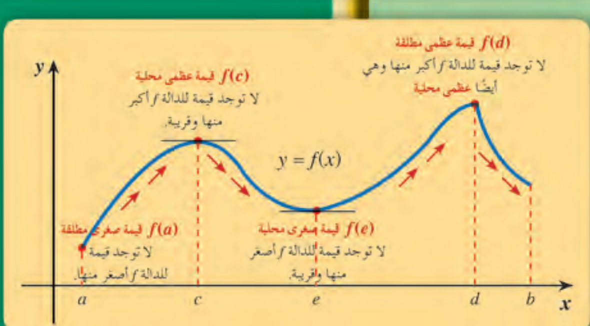
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب الطالب



الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأوّل

١٢

الطبعة الثانية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي
الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي　　　أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٣٧ - ١٤٣٨ هـ

٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. صديقة أحمد صالح الأنصاري
أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. مجدي محمد يس دراز
أ. يحيى عبد السلام خالد عقل

أ. وضحى ابراهيم مزعل الدوسري

الطبعة الأولى ٢٠١٤

الطبعة الثانية ٢٠١٦

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطيط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوحدة الأولى

النهايات والاتصال

Limits and Continuity

مشروع الوحدة: السرعة اللحظية

1 **مقدمة المشروع:** تسقط صخرة من مرتفع. يمكن ضبط زمن السقوط وحساب السرعة المتوسطة لسقوط الصخرة بسهولة، ولكن في لحظة ما أثناء السقوط ما هي سرعة الصخرة؟

2 **الهدف:** معرفة سرعة الصخرة عند اللحظة $t = 2\ s$.

3 **اللوازم:** أوراق رسم، آلة حاسبة علمية، حاسوب، جهاز عرض.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

تسقط الصخرة وفق العلاقة (قانون جاليليو للسقوط الحر): $d(t) = 4.9t^2$ ، حيث:

$d(t)$ المسافة التي تقطعها الصخرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني s

a احسب السرعة المتوسطة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$ خلال أول ثانيتين من السقوط.

b أكمل الجدول التالي الذي يمثّل السرعة المتوسطة للصخرة في الفترة الزمنية من اللحظة $t = 2$ إلى اللحظة $t = 2 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق في الزمن.

السرعة المتوسطة $\frac{\Delta d}{\Delta t}$	مدة الفترة الزمنية h بالثانية
	0.4
	0.1
	0.05
	0.01
	0.001
	0.0001

c ما الذي تلاحظه بالنسبة إلى معدل السرعة عندما تقترب h كثيرًا من الصفر؟

d ما تقريبًا سرعة الصخرة عند $t = 2$؟

5 **التقرير:** ضع تقريرًا مفصّلًا يبيّن النتائج التي حصلت عليها مشيرًا إلى المعطيات من دروس الوحدة التي استفدت منها. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز العرض.

دروس الوحدة

الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- رسمت بيان الدالة التربيعية.
- رسمت بيانات دوال القوى.
- وصفت منحنيات كثيرات الحدود.
- أوجدت أصفار دالة كثيرة الحدود.
- تعلمت الكثير من المتطابقات المثلثية.
- رسمت بيانات بعض الدوال.

ماذا سوف تتعلم؟

- تعرّف مفهوم نهاية دالة عند نقطة.
- حساب نهايات بعض الدوال.
- استخدام نظريات النهايات.
- إلغاء العامل الصفري (صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$).
- نهايات تشمل على ∞، $-\infty$.
- صيغ غير معينة.
- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة لإيجاد بعض النهايات.
- تعرف اتصال دالة عند نقطة ودراسة الاتصال.
- تعرف بعض نظريات الاتصال الأساسية.
- بحث اتصال دالة ناتجة من تركيب دالتين.
- فهم معنى دالة متصلة على فترة.
- تعرف اتصال دالة على فترة.

