دائرة كما هو موضح بالشكل.



حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة S بالوحدات المكعبة يساوي:

(a) $\frac{40}{3}\pi$ (b) $4 + 2\pi$ (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) 8π

(7) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة $y = -\sqrt{4 - x^2}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 6π (c) $\frac{16}{3}\pi$ (d) $\frac{32}{3}\pi$

(8) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f: f(x) = \frac{1}{x}$ والمستقيمات $x = 1$, $x = 2$, $y = 0$ هو:

(a) π units^3 (b) $\frac{\pi}{3}$ units^3 (c) $\frac{\pi}{2}$ units^3 (d) $\frac{\pi}{4}$ units^3

(9) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى الدالة $f: f(x) = \sqrt{x+1}$ ومحور السينات والمستقيمين $x = 3$, $x = -1$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 8π (b) 7π (c) 8 (d) $\frac{5}{2}\pi$

(10) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بالمستقيمات $x = 0$, $y = -2$ ومنحنى الدالة $f: f(x) = -\sqrt{x}$ بالوحدات المكعبة هو:

(a) 4π (b) 16π (c) 8π (d) 2π

(11) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين المنحنيين $y = \sqrt{x}$, $x = 2y$ هو:

(a) $\int_0^4 \left(x - \frac{x}{2}\right)^2 dx$ (b) $\pi \int_0^4 \left(\frac{x^2}{4} - x\right) dx$ (c) $\int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$ (d) $\pi \int_0^4 \left(x - \frac{x^2}{4}\right) dx$

(12) حجم المجسم الناتج من دوران دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بين منحنى $y = \sqrt{x}$ ومنحنى $x = 2y$، هو:

(a) $\frac{64\pi}{15}$ units^3 (b) $\frac{32\pi}{15}$ units^3 (c) $\frac{64\pi}{5}$ units^3 (d) $\frac{8\pi}{3}$ units^3

تمرَّنْ
6–3

طول قوس ومعادلة منحنى دالة
Arc Length and Equation of Function Curve

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 5 + 2\sqrt{x^3}$ في الفترة $\left[0, \frac{1}{3}\right]$.

(2) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(7 + 4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $\left[1, \frac{5}{4}\right]$.

(3) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2x}$ في الفترة $[1, 2]$.

(4) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-x^2 + 2x - 4$ ويمر بالنقطة $A(3, 7)$

(5) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $-4x^3 + 2x + 5$ ويمر بالنقطة $A(1, 3)$

(6) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\cos 2x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{-\pi}{4}, \frac{5}{2}\right)$

(7) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{2\pi}{9}, \frac{7}{6}\right)$

(8) إذا كان ميل العمودي على منحنى الدالة f عند أي نقطة عليه (x, y) هو $2x + 5$ فأوجد معادلة منحنى الدالة f إذا كان يمر بالنقطة $B(-2, 3)$

(9) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 24x - 1$

أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة عظمى محلية عند $A\left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{16}\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(1 + 4x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0, 1]$
هو $L = \frac{2}{3}$ وحدة طول. (a) (b)

(2) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $x^3 + 2$ ويمر بالنقطة $A(2, 6)$
معادلته: $f(x) = \frac{x^4}{4} + 2x + 2$ (a) (b)

(3) منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة عليه (x, y) هو: $x + x - \sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(1, 1)$
معادلته: $f(x) = -\frac{2}{3}x\sqrt{x} + x^2 + \frac{2}{3}$ (a) (b)

(4) لتكن $A(1, 3)$ نقطة على منحنى الدالة f : $f'(x) = 3x^2 - 12x + 9$ فإن
معادلة الدالة f هي $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ (a) (b)

في التمارين (9–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=\frac{1}{3}$ في الفترة $[-2,3]$ هو:

ⓐ 7 units ⓑ 6 units ⓒ 5 units ⓓ 1 unit

(6) طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x)=x-3$ في الفترة $[0,2]$ هو:

ⓐ $\sqrt{2}$ units ⓑ $2\sqrt{2}$ units ⓒ $3\sqrt{2}$ units ⓓ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ units

(7) معادلة منحنى الدالة الذي ميل العمودي عليه عند أي نقطة (x,y) هو: $-x+3$ ويمر بالنقطة $A(2,3)$ هي y تساوي:

ⓐ $-\frac{x^2}{2}+3x-4$ ⓑ $\ln|3-x|+3$ ⓒ $-\frac{x^2}{2}+3x+4$ ⓓ $3-\ln|3-x|$

(8) معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x,y) هو: $2x-3\sqrt{x}$ ويمر بالنقطة $A(4,-2)$ هي:

ⓐ $x^2+2\sqrt{x^3}-2$ ⓑ $x^2-2\sqrt{x^3}$ ⓒ $x^2-2\sqrt{x^3}-2$ ⓓ $\frac{x^2}{2}-2\sqrt{x^3}+2$

(9) إذا كانت النقطة $A(0,2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f : $f''(x)=12x-6$ فإن النقطة الحرجة الأخرى للدالة f هي:

ⓐ $B(-2,0)$ ⓑ $B(0,-2)$ ⓒ $B(1,-1)$ ⓓ $B(1,1)$

المعادلات التفاضلية

Differential Equation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أثبت أن الدالة: $y = 3e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y'' - y' + 2x = 2x$

(2) أثبت أن الدالة: $y = e^x$ هي حل للمعادلة التفاضلية $y + y'' = 2e^x$

في التمارين (3–19)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:

(3) $y' = x^2 + x + 2$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 1$

(4) $xy' = 1 - x^2$

(5) $xy' = 4y$ التي تحقق $y = 1$ عند $x = 1$

(6) $y' = 3y$

(7) $y' = 5y$

(8) $2y' - 5y = 0$ التي تحقق $y = 4$ عند $x = 2$

(9) $\sqrt{2}y' + y = 0$ التي تحقق $y = \sqrt{2}$ عند $x = 0$

(10) $y' = y + 1$

(11) $\frac{1}{2}y' + 4y = 1$ التي تحقق $y = \frac{3}{4}$ عند $x = \frac{1}{4}$

(12) $2y' + y = 4$ التي تحقق $y = 2$ عند $x = 0$

(13) $y'' = -4\sin 4x$

(14) $y'' = 6x - 8$

(15) $2y'' + y' - 15y = 0$

(16) $y'' - 6y' + 9y = 0$

(17) $y'' + 9y = 0$

(18) $y'' - 2y' + y = 0$

(19) $2y'' + 4y' = -3y$

(20) **(a)** حل المعادلة التفاضلية: $y' + 2y = 0$

(b) أوجد الحل الذي يحقق $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) المعادلة التفاضلية التالية: $x^2y''' + (y')^2 + y = 0$ من الرتبة الثالثة والدرجة الأولى. (a) (b)

(2) المعادلة التفاضلية التالية: $(y')^2 + 2xy = 0$ من الرتبة الثانية والدرجة الأولى. (a) (b)

(3) إذا كان $y = \frac{1}{2}$ عند $x = 0$ و $y' + 2y = 0$ فإن $y = \frac{1}{4}e^{-2x} + \frac{1}{4}$ (a) (b)

(4) إذا كان $y = 1$ عند $x = 0$ و $y' + y = 2$ فإن $y = 2e^{-x}$ (a) (b)

(5) إذا كان $y'' + 2y' + 2y = 0$ فإن $y = (c_1\cos x + c_2\sin x)e^{-x}$ (a) (b)

(6) إذا كان $y'' + y = 0$ فإن $y = c_1\cos x + c_2\sin x$ (a) (b)

(7) إذا كان $y'' - y = 0$ فإن $y = c_1e^{x} + c_2e^{-x}$ (a) (b)

في التمارين (14—8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التفاضلية التالية: $\frac{(2y'' + x)^2}{xy} = 3$ من:

(a) الرتبة الأولى والدرجة الثانية.

(b) الرتبة الثانية والدرجة الأولى.

(c) الرتبة الثانية والدرجة الثانية.

(d) الرتبة الأولى والدرجة الأولى.

(9) حل المعادلة التفاضلية $\frac{dy}{dx} = 2x$ الذي يحقق $y = -2$ عندما $x = 1$ هو:

(a) $y = x^2 + 3$

(b) $y = x^2 - 3$

(c) $y = \frac{x^2}{2} - 3$

(d) $y = \frac{x^2}{2} + 3$

(10) إذا كان $y'' = 2x^2 + 3x$ فإنّ:

(a) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2} + c$

(b) $y = \frac{2x^3}{3} + \frac{3x^2}{2}$

(c) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x + c_2$

(d) $y = \frac{1}{6}x^4 + \frac{1}{2}x^3 + c_1x$

(11) حل المعادلة التفاضلية $2y' + y = 1$ الذي يحقق $y = 3$ عند $x = 5$ هو:

(a) $y = 2e^{\frac{5}{2}}$

(b) $y = \frac{2}{e^{\frac{5}{2}}}$

(c) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}\right)} + 1$

(d) $y = 2e^{\left(-\frac{1}{2}x - \frac{5}{2}\right)} + 1$

(12) إذا كان $y'' - 3y' + 2y = 0$ فإنّ:

(a) $y = c_1e^{x} + c_2e^{-2x}$

(b) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{2x}$

(c) $y = c_1e^{-x} + c_2e^{-2x}$

(d) $y = c_1e^{x} + c_2e^{2x}$

(13) إذا كان $y'' + 2y' + y = 0$ فإنّ:

ⓑ $y = (c_1 x + c_2)e^{x}$

ⓐ $y = (c_1 x + c_2)e^{-x}$

ⓓ $y = (c_1 x + c_2)e^{-2x}$

ⓒ $y = (c_1 x + c_2)e^{2x}$

(14) إذا كان $y'' - 4y' + 13y = 0$ فإنّ:

ⓑ $y = e^{-2x}(c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x)$

ⓐ $y = e^{x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

ⓓ $y = e^{2x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

ⓒ $y = e^{-x}(c_1 \cos 3x + c_2 \sin 3x)$

اختبار الوحدة السادسة

(1) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ ، محور السينات في الفترة $[0,1]$.

(2) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 6x + 5$ ، محور السينات في الفترة $[1,5]$.

(3) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 - 4x$ ، محور السينات في الفترة $[-2,2]$.

(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^2 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = \sqrt{x}$ في الفترة $[1,2]$.

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 1$ ومنحنى الدالة g: $g(x) = x + 1$.

(6) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}x^2$ والمستقيم $y = 2$ في الفترة $[-2,2]$.

(7) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = x + 2$ والدالة g: $g(x) = -x + 3$ في الفترة $[-1,2]$.

(8) أوجد حجم المجسم الناتج من دورة كاملة حول محور السينات للمنطقة المحددة بمنحنى الدالة f : $f(x) = -x^2 + 4$ والدالة g: $g(x) = x + 2$ في الفترة $[-2,1]$.

(9) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 2 + \frac{1}{3}x^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[0,12]$.

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = 2 - \sqrt{3}x$ في الفترة $[-3,1]$.

(11) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f: $f(x) = \frac{1}{3}(-1 + 2x)^{\frac{3}{2}}$ في الفترة $[2,8]$.

(12) أوجد معادلة منحنى الدالة الذي ميله عند أي نقطة (x, y) هو: $3x^2 - 2x + 1$ ويمر بالنقطة $A(-1,-5)$.

(13) أوجد معادلة منحنى الدالة إذا كان ميل العمودي عند أي نقطة (x, y) على هذا المنحنى هو: $3x - 2$ ويمر بالنقطة $(1,-1)$.

(14) لتكن: $f''(x) = 12x^2 - 4$ ، أوجد معادلة الدالة f إذا كان لها نقطة صغرى محلية عند $A(-1,3)$

في التمارين (15–20)، حلّ المعادلات التفاضلية التالية:

(15) $3y' + 5y = 2$

(16) $3xy' = 5y$

(17) $y'' - 7y' + 12y = 0$

(18) $y'' - 6y' + 9y = 0$

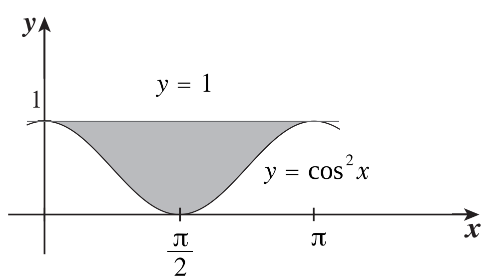
(19) $y'' + 4y' + 20y = 0$

(20) $y'' + 16y = 0$

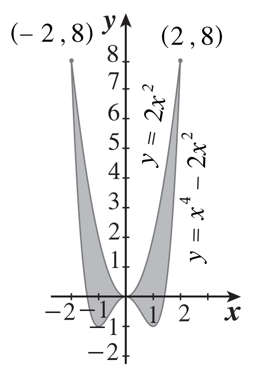
تمارين إثرائية

في التمارين (3–1)، أوجد مساحة المنطقة المظلّلة تحليليًّا (جبريًّا):

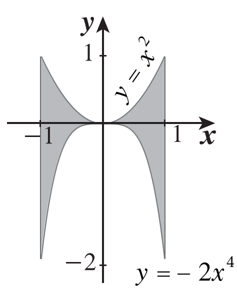
(1)



(2)



(3)



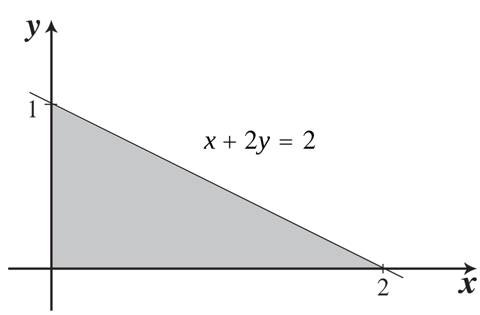
(4) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x^2 + 8$ ومنحنى الدالة: $y = x^4$.

(5) أوجد مساحة المنطقة المحددة بين منحنى الدالة: $y = 2x - 15$ ومنحنى الدالة: $y = -x^2 + 4x$.

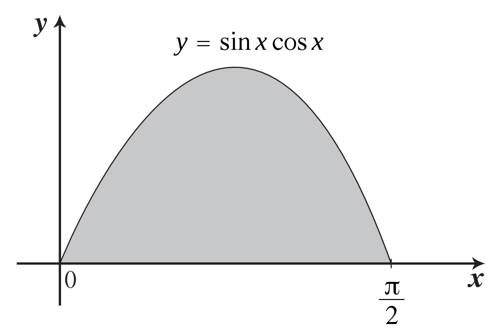
(6) أوجد مساحة المنطقة المحددة بالمنحنيين $g(x) = x$, $f(x) = \frac{1}{x^2}$ ، والمستقيم $x = 2$ ومحور السينات.

في التمرينين (8–7)، أوجد حجم المجسّم الناتج من دورة كاملة للمنطقة المظلّلة حول محور السينات.

(7)



(8)



(9) أوجد معادلة منحنى الدالة f الذي ميله عند أي نقطة x هو: $\sin 3x$ ويمر بالنقطة $A\left(\frac{\pi}{3}, \frac{4}{3}\right)$

(10) أوجد طول القوس من منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{1}{2}\sqrt{x^3}$ في الفترة $[0, 27]$

في التمارين (13–11)، حل المعادلات التفاضلية التالية:

(11) $2y' + 3y = 4$

(12) $y'' + y = 0$

(13) $y'' - y = 0$

(14) نتيجة لحادث نووي، تبيّن أن الجزئيات المشعة $y(t)$ في الزمن t (بالساعات) بواسطة عداد جيجر (Geiger) تعطى بالمعادلة التفاضلية: $(E): y' = a(y-2)$، حيث a ثابت موجب.

(a) أوجد الحل العام للمعادلة (E).

(b) أوجد حل (E) الذي يحقق $y(0) = 170$.

(c) إذا علمنا أن $y(6) = 9$ فما قيمة الثابت a؟

(15) إذا كانت النقطة $A(3, -2)$ نقطة حرجة لمنحنى الدالة f ، $f''(x) = 6x - 6$ فأوجد معادلة الدالة f .

القطوع المخروطية — القطع المكافئ
Conic Sections — Parabola

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3—1)، أوجد معادلة القطع المكافئ، الذي:

(1) رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(-3,0)$ **(2)** رأسه نقطة الأصل والبؤرة $(0,-2)$

(3) بؤرته $F(0,2)$ ومعادلة دليله $y=-2$

في التمارين (7—4)، أوجد البؤرة، والدليل، وخط تماثل القطع المكافئ. ارسم تخطيطًا للرسم البياني للقطع المكافئ.