المصطلحات الأساسية

نهاية دالة عند نقطة — النهاية من الجهتين — النهاية من جهة واحدة — العامل الصفري — صيغ غير معينة — نظرية الإحاطة — خط مقارب (محاذي) رأسي — خط مقارب (محاذي) أفقي — اللانهاية— اتصال دالة عند نقطة — نقاط الاتصال ونقاط الانفصال — التخلص من الانفصال — دالة مركبة — اتصال دالة على فترة .

أضف إلى معلوماتك

في النصف الثاني من القرن الثامن عشر، كان الباحثون في الرياضيات قد أدركوا أنه بدون أسس منطقية، سيكون حساب التكامل والتفاضل محدودًا. طوّر أوغوستين لويس كوشي (Augustin–Louis Cauchy) نظرية في النهايات، فألغى معظم الشكوك حول صحة منطق حساب التكامل والتفاضل.

وصف المؤرخ هوارد إيف (Howard Eves) كوشي بأنه إضافة إلى كونه عالمًا رياضيًّا من الطراز الأوّل قدم الكثير لعالم الرياضيات فقد كان أيضًا محاميًّا (مارس المهنة لمدة أربعة عشر عامًا)، ومتسلق جبال، ورسام (استخدم الألوان المائية). ومن صفات كوشي التي ميزته عن معاصريه احترامه للبيئة ودفاعه عنها.

أوغوستين لويس كوشي
(Augustin–Louis Cauchy)

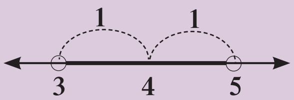
1-1

النهايات

Limits

عمل تعاوني

أوّلًا: أكمل الجدول التالي كما في **1** :

	الفترة المفتوحة	العدد في منتصف الفترة	التمثيل على خط الأعداد	صورة أخرى للفترة المفتوحة	بُعد العدد عن طرفي الفترة
1	$(3,5)$	4		$(4-1,4+1)$	1
2	$\left(\frac{1}{2}\ ,\ 1\frac{1}{2}\right)$				
3	$\left(1\frac{3}{4}\ ,\ 2\frac{1}{4}\right)$				
4	$(0,1)$				
5	$(2.9\ ,\ 3.1)$				
6	$(6.8\ ,\ 7.2)$				

ثانيًا: اكتب الفترة المفتوحة التي يبعد طرفاها بمقدار $\frac{1}{5}$ عن العدد الحقيقي 3.

ثالثًا: اكتب فترة مفتوحة يبعد طرفاها بمقدار a عن العدد الحقيقي c.

من «العمل التعاوني» السابق، **الفترة المفتوحة $(c-a\ ,\ c+a)$ تسمّى جوارًا للعدد c وفقًا للمعيار a حيث $a>0$.**

فمثلًا: الفترة المفتوحة $(3,5)$ هي جوار للعدد 4 وفقًا للمعيار 1.

والفترة $\left(1\frac{3}{4}\ ,\ 2\frac{1}{4}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{4}$.

وكذلك الفترة $\left(1\frac{99}{100}\ ,\ 2\frac{1}{100}\right)$ هي جوار للعدد 2 وفقًا للمعيار $\frac{1}{100}$.

وعليه يمكننا تحديد جوار لأي عدد باختيارنا معيارًا مناسبًا.

إذا كانت لدينا دالة معرّفة على فترة مفتوحة I من الأعداد الحقيقية وتحوي العدد c فإننا نقول إن هذه الدالة معرّفة في جوار للعدد c (أي I تحوي جوارًا للعدد c).

أما إذا كانت الدالة معرّفة عند جميع عناصر الفترة I ولكنها غير معرفة عند العدد c نفسه فإن الدالة تكون معرّفة في جوار ناقص للعدد c.

تعريف (1)

لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًّا.

نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.

سوف تتعلم

- النهاية عند النقطة.
- حساب النهايات من التمثيلات البيانية.
- حساب النهايات باستخدام النظريات.
- النهاية من جهة واحدة فقط أو من الجهتين.
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$.