(4) $x^2=-y$ **(5)** $y^2=2x$

(6) $y=4x^2$ **(7)** $x=-8y^2$

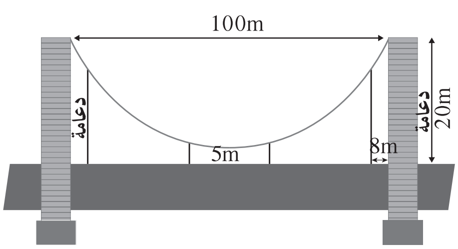
(8) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطة $A(-1,2)$ وخط تماثله $x-axis$.

(9) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $A(-3,4)$, $B(3,4)$.

(10) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $y=4$.

(11) أوجد معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل ومعادلة دليله $x=-5$.

(12) **الميكروفونات المتكافئة.** تستخدم القنوات الرياضية ميكروفونًا مكافئًا لالتقاط كل أصوات لاعبي كرة السلة والمدربين أثناء المباريات. إذا كان لأحد هذه الميكروفونات سطح مكافئ متولد بالقطع المكافئ $10y=x^2$ فحدّد موضع البؤرة (المستقبِل الإلكتروني) للقطع المكافئ.



(13) يصل سلك معدني متدلٍ بين رأسي عمودي جسر.
السلك المعدني هو على صورة قطع مكافئ حيث يبعد العمودان عن بعضهما مسافة 100 m ويبلغ ارتفاع كل منهما 20 m. يبلغ أصغر ارتفاع للسلك عن الطريق العام 5 m، وضعت على الطريق دعامات للسلك المتدلي، أوجد طول الدعامة التي تبعد 8 m عن أي من العمودين.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(0,2)$ هي: $x^2=8y$ (a) (b)

(2) معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $(0,0)$ ودليله $x=-2$ هي: $x^2=8y$ (a) (b)

(3) معادلة القطع المكافئ الذي بؤرته $(-4,0)$ ودليله $x=4$ هي: $y^2=-16x$ (a) (b)

(4) $y^2=\frac{1}{2}x$ هي معادلة قطع مكافئ، بؤرته $\left(0,\frac{-3}{2}\right)$ (a) (b)

في التمارين (7–5)، معادلة القطع المكافئ هي: $y^2 = -\frac{1}{6}x$

(5) بؤرة القطع المكافئ هي: $\left(-\frac{1}{24}, 0\right)$ — (a) (b)

(6) معادلة الدليل هي: $y = \frac{1}{24}$ — (a) (b)

(7) خط التماثل هو محور السينات. — (a) (b)

في التمارين (15–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ وبؤرته $(-5,0)$ هي:

(a) $x^2 = 20y$ (b) $y^2 = 20x$ (c) $x^2 = -20y$ (d) $y^2 = -20x$

(9) المعادلة التي تمثل قطع مكافئ مفتوح إلى الأسفل هي:

(a) $y^2 = \frac{-1}{2}x$ (b) $y^2 = \frac{1}{2}x$ (c) $x^2 = \frac{-1}{2}y$ (d) $x^2 = \frac{1}{2}y$

(10) النقطة المشتركة بين كل القطوع المكافئة التي هي على الصورة $x^2 = 4py$ هي:

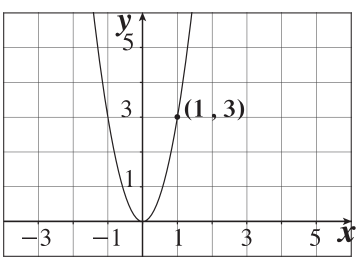
(a) $(1,1)$ (b) $(1,0)$ (c) $(0,1)$ (d) $(0,0)$

(11) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطتين $A(-5,-2), B(-5,2)$ هي:

(a) $y^2 = -\frac{4}{5}x$ (b) $x^2 = -\frac{4}{5}y$ (c) $y^2 = \frac{4}{5}x$ (d) $x^2 = \frac{4}{5}y$

(12) المعادلة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0,0)$ ويمر بالنقطة $C(-5,-6)$ وخط تماثله $y-axis$ هي:

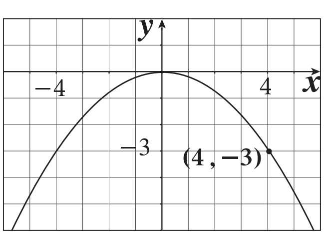
(a) $y^2 = -\frac{25}{6}x$ (b) $x^2 = -\frac{25}{6}y$ (c) $y^2 = -\frac{6}{25}x$ (d) $x^2 = -\frac{6}{25}y$



(13) بؤرة القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:

(a) $\left(0, \frac{-4}{3}\right)$ (b) $\left(\frac{9}{20}, 0\right)$

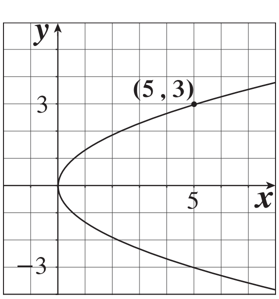
(c) $\left(0, \frac{1}{12}\right)$ (d) $\left(\frac{1}{12}, 0\right)$



(14) معادلة دليل القطع المكافئ في الشكل المقابل هي:

(a) $y = \frac{4}{3}$ (b) $y = \frac{9}{20}$

(c) $y = -\frac{1}{12}$ (d) $y = -\frac{4}{3}$

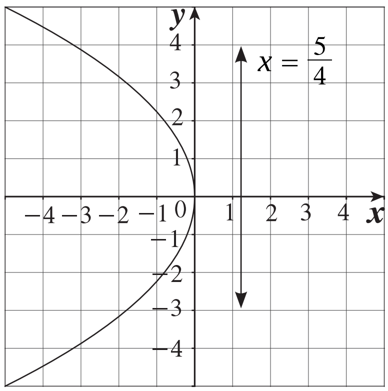
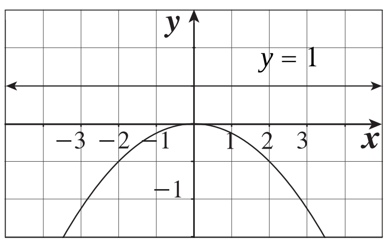
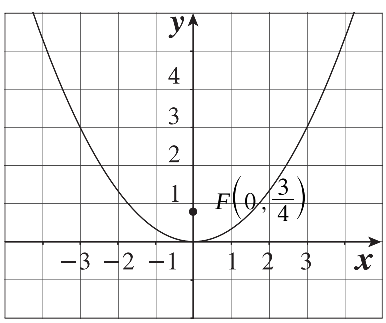
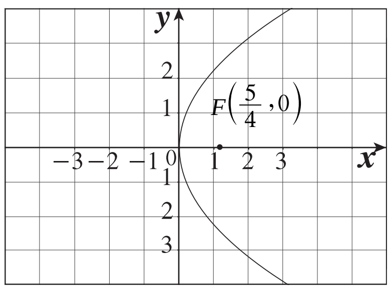


(15) معادلة القطع المكافئ للبيان التالي هي:

(a) $x^2 = -\frac{25}{3}y$ (b) $y^2 = \frac{9}{5}x$

(c) $x^2 = \frac{25}{3}y$ (d) $y^2 = \frac{5}{9}x$

في التمارين (16–18)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل دالة بمعادلتها.

القائمة (1)	القائمة (2)
(16) $x^2 = 3y$	a 
(17) $x^2 = -4y$	b 
(18) $y^2 = 5x$	c 
	d 

تمرَّنْ
7–2

القطع الناقص

Ellipse

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، لكل معادلة من معادلات القطع الناقص التالية أوجد: رأسي القطع – طرفي المحور الأصغر – البؤرتين – معادلتي دليلي القطع – طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلاً تقريبيًّا لكل قطع.

(1) $\frac{x^2}{8^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

(2) $\frac{x^2}{4^2}+\frac{y^2}{6^2}=1$

(3) $3x^2+5y^2-225=0$

(4) $4x^2+y^2-28=0$

في التمارين (12–5)، اكتب معادلة القطع الناقص الذي فيه:

(5) البؤرتان $F_2\ (2,0)$ ، $F_1\ (-2,0)$ ، ونقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2\ (0,3)$ ، $B_1\ (0,-3)$.