المفردات والمصطلحات:

- جوار Neighbourhood
- المعيار Norm
- جوار ناقص Punctured Neighbourhood
- النهاية من جهة واحدة One-Sided Limit
- النهاية من الجهتين Two-Sided Limits
- صيغة غير معينة $\frac{0}{0}$ Indeterminate Form $\frac{0}{0}$

نشاط

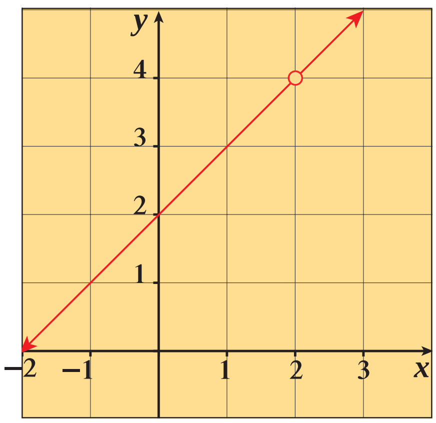
أولًا: لتكن الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$

a أوجد مجال الدالة f.

b هل يمكن إيجاد $f(2)$ ؟

c أكمل الجدول التالي:

x	...	1.9	1.99	1.999	1.9999	$\xrightarrow{...}$	2	$\xleftarrow{...}$	2.0001	2.001	2.01	2.1	
$f(x)$							غير معرّف						



d ماذا تلاحظ على قيم x؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

e ماذا تلاحظ على قيم $f(x)$ ؟

(هل تقترب من عدد محدد؟)

الشكل المقابل يمثل بيان f

ثانيًا:

a هل يمكن تبسيط الدالة السابقة f ؟ كيف؟

b ارسم بيان الدالة g حيث $g(x) = x + 2$

ثالثًا: قارن بين الدالتين f , g.

من النشاط السابق وجدت أن قيم $f(x)$ تقترب من العدد 4 كلما كانت x قريبة جدًّا من العدد 2 سواء من اليمين أو اليسار.

يسمى العدد 4 **نهاية الدالة f** عندما x تؤول إلى العدد 2. (تقترب باطراد من العدد 2 , $x \neq 2$)

ويعبّر عن ذلك بالصورة التالية:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = 4$$

وتقرأ كالتالي: نهاية $f(x)$ عندما x تؤول إلى 2 تساوي 4.

The limit of $f(x)$ as x approaches 2 equals 4

تعطينا النهايات لغة لوصف سلوك الدالة عندما تقترب مدخلات الدالة من قيمة معينة.

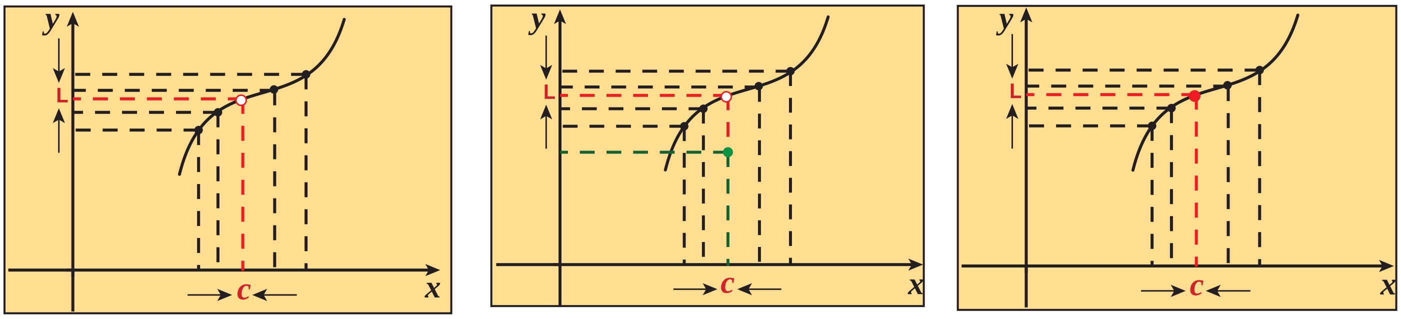
تعريف (2)