(6) $V_1F_1+V_1F_2=10$، حيث إنّ V_1 هو نقطة على القطع الناقص، F_2 و F_1 هما البؤرتين، علمًا أنّ $F_1(3,0)$، $F_2(-3,0)$.

(7) نقطتا طرفي المحور الأكبر هما $A_2\ (0,5)$, $A_1\ (0,-5)$ ، طول المحور الأصغر 4.

(8) نقطتا طرفي المحور الأصغر $B_2\ (0,4)$, $B_1\ (0,-4)$ ، طول المحور الأكبر 10.

(9) مركزه نقطة الأصل وإحدى بؤرتيه $F(5,0)$ ويمر بالنقطة $C(2,3)$.

(10) محوره الأكبر نقطتاه الطرفيتان $A_2(6,0)$, $A_1(-6,0)$ ومحوره الأصغر إحدى نقطتيه الطرفيتين $B_1(0,-4)$.

(11) بؤرتاه $F_2(-5,0)$, $F_1(5,0)$ وطول محوره الأصغر 6.

(12) طول المحور الأكبر الذي ينطبق على محور السينات 10 والمسافة بين البؤرتين 6 ومركزه نقطة الأصل.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) رأسي القطع للقطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{9^2}+\frac{y^2}{5^2}=1$ هما: $(-9,0)$، $(9,0)$ — (a) (b)

(2) النقطة $(\sqrt{33},0)$ هي إحدى بؤرتي القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{7^2}+\frac{y^2}{4^2}=1$ — (a) (b)

(3) طول المحور الأكبر للقطع الناقص الذي معادلته $25x^2+9y^2=225$ يساوي 10 units — (a) (b)

(4) بؤرتا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$، هما $(\pm3,0)$ — (a) (b)

(5) في القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{36}=1$، طول المحور الأصغر يساوي 8 — (a) (b)

في التمارين (12–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) النقطتان الطرفيتان للمحور الأصغر للقطع الناقص الذي معادلته $4x^2 + 9y^2 = 36$ هما:

(a) $(\pm 2, 0)$
(b) $(\pm 3, 0)$
(c) $(0, \pm 2)$
(d) $(0, \pm 3)$

(7) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه $(\pm 7, 0)$ والنقطتان الطرفيتان لمحوره الأصغر $(0, \pm 6)$ هي:

(a) $\frac{x^2}{85} + \frac{y^2}{36} = 1$
(b) $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{85} = 1$
(c) $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$
(d) $\frac{x^2}{85} + \frac{y^2}{49} = 1$

(8) معادلة القطع الناقص الذي بؤرتاه على محور السينات ومركزه نقطة الأصل وطول محوره الأكبر 9 units وطول محوره الأصغر 4 units هي:

(a) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$
(b) $\frac{x^2}{20.25} + \frac{y^2}{4} = 1$
(c) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$
(d) $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{20.25} = 1$

(9) النقطة $A(-10, 0)$ تنتمي إلى القطع الناقص الذي معادلته $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$. مجموع المسافتين $AF_1 + AF_2$ حيث F_1 , F_2 هما البؤرتان يساوي:

(a) 10 units
(b) 12 units
(c) 14 units
(d) 20 units

(10) طول المحور الأكبر للقطع الناقص $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{64} = 1$ يساوي:

(a) 12 units
(b) $2\sqrt{41}$ units
(c) 16 units
(d) 20 units

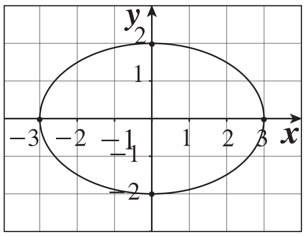
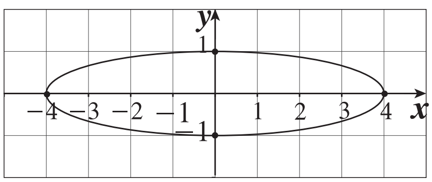
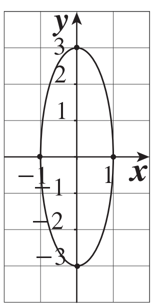
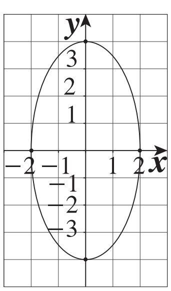
(11) المسافة بين البؤرتين للقطع الناقص $15x^2 + 25y^2 - 75 = 0$ هي:

(a) $\sqrt{2}$
(b) $2\sqrt{2}$
(c) 10
(d) $2\sqrt{3}$

(12) المسافة بين نقطة الأصل وأحد رأسي القطع الناقص على المحور الأكبر الذي معادلته $\frac{x^2}{20.25} + \frac{y^2}{4} = 1$ هي:

(a) 9
(b) 2
(c) 4.5
(d) 16.25

في التمارين (13–15)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع ناقص بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $\dfrac{x^2}{16}+y^2=1$	a 
(14) $x^2+\dfrac{y^2}{9}=1$	b 
(15) $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{16}=1$	c 
	d 

تمرَّنْ
7−3

القطع الزائد
Hyperbola

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2−1)، لكل معادلة من معادلات القطع الزائد التالية أوجد: رأسي القطع − البؤرتين − معادلة كل من الخطين المقاربين − معادلة كل من الدليلين − طول كل من المحورين، ثم ارسم شكلًا تخطيطيًّا للقطع الزائد.

(1) $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{16}=1$

(2) $24x^2-12y^2-192=0$

(3) أوجد معادلة القطع الزائد الذي إحدى بؤرتيه $F_1(-5,0)$ ورأساه $A_2(3,0)$, $A_1(-3,0)$ ثم أوجد معادلة كل من خطيه المقاربين وارسم شكلًا تقريبيًّا له.

(4) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه $(0\ ,\ 0)$ وإحدى بؤرتيه $F_1(0,-\sqrt{5})$ ومعادلة أحد خطيه المقاربين $y=2x$.

(5) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وأحد رأسيه $A_2\left(\frac{2}{3},0\right)$ ويمر بالنقطة $(1,1)$.

(6) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل ويمر بالنقطتين $B(4,3)$, $A(2,1)$ ومحوره الأساسي جزء من محور السينات.

(7) سمع صوت طلق ناري عند النقطة $A(150,0)$ وبعده بثانيتين سمع الصوت نفسه عند النقطة $B(-150,0)$. أثبت أن مجموعة النقاط $P(x,y)$ التي يمكن أن تكون مصدرًا للصوت تمثل قطعًا زائدًا، ثم أوجد معادلته علمًا بأن سرعة الصوت في الهواء 50 units/s

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $x^2-y^2=4$ هي معادلة قطع زائد. (a) (b)

(2) الخطّان المقاربان للقطع الزائد الذي معادلته $x^2-y^2=12$ هما متعامدان. (a) (b)

(3) إحداثيات بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته $\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{18}=1$ هما: $(0,3)$, $(0,-3)$. (a) (b)

(4) نقطتا طرفي المحور المرافق للقطع الزائد الذي معادلته $\frac{x^2}{25}-y^2=1$ هما: $B_1(1,0)$, $B_2(-1,0)$. (a) (b)

في التمارين (11–5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) معادلة القطع الزائد الذي بؤرتاه $(\pm 3, 0)$ وطول محوره القاطع 4 هي:

ⓐ $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1$

ⓑ $\frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{4} = 1$

ⓒ $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1$

ⓓ $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{4} = 1$

(6) إذا كانت معادلة القطع الزائد $\frac{x^2}{5} - \frac{y^2}{3} = 1$؛ فيمرّ أحد الخطين المقاربين له في النقطة:

ⓐ $\left(2, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

ⓑ $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\right)$

ⓒ $\left(2\sqrt{\frac{3}{5}}, 2\right)$

ⓓ $\left(\sqrt{\frac{5}{3}}, 2\sqrt{\frac{3}{5}}\right)$

(7) معادلة القطع الزائد الذي نقطتي تقاطعه مع المحور السيني هما $(\pm 6, 0)$ هي:

ⓐ $y^2 - x^2 = 36$

ⓑ $\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{49} = 1$

ⓒ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{36} = 1$

ⓓ $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{4} = 1$

(8) البعد بين بؤرتي القطع الزائد الذي معادلته: $50y^2 - 25x^2 - 100 = 0$ بوحدة الطول يساوي:

ⓐ $\sqrt{6}$

ⓑ $2\sqrt{6}$

ⓒ 6

ⓓ $2\sqrt{2}$

(9) منحنى أي معادلة مما يلي <u>**لا يقطع**</u> المحور الصادي في $(0, \pm 4)$:

ⓐ $y^2 - x^2 = 16$

ⓑ $4y^2 - 16x^2 = 64$

ⓒ $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$

ⓓ $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$

(10) نقطتا تقاطع القطع الزائد الذي معادلته: $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{49} = 1$ مع محور السينات هما:

ⓐ $(\pm 7, 0)$

ⓑ $(\pm 5, 0)$

ⓒ $(0, \pm 5)$

ⓓ ليس أيًّا مما سبق

(11) معادلتا الخطين المقاربين للقطع الزائد: $\frac{x^2}{8} - \frac{y^2}{32} = 2$ هما:

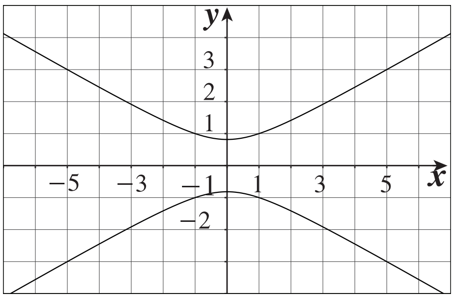
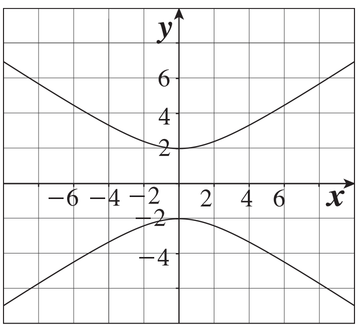
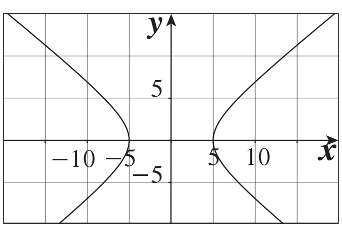
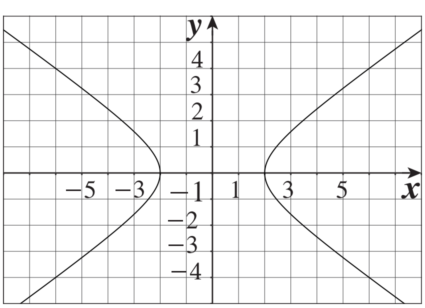
ⓐ $y = \pm 2x$

ⓑ $y = \pm \frac{1}{2}x$

ⓒ $y = \pm 4x$

ⓓ $y = \pm \frac{1}{4}x$

في التمارين (14–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع زائد بمعادلته.

القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{16}=1$	a 
(13) $3y^2-x^2=2$	b 
(14) $\frac{1}{2}x^2-y^2-2=0$	c 
	d 

تمرَّنْ
7–4

الاختلاف المركزي
Eccentricity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4—1)، حدّد نوع القطع في كل ممّا يلي، ثم أوجد معادلته.

(1) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{2}$ وإحدى بؤرتيه $F(0,3)$

(2) اختلافه المركزي $e = \frac{\sqrt{7}}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0,-\sqrt{7})$

(3) اختلافه المركزي $e = \frac{5}{3}$ وأحد رأسيه $A(-4,0)$

(4) اختلافه المركزي $e = \frac{3}{4}$ ومعادلة دليله $x = 8$

في التمرينين (6—5)، أوجد الاختلاف المركزي لكل قطع ممّا يلي حيث معادلته:

(5) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$

(6) $4y^2 - 9x^2 = 36$

في التمرينين (8—7)، أوجد الرأسين والبؤرتين والاختلاف المركزي ومعادلتي الدليلين للقطع الزائد.

(7) المعادلة: $\frac{x^2}{7} - \frac{y^2}{16} = 1$

(8) المعادلة: $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{4} = 1$

(9) مسار الأرض حول الشمس هو قطع ناقص، حيث تقع الشمس عند إحدى بؤرتيه. إذا كان طول المحور الأكبر للقطع $300\,000$ km واختلافه المركزي $e = 0.017$. فأوجد أكبر وأصغر بُعد للأرض عن الشمس.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمرينين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $e < 1$، فإن القطع هو قطع ناقص. (a) (b)

(2) إذا $a = 6$ ، $b = 9$ في القطع الزائد فإنّ $c = 3\sqrt{13}$ (a) (b)

(3) معادلتا المقاربين للقطع الزائد $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{9} = 1$ هما: $y = \frac{-1}{2}x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ (a) (b)

(4) إذا كانت معادلة القطع الناقص هي: $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$، فإن طول محوره الأكبر هو 6 وطول محوره الأصغر هو 14.

ⓐ ⓑ

(5) لأيّ معادلة قطع مكافئ فإنّ $e=1$

ⓐ ⓑ

(6) المحور القاطع للقطع الزائد $\frac{y^2}{15}-\frac{x^2}{10}=1$ ينطبق على محور الصادات.

ⓐ ⓑ

(7) رأسا القطع الناقص الذي معادلته: $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ هما: $(6,0)$, $(-6,0)$

ⓐ ⓑ

في التمارين (13–8)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كانت $a=7$ ، $c=2\sqrt{10}$ ، فإن معادلة القطع المخروطي الناتج هي:

ⓐ $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$

ⓑ $\frac{x^2}{49}+\frac{y^2}{9}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{7}+\frac{y^2}{3}=1$

ⓓ $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{49}=1$

(9) أيّ معادلة مما يلي تمثل قطعًا زائدًا معادلة أحد دليليه $y=\frac{25}{7}$؟

ⓐ $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{24}=1$

ⓑ $\frac{x^2}{24}-\frac{y^2}{25}=1$

ⓒ $\frac{y^2}{25}-\frac{x^2}{24}=1$

ⓓ $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{24}=1$

(10) إذا كانت معادلة أحد المقاربين $y=\frac{-7}{5}x$ والاختلاف المركزي $e=\frac{\sqrt{74}}{5}$ فمعادلة القطع الزائد هي:

ⓐ $\frac{y^2}{7}-\frac{x^2}{5}=1$

ⓑ $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{5}=1$

ⓒ $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{25}=1$

ⓓ $\frac{x^2}{25}-\frac{y^2}{49}=1$

(11) الاختلاف المركزي للمعادلة $\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}=1$ هو:

ⓐ $\frac{\sqrt{11}}{6}$

ⓑ $\frac{\sqrt{11}}{5}$

ⓒ $\frac{36}{25}$

ⓓ $\frac{25}{36}$

(12) معادلة قطع ناقص إحدى بؤرتيه $(0,4)$ وأحد رأسيه $(0,-5)$ هي:

ⓐ $\frac{y^2}{9}+\frac{x^2}{25}=1$

ⓑ $\frac{y^2}{4}+\frac{x^2}{5}=1$

ⓒ $\frac{y^2}{25}+\frac{x^2}{9}=1$

ⓓ $\frac{y^2}{5}+\frac{x^2}{3}=1$

(13) لأيّ قطع ناقص يكون:

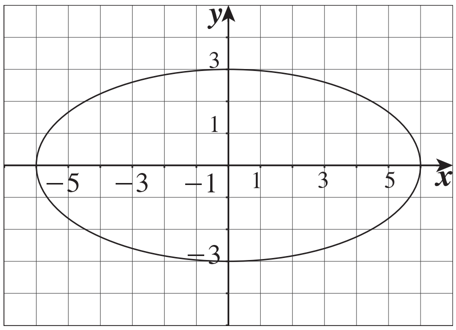
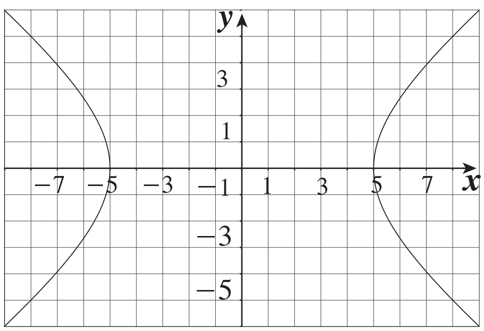
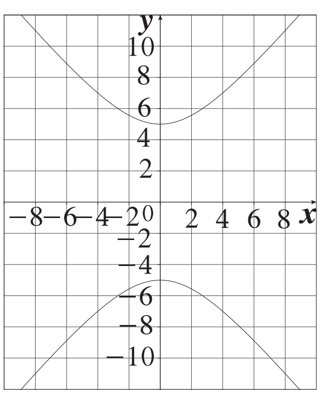
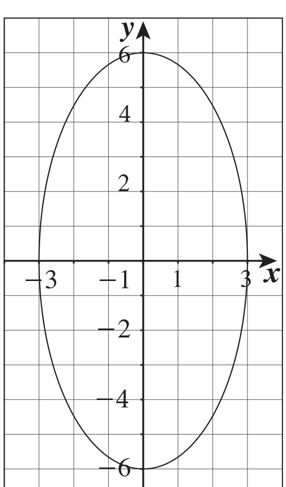
ⓐ $a>c$

ⓑ $a<c$

ⓒ $a=ec$

ⓓ $a=c$

في التمارين (16–14)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتصل بيان كل قطع مخروطي بمعادلته.