ليكن L , c عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c

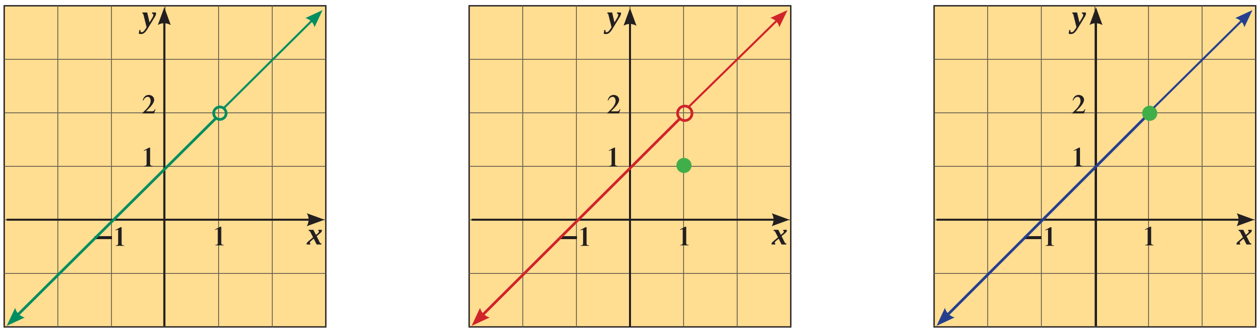
نكتب: $\lim_{x \to c} f(x) = L$

وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x \neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.

تبيّن الأشكال أدناه حقيقة وجود نهاية عندما $x \to c$ حيث لا تعتمد على كون الدالة معرّفة أو غير معرّفة عند c.



فعلى سبيل المثال في الدوال التالية:



a $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x - 1}$

b $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - 1}{x - 1} & : \ x \neq 1 \\ 1 & : \ x = 1 \end{cases}$

c $q(x) = x + 1$

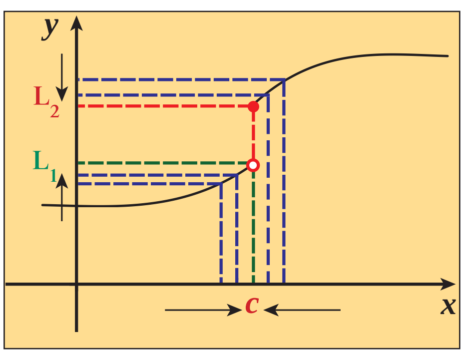
الدالة f لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أن f ليست معرّفة عند $x = 1$

الدالّة g لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ على الرغم من أنّ $g(1) \neq 2$

الدالّة q لها نهاية تساوي 2 عندما $x \to 1$ ، $q(1) = 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = \lim_{x \to 1} g(x) = \lim_{x \to 1} q(x) = 2$$

النهاية من جهة واحدة أو من جهتين One—Sided Limit and Two—Sided Limits



شكل (1)

أحيانًا تؤول قيم الدالة f لقيم مختلفة عندما تقترب x من عدد c من الجهتين.

إذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_1 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليسار

فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim_{x \to c^-} f(x) = L_1$

وتسمى **النهاية من جهة اليسار.**

وإذا كانت $f(x)$ تؤول إلى العدد L_2 عندما x تؤول إلى العدد c من جهة اليمين فإننا نعبر عن ذلك بالصورة التالية: $\lim_{x \to c^+} f(x) = L_2$

وتسمى **النهاية من جهة اليمين.**

نلاحظ في الشكل (1): $L_1 \neq L_2$

أي أن: $\lim_{x \to c^+} f(x) \neq \lim_{x \to c^-} f(x)$

ولذا نقول أن: $\lim_{x \to c} f(x)$ غير موجودة

نظرية (1)

يفرض أن L , c عددين حقيقيين

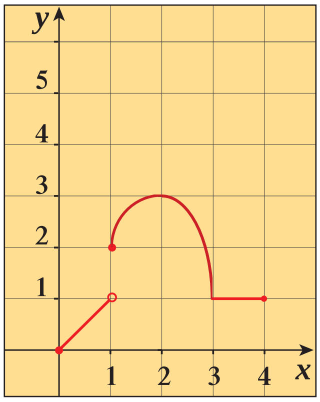
يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار

ويعبر عن ذلك: $$\lim_{x\to c} f(x) = L \Longleftrightarrow \lim_{x\to c^+} f(x) = L = \lim_{x\to c^-} f(x)$$

تدريب (1)

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة: $f:[0,4]\to\mathbb{R}$

أكمل ما يلي:

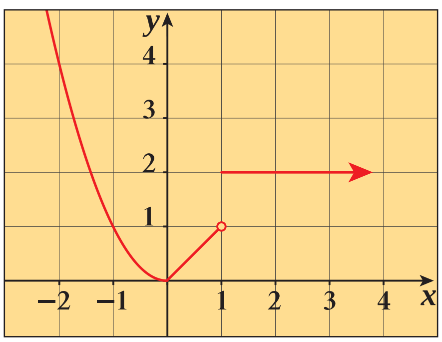


1. $\lim_{x\to 1^+} f(x)\ldots$
2. $\lim_{x\to 1^-} f(x)\ldots$
3. $\lim_{x\to 1} f(x)\ldots$
4. $\lim_{x\to 2^+} f(x)\ldots$
5. $\lim_{x\to 2^-} f(x)\ldots$
6. $\lim_{x\to 2} f(x)\ldots$
7. $\lim_{x\to 3^+} f(x)\ldots$
8. $\lim_{x\to 3^-} f(x)\ldots$
9. $\lim_{x\to 3} f(x)\ldots$
10. $\lim_{x\to 0^+} f(x)\ldots$
11. $\lim_{x\to 4^-} f(x)\ldots$

مثال (1)

الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



1. $\lim_{x\to 0} f(x)$
2. $\lim_{x\to 1} f(x)$
3. $\lim_{x\to 2} f(x)$
4. $\lim_{x\to -2} f(x)$

الحل:

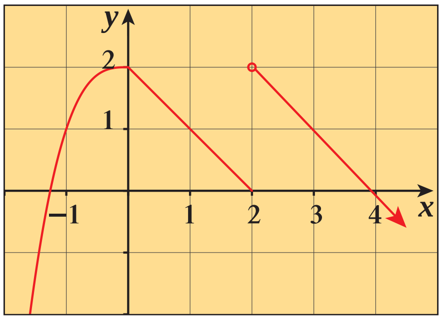
1. $\lim_{x\to 0} f(x) = 0$
2. $\because \lim_{x\to 1^-} f(x) = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = 2 \implies \lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$

   $\therefore \lim_{x\to 1} f(x)$ غير موجودة
3. $\lim_{x\to 2} f(x) = 2$
4. $\lim_{x\to -2} f(x) = 4$

حاول أن تحل

1 يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة f.

أوجد إن أمكن:



a $\lim\limits_{x \to -1} f(x)$

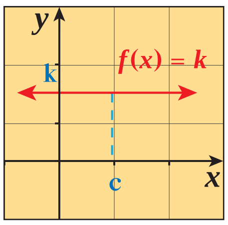
b $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$

c $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$

d $\lim\limits_{x \to 3} f(x)$

حساب النهايات Calculation of Limits

يمكننا حساب النهايات لبعض الدوال باستخدام النظريات التالية:

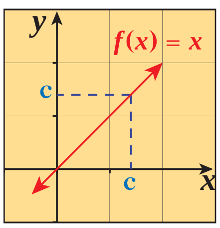


شكل (2)

نظرية (2)

إذا كانت f دالة: $f(x) = k$ وكانا k , c عددان حقيقيان فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} k = k$$



شكل (3)

نظرية (3)

إذا كانت f دالة: $f(x) = x$ وكان c عددًا حقيقيًّا فإن:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \lim_{x \to c} x = c$$

نظرية (4)

إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim\limits_{x \to c} g(x) = M$, $\lim\limits_{x \to c} f(x) = L$ فإن:

a قاعدة الجمع: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) + g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) + \lim\limits_{x \to c} g(x) = L + M$

b قاعدة الطرح: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) - g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) - \lim\limits_{x \to c} g(x) = L - M$

c قاعدة الضرب: $\lim\limits_{x \to c}(f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to c} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to c} g(x) = L \cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim\limits_{x \to c}(k \cdot f(x)) = k \cdot \lim\limits_{x \to c} f(x) = k \cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x \to c} f(x)}{\lim\limits_{x \to c} g(x)} = \dfrac{L}{M}$, $M \neq 0$