القائمة (2)	القائمة (1)
a 	**(14)** $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{16} = 1$
b 	**(15)** $\frac{y^2}{36} + \frac{x^2}{9} = 1$
c 	**(16)** $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{9} = 1$
d 	

اختبار الوحدة السابعة

في التمارين (4—1)، حدّد نوع القطع المخروطي، ثم اكتب معادلته بالصورة العامة، وحدّد البؤرتين والمركز.

(1) $4y^2 - 9x^2 - 36 = 0$

(2) $-2x^2 + 3y^2 + 10 = 0$

(3) $2x^2 + y^2 = 9$

(4) $2x^2 - y^2 + 6 = 0$

في التمارين (10—5)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(5) $\dfrac{x^2}{2^2} + \dfrac{y^2}{5^2} = 1$

(6) $y^2 = 5x$

(7) $\dfrac{x^2}{4} - \dfrac{y^2}{9} = 1$

(8) $\dfrac{x^2}{18^2} + \dfrac{y^2}{10^2} = 1$

(9) $y^2 = -3x$

(10) $\dfrac{y^2}{16} - \dfrac{x^2}{9} = 1$

(11) إذا كان $a = b = r$ ، فسّر لماذا يكون القطع الناقص الذي معادلته $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ دائرة مركزها $(0,0)$ ونصف قطرها r.

(12) أوجد معادلة تنمذج مسار سفينة فضائية حول أحد الكواكب إذا كان:

$a = 107124 \text{ km} \ , \ c = 213125.9 \text{ km}$

(13) لتكن M نقطة متغيرة على قطع زائد حيث بؤرتيه $F_1(155,0) \ , \ F_2(-155,0)$

أوجد معادلة القطع الزائد إذا كان $|MF_1 - MF_2| = 80$

(14) **(a)** حدّد نوع القطع المخروطي حيث اختلافه المركزي $e = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

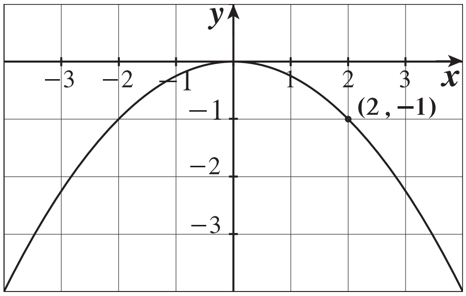
(b) إذا كان مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ أوجد a , b علمًا أنّ معادلة إحدى دليليه هي $x = 4$

(c) اكتب معادلة القطع المخروطي.

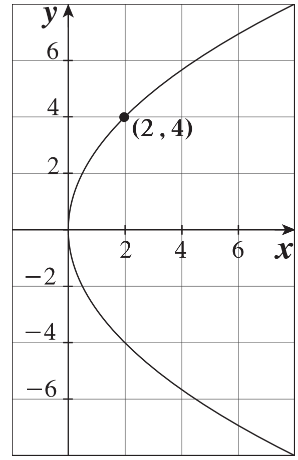
(15) اكتب معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e = \dfrac{5}{4}$ وإحدى بؤرتيه $F(0 \ , \ -5)$

في التمارين (19–16)، اكتب معادلة القطع المخروطي الموضّح في الرسم.

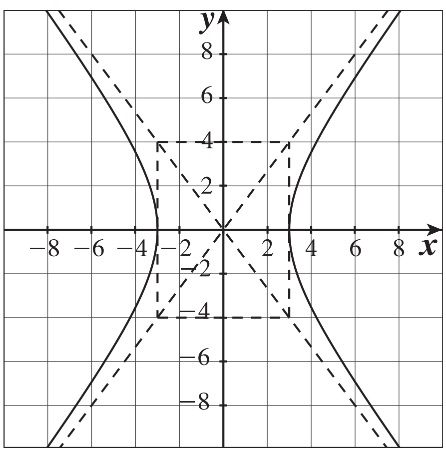
(16)



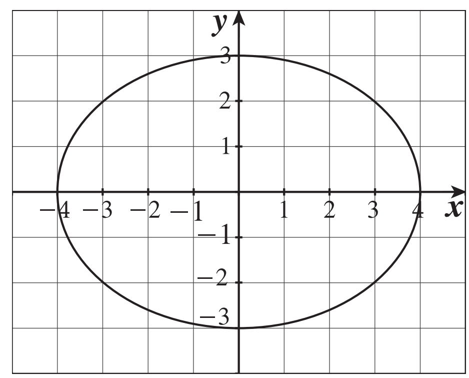
(17)



(18)



(19)



(20) أوجد معادلة قطع زائد إذا كان محوره الأكبر ينطبق على محور الصادات وطوله 12 والمسافة بين البؤرتين 20.

تمارين إثرائية

(1) أوجد معادلات الخطوط المقاربة للقطع الزائد: $\frac{x^2}{49}-\frac{y^2}{9}=1$، ومن ثم ارسم بيان هذا القطع الزائد.

(2) النقطتان الطرفيتان للمحور الأكبر في قطع ناقص إحداثياتهما $(-10,0)$، $(10,0)$ وإحدى النقاط الطرفية للمحور الأصغر هي $(0,7)$. أوجد إحداثيات بؤرتيه.

(3) لتكن المعادلة: $mx^2+(2m+1)y^2+(m-1)x=0$

حدّد m لتكون هذه المعادلة معادلة قطع مكافئ، ثم عدّد خواصه.

(4) لتكن المعادلة: $(m-1)x^2-(2m+1)y^2+2m+3=0$

إذا $m=2$، فحدّد ما تمثّله المعادلة، ثم أوجد خواصه.

(5) لتكن المعادلتان: $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{4}=1$, $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{25}=1$

(a) حدّد ما تمثله كل معادلة.

(b) أوجد نقاط التقاطع مستخدمًا المنحنيين اللذين يمثلاهما.

(c) علّل النتيجة التي حصلت عليها في السؤال **(b)** مستخدمًا عمليّات حسابيّة.

(6) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e=\frac{7}{5}$ ومعادلة إحدى دليليه $y=\frac{25}{7}$.

(7) أوجد معادلة قطع مخروطي مركزه نقطة الأصل $(0,0)$ حيث اختلافه المركزي $e=\frac{5}{7}$ وإحدى بؤرتيه $F(-5,0)$.

(8) أوجد معادلة القطع الزائد حيث بؤرتيه $F_2(\sqrt{34},0)$, $F_1(-\sqrt{34},0)$؛ وأحد خطّيه المقاربين يمر بالنقطة $A(3,5)$.

(9) أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الأصل وميل أحد الخطين المقاربين 2 وإحدى بؤرتيه $F(0,-\sqrt{5})$.

في التمارين (14–10)، أوجد: الاختلاف المركزي، البؤرة (البؤرتين)، معادلة الدليل (معادلتي الدليلين)، معادلتي الخطين المقاربين (في القطع الزائد).

(10) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

(11) $8y^2-25x^2=200$

(12) $x^2=-2y$

(13) $y^2=-x$

(14) $5x^2-9y^2=45$

تمرَّنْ
8-1

المتغيرات العشوائية المتقطعة

Discrete Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) في تجربة إلقاء قطعة نقود مرتين متتاليتين، إذا كان المتغيّر العشوائي X يعبر عن عدد الصور فأوجد:

(a) فضاء العينة (S) وعدد عناصره $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال وقوع كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي x : $f(x_i) = P(X = x_i)$

(d) دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي X.