مثال (2)

بفرض أنّ: $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $\lim_{x\to 1} f(x) = -2$

أوجد:

a $\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x))$

b $\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)}$

c $\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)}$

الحل:

a
$$\lim_{x\to 1}(f(x)-g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x) - \lim_{x\to 1} g(x)$$
$$= -2-5$$
$$= -7$$

b $\lim_{x\to 1} g(x) = 5$, $5 \neq 0$

$$\lim_{x\to 1}\frac{2f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1} 2f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)} = \frac{2\lim_{x\to 1} f(x)}{\lim_{x\to 1} g(x)}$$
$$= \frac{2(-2)}{5}$$
$$= \frac{-4}{5}$$
$$= -0.8$$

c
$$\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x)$$
$$= -2\times 5$$
$$= -10 \quad , \quad -10 \neq 0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{g(x)+4}{f(x)\cdot g(x)} = \frac{\lim_{x\to 1}(g(x)+4)}{\lim_{x\to 1}(f(x)\cdot g(x))}$$
$$= \frac{\lim_{x\to 1} g(x) + \lim_{x\to 1} 4}{\lim_{x\to 1} f(x)\cdot \lim_{x\to 1} g(x)}$$
$$= \frac{5+4}{-10}$$
$$= -\frac{9}{10}$$
$$= -0.9$$

حاول أن تحل

2 بفرض أنّ: $\lim_{x\to 2} g(x) = -3$, $\lim_{x\to 2} f(x) = 7$

أوجد:

a $\lim_{x\to 2}(f(x)+g(x))$

b $\lim_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x))$

c $\lim_{x\to 2}\left(\frac{8f(x)\cdot g(x)}{f(x)+g(x)}\right)$

نظرية (5): دوال كثيرات الحدود ودوال الحدوديات النسبيّة

Polynomial and Rational Functions

a إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1} c^{n-1} + \dots + a_0$$

b إذا كانت $f(x), g(x)$ كثيرتي حدود، c عددًا حقيقيًّا، فإنّ:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)} \quad , \quad g(c) \neq 0$$

ملاحظة: يمكن تطبيق نظرية a 5 على الدوال التي على الصورة: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_0$ ومجالها مجموعة جزئية من $\mathbb{R}$

مثال (3)

أوجد:

a $\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5)$

b $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2}$

c $\lim_{x \to 3} (x^2(2 - x))$

الحل:

a $\lim_{x \to -1} (x^4 - 2x^3 + 5) = (-1)^4 - 2(-1)^3 + 5$ نظرية (5)

$= 1 + 2 + 5$

$= 8$

b $g(x) = x + 2$ تحقق من أن المقام $0 \neq$

$g(2) = 2 + 2 = 4 \quad , \quad 4 \neq 0$ أي أن المقام $\neq$ صفر

$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 2x + 4}{x + 2} = \frac{(2)^2 + 2(2) + 4}{2 + 2}$ نظرية(5)

$= \frac{4 + 4 + 4}{4}$

$= \frac{12}{4}$

$= 3$

c $\lim_{x \to 3} (x^2(2 - x)) = \lim_{x \to 3} (2x^2 - x^3)$ نظرية (5)

$= 2(3)^2 - (3)^3$

$= 18 - 27$

$= -9$

حاول أن تحل

3 a هل يمكن حل c في المثال (3) بطريقة أخرى؟

b أوجد:

1 $\lim_{x \to 1} (x^3 + 3x^2 - 2x - 17)$

2 $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 + 5x + 6}{x + 2}$

نظريات حساب النهايات صحيحة عند حساب النهاية من جهة واحدة.