(2) في تجربة إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية، أوجد مجموعة القيم للمتغيرات العشوائية التالية وحدد فيما إذا كانت متغيرات عشوائية متقطعة أم لا:

(a) المتغير العشوائي X الذي يمثل عدد الكتابات.

(b) المتغير العشوائي Y الذي يمثل ربع عدد الكتابات.

(c) المتغير العشوائي Z الذي يمثل عدد الكتابات مضافًا له 1.

(3) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.3	K	0.2	0.3

فأوجد قيمة K.

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو: $\{1, 2, 3, 4\}$ وكان $f(1) = 0.1$ ، $f(3) = 0.4$ ، $f(4) = 0.2$.
فأوجد $f(2)$ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(5) صندوق يحوي 10 كرات متماثلة منها 6 كرات حمراء و4 كرات بيضاء سحبت 5 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات البيضاء.
فأوجد ما يلي:

(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(6) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.3	0.4	0.1

فأوجد التوقع μ للمتغير العشوائي X.

(7) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	7	8	9	10
$f(x)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين σ^2.

(c) الانحراف المعياري (σ).

(8) الجدول التالي يبيّن دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	0	1	2	3	4
$f(x)$	0.2	0.15	0.1	0.25	0.3

إذا كانت F دالة التوزيع التراكمي للمتغير العشوائي X.

فأوجد: $F(0)\,,F(1)\,,F(2)\,,F(3)\,,F(3.5)\,,F(4)\,,F(5)$

(9) الجدول التالي يبيّن بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	-1	3	5	7
$F(x)$	0.1	0.45	0.7	1

أوجد:

(a) $P(-1 < X \leqslant 5)$

(b) $P(3 < X \leqslant 7)$

(c) $P(X > 3)$

(10) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 8\ ,\ P = 0.3$

فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \leq 5)$

(11) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا ذو حدين ومعلمتيه هما: $n = 10$, $P = 0.5$
فأوجد:

(a) $P(X = 0)$

(b) $P(2 < X \leq 4)$

(12) ينتج مصنع 100 وحدة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج الوحدات المعيبة 0.03، فأوجد التوقع والتباين والانحراف المعياري لعدد الوحدات المعيبة في يوم واحد.

(13) إذا رمينا قطعة نقود معدنية 12 مرّة، أوجد التوقّع والتباين إذا كان المتغير العشوائي X هو ظهور صورة.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–9)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) التوقع هو القيمة التي تقيس تشتت قيم المتغير العشوائي المتقطع عن قيمته المتوسطة. (a) (b)

(2) التباين هو القيمة التي تتجمع حولها القيم الممكنة للمتغير العشوائي المتقطع. (a) (b)

(3) دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي المتقطع عند القيمة a هي احتمال وقوع المتغير العشوائي X بحيث يكون X أصغر من أو يساوي a. (a) (b)

(4) التوزيع التالي يمثل دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير X.

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.1	0.05	0.4	0.4

(a) (b)

(5) قيمة K التي تجعل التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي 1 لدالة التوزيع الاحتمالي f

x	2	1	0
$f(x)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	K

هي صفر. (a) (b)

(6) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون:

$$P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$$

(a) (b)

(7) لدالة توزيع تراكمي F للمتغير العشوائي X يكون:

$$P(X < a) = 1 - F(a)$$

(a) (b)

(8) مدرسة فيها عدد الطلبة 300 طالب فإذا كانت نسبة النجاح 0.6 فإن التوقع لعدد الطلبة الناجحين هو 150 طالبًا.

ⓐ ⓑ

(9) عند إلقاء قطعة نقود ثلاث مرات متتالية فإن $n(S) = 6$.

ⓐ ⓑ

في التمارين (10–21)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(10) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-1	0	1	2
$f(x)$	0.2	0.2	K	0.2

فإن قيمة K هي:

ⓐ 0.2 ⓑ 0 ⓒ 0.4 ⓓ 0.3

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	1	2	3
$f(x)$	K	$2K$	$2K$

فإن قيمة K تساوي:

ⓐ 0.5 ⓑ 0.2 ⓒ 1 ⓓ 0.4

في التمارين (12–14)، استخدم الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$f(x)$	0.2	0.4	0.1	0.3

حيث f هي دالة التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي المتقطع X.

(12) $F(-1)$

ⓐ 0 ⓑ 0.2 ⓒ 0.4 ⓓ 0.6

(13) $F(1.5)$

ⓐ 0.4 ⓑ 0.2 ⓒ 0 ⓓ 0.6

(14) $F(4)$

ⓐ 0.2 ⓑ 0.1 ⓒ 0.4 ⓓ 1

(15) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا دالة توزيع الاحتمالي f هي:

x	0	1	2
$f(x)$	0.25	0.50	0.25

فإن التوقع له يساوي:

(a) 1 (b) 1.25 (c) 1.5 (d) 0.5

(16) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا لدالة التوزيع الاحتمالي f وكان التوقع = 0.5 ، $\sum x^2 f(x) = 4.25$،
فإن الانحراف المعياري هو:

(a) 4 (b) 2 (c) 3.75 (d) 1

(17) إذا كانت بعض قيم دالة التوزيع التراكمي F للمتغير العشوائي X معطاة في الجدول التالي:

x	0	1	2	3
$F(x)$	0.1	0.3	0.7	1

فإن $f(2)$ تساوي:

(a) 0.7 (b) 0.3 (c) 0.4 (d) 1

(18) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X هي:

x	0	1	2
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{9}$	$\frac{1}{9}$

فإن التوقع μ للمتغير العشوائي X يساوي:

(a) 1 (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{7}{9}$ (d) 0

(19) عند إلقاء قطعة نقود منتظمة أربع مرات متتالية فإن التباين σ^2 للمتغير العشوائي X «ظهور صورة» يساوي:

(a) 2 (b) 1 (c) $\frac{1}{2}$ (d) 4

(20) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا يأخذ القيم 1.5 , 1 , 1– وكان: $P(X=-1)=0.6$, $P(X=1)=0.3$
فإن $P(X>0)$ يساوي:

(a) 0.6 (b) 0.9 (c) 0.4 (d) 0.7

(21) ينتج مصنع سيارات 200 سيارة في الشهر. إذا كانت نسبة السيارات المعيبة 0.02 فإن التوقع لعدد السيارات المعيبة المنتجة في الشهر يساوي:

(a) 2 (b) 4 (c) 20 (d) 40

المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة)
Continuous Random Variables

المجموعة A تمارين مقالية

(1) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5} & : \quad 0 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 5)$
(b) $P(X = 3)$
(c) $P(X \le 2)$
(d) $P(X > 2)$

(2) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & : \quad 2 \le x \le 4 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(2 \le X \le 4)$
(b) $P(X \ge 2.5)$

(3) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{9}x & : \quad 0 \le x \le 3 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0 \le X \le 3)$
(b) $P(X < 1)$
(c) $P(X \ge 1)$

(4) لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{6} & : \quad -1 \le x \le 5 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) أثبت أن الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم.

(c) أوجد $P(0 < X \le 3)$.

(d) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

(5) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{7} & : \quad 0\le x\le 7\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

(a) أثبت أن الدالة f هي دالة كثافة احتمال.

(b) أوجد $\left(0\le X\le \frac{7}{8}\right)$.

(c) أوجد التوقّع والتباين للدالة f.

(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X فأوجد:

(a) $P(z\le 2.16)$ **(b)** $P(z\ge 2.51)$ **(c)** $P(1.5\le z\le 2.4)$

(7) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z\le -0.64)$ **(b)** $(-1.7\le z\le 2.85)$ **(c)** $P(-1.23\le z\le 0.68)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (7—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة، و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) نسبة الرطوبة خلال شهر هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(2) عدد أحرف كلمات كتاب هو متغير عشوائي متصل. (a) (b)

(3) إذا كانت الدالة f معرفة كالتالي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2} & : \quad 0\le x\le 1\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن الدالة f هي دالة كثافة احتمال. (a) (b)

(4) إذا كانت X متغيرًا عشوائيًا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}2 & : \quad 0\le x\le \dfrac{1}{2}\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن $P(X\ge 2)=1$ (a) (b)

(5) إذا كانت الدالة f هي دالة كثافة احتمال تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{3} & : \quad 0\le x\le 3\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن التباين للدالة f هو $\sigma^2=\frac{3}{4}$. (a) (b)

(6) من خواص التوزيع الطبيعي أنه متماثل حول $x=\mu$. (a) (b)

(7) المساحة تحت منحنى التوزيع الطبيعي تساوي الواحد. (a) (b)

في التمارين (8–17)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(8) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x & : \quad 0\le x\le 2\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن $P(X=1)$ يساوي:

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ 0 ⓒ 1 ⓓ ليس أيًّا مما سبق

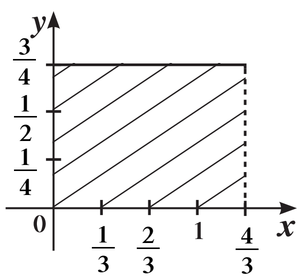
(9) إذا كان X متغيّرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5}x & : \quad -2\le x\le 3\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فإن $P(X\le -2.5)$ يساوي:

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{5}$ ⓓ $\frac{1}{10}$

في التمارين (10–16)، أجب عن الأسئلة من خلال الرسم البياني في الشكل المقابل:



(10) الدالة التي تعبّر عن الرسم البياني التالي هي:

ⓐ $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<\frac{3}{4}\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

ⓑ $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<\frac{4}{3}\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

ⓒ $f(x)=\begin{cases}\frac{4}{3} & : \quad 0<x<\frac{4}{3}\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

ⓓ $f(x)=\begin{cases}\frac{3}{4} & : \quad 0<x<4\\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$

(11) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي:

ⓐ الطبيعي ⓑ ذات الحدين

ⓒ الطبيعي المعياري ⓓ المنتظم

(12) التوقّع هو:

ⓐ $\frac{4}{5}$ ⓑ $\frac{2}{3}$ ⓒ $\frac{4}{3}$ ⓓ $\frac{3}{4}$

(13) التباين هو:

ⓐ $\frac{4}{27}$ ⓑ $\frac{16}{9}$ ⓒ $\frac{16}{108}$ ⓓ $\frac{108}{16}$

(14) $P\left(X < \frac{4}{6}\right) =$

ⓐ $\frac{1}{3}$ ⓑ $\frac{1}{4}$ ⓒ $\frac{1}{6}$ ⓓ $\frac{1}{2}$

(15) $P\left(X > \frac{4}{12}\right) =$

ⓐ $\frac{2}{6}$ ⓑ $\frac{6}{2}$ ⓒ $\frac{3}{4}$ ⓓ 1

(16) $P(0 < X < 1) =$

ⓐ $\frac{4}{5}$ ⓑ $\frac{1}{3}$ ⓒ 1 ⓓ $\frac{3}{4}$

(17) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي فإن: $P(0 \le z \le 2.35)$ يساوي:

ⓐ 0.9906 ⓑ 0.5 ⓒ 0.4906 ⓓ 0.218

اختبار الوحدة الثامنة

(1) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متقطعًا مداه هو $\{2,3,4,5\}$ وكان $f(2) = 0.3$ ، $f(3) = 0.2$ ، $f(4) = 0.1$
فأوجد $f(5)$ ، ثم اكتب دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(2) يحتوي صندوق على 8 كرات متماثلة منها: 5 كرات حمراء و3 كرات صفراء سحبت 4 كرات عشوائيًّا معًا من الصندوق. إذا كان المتغير العشوائي X يمثل عدد الكرات الصفراء، فأوجد ما يلي:

(a) عدد عناصر فضاء العينة $n(S)$.

(b) مدى المتغير العشوائي X.

(c) احتمال كل عنصر من عناصر مدى المتغير العشوائي X.

(d) دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X.

(3) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي لمتغير عشوائي متقطع X.

x	3	4	5	6
$f(x)$	$\frac{2}{11}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{3}{11}$	$\frac{1}{11}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(4) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X.

x	2	3	4	5	6
$f(x)$	0.14	0.16	0.35	0.15	0.2

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(7)$, $F(6)$, $F(5)$, $F(4)$, $F(3.5)$, $F(3)$, $F(2)$, $F(1)$

(5) ينتج مصنع أجبان 250 1 علبة يوميًّا، إذا كانت نسبة إنتاج العلب الفاسدة 0.04، فأوجد ما يلي لمعرفة عدد العلب الفاسدة في أحد الأيام:

(a) التوقع (μ)

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(6) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا ودالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{5} & : \quad -2\le x\le 3\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P(0\le X\le 3)$ **(b)** $P(-2\le X\le 0)$

(c) $P(X=2)$ **(d)** $P(-1\le X\le 2)$

(7) إذا كان X متغيرًا عشوائيًّا متصلًا. دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{9}{2}x & : \quad 0\le x\le \frac{2}{3}\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(0\le X\le \frac{1}{3}\right)$ **(b)** $P\left(X\ge \frac{1}{3}\right)$

(8) الدالة f تتبع التوزيع الاحتمالي المنتظم وهي معرّفة كما يلي:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{8} & : \quad -3\le x\le 5\\ 0 & : \quad \text{في ما عدا ذلك}\end{cases}$$

(a) أثبت أن f هي دالة كثافة احتمال.

(b) $P(-1\le X\le 3)$

(c) أوجد التوقع والتباين للدالة f.

(9) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري للمتغير العشوائي X، فأوجد:

(a) $P(z\le 2.24)$ **(b)** $P(z\ge 1.52)$ **(c)** $P(1.4\le z\le 2.6)$

(10) يمثّل المتغير X درجات الطلاب في مادة الرياضيات. إذا كان توزيع هذه الدرجات يتبع التوزيع الطبيعي الذي وسطه $\mu = 40$ وانحرافه المعياري $\sigma = 8$ فأوجد:

(a) $P(30<X<65)$ **(b)** $P(X\ge 45)$

(11) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	0.16	0.24	K	0.15	0.2

فأوجد قيمة K

(12) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z\le 1.45)$ **(b)** $P(z>0.27)$

(c) $P(-1.32\le z\le 1.75)$ **(d)** $P(-2.87\le z\le -1.42)$

تمارين إثرائية

(1) متغير عشوائي X يتبع توزيعًا طبيعيًّا توقعه $\mu = 55$ وتباينه $\sigma^2 = 25$، أوجد:

(a) $P(X > 55)$

(b) $P(X < 50)$

(c) $P(30 < X < 40)$

(2) إذا كانت دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي X هي:

x	2	4	6	8	10	12
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	K	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

(a) أوجد K.

(b) ارسم دالة التوزيع الاحتمالي f.

(c) أوجد دالة التوزيع التراكمي F.

(d) ارسم دالة التوزيع التراكمي F.

(3) مدفع يتبع مداه توزيعًا طبيعيًّا توقعه 14 km وتباينه 1 km.

(a) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة أبعد من 15 km؟

(b) ما احتمال أن تصل القذيفة فقط إلى مسافة أقل من 11 km؟

(c) ما احتمال أن تصل القذيفة إلى مسافة بين 13 km, 15 km؟

(4) إذا كان X متغيرًا عشوائيًا متصلًا، دالة كثافة الاحتمال له هي:

$$f(x) = \begin{cases} 2x & : \quad 0 \le x \le 2 \\ 0 & : \text{في ما عدا ذلك} \end{cases}$$

فأوجد:

(a) $P\left(\frac{1}{2} \le X \le \frac{3}{2}\right)$

(b) $P\left(X \ge \frac{1}{2}\right)$

(5) عند إلقاء حجر نرد منتظم 7 مرات متتالية، أوجد:

(a) احتمال ظهور العدد 2 خمس مرات.

(b) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأقل.

(c) احتمال ظهور العدد 2 مرة واحدة على الأكثر.

(6) إذا كان z يتبع التوزيع الطبيعي المعياري فأوجد:

(a) $P(z \leq 2.65)$

(b) $P(-2.85 \leq z \leq -1.96)$

(c) $P(z \geq 1.56)$

(7) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f لمتغير عشوائي متقطع X .

x	1	2	3	4	5
$f(x)$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$

أوجد:

(a) التوقع (μ).

(b) التباين (σ^2).

(c) الانحراف المعياري (σ).

(8) يبيّن الجدول التالي دالة التوزيع الاحتمالي f للمتغير العشوائي المتقطع X .

x	3	4	5	6
$f(x)$	0.17	0.24	0.23	0.36

أوجد باستخدام دالة التوزيع التراكمي F: $F(6.5)$, $F(6)$, $F(5)$, $F(4.5)$, $F(4)$, $F(3)$, $F(2)$