مثال (4)

إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}3x+2 & : x<1\\ 5 & : x=1\\ \dfrac{5}{x} & : x>1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}(3x+2)=3(1)+2=5$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{5}{x}=\frac{5}{1}=5$$

(يمكن التحقق من أن نهاية المقام $\neq 0$)

$$\because \lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^-} f(x)=5$$

$$\therefore \lim_{x\to 1} f(x)=5$$

حاول أن تحل

4 إذا كانت الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}x^2-3 & : x<2\\ x-1 & : x>2\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

مثال (5)

إذا كانت الدالة g :

$$g(x)=\begin{cases}x^2-2 & : x\leqslant 0\\ 1-2x & : x>0\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$

الحل:

النهاية من جهة اليسار

$$\lim_{x\to 0^-} g(x)=\lim_{x\to 0^-}(x^2-2)=-2$$

النهاية من جهة اليمين

$$\lim_{x\to 0^+} g(x)=\lim_{x\to 0^+}(1-2x)=1$$

$$\because \lim_{x\to 0^+} g(x)\neq \lim_{x\to 0^-} g(x)$$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة

حاول أن تحل

5 إذا كانت الدالة g :

$$g(x)=\begin{cases}x^3+x & : x>1\\ \dfrac{x}{x^2+1} & : x\leqslant 1\end{cases}$$

فأوجد إن أمكن $\lim\limits_{x\to 1} g(x)$

تذكر:

$$|x-a| = \begin{cases} x-a : x \geqslant a \\ -x+a : x < a \end{cases}$$

الربط بالحياة:

يقدّر الباحثون عدد الحيوانات المهددة بالانقراض باستخدام علاقات وضعوها من خلال مراقباتهم.ويستخدمون النهايات لتوقع عدد هذه الحيوانات في الأمد البعيد.

تدريب (2)

لتكن $f(x) = \dfrac{|x-1|}{x-1}$ حيث $x \neq 1$

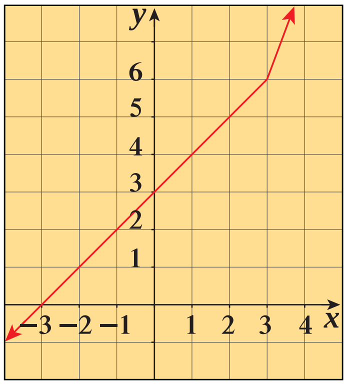
a اكتب $f(x)$ بدون استخدام رمز القيمة المطلقة. (إعادة تعريف المطلق)

b أوجد $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ و $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$

c هل للدالّة f نهاية عندما $x \to 1$؟ فسّر.

مثال (6)

لتكن: $f(x) = |x-3| + 2x$ الممثلة بالشكل.



a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to 3$؟

الحل:

a
$$f(x) = \begin{cases} x-3+2x & : \quad x \geqslant 3 \\ -x+3+2x & : \quad x < 3 \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 3x-3 & : \quad x \geqslant 3 \\ x+3 & : \quad x < 3 \end{cases}$$

b
$$\lim_{x\to 3^+} f(x) = \lim_{x\to 3^+} (3x-3) = 3(3) - 3 = 6$$
$$\lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^-} (x+3) = 3+3 = 6$$

c
$$\because \lim_{x\to 3^-} f(x) = \lim_{x\to 3^+} f(x) = 6$$
$$\therefore \lim_{x\to 3} f(x) = 6$$

$\therefore$ للدالة f نهاية عندما $x \to 3$ وهذه النهاية تساوي 6.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = x^2 - |x+2|$

a اكتب $f(x)$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b أوجد: $\lim\limits_{x\to -2^-} f(x)$ ، $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)$

c هل للدالة f نهاية عندما $x \to -2$؟

قاعدة القوة

تعلمت مما سبق أن

$$\lim_{x\to 2}(x+1) = 2+1 = 3$$

$$\lim_{x\to 2}(x+1)^2 = \lim_{x\to 2}((x+1)\cdot(x+1))$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)\cdot \lim_{x\to 2}(x+1) = (3)^2$$
$$\lim_{x\to 2}(x+1)^3 = \lim_{x\to 2}((x+1)^2(x+1))$$
$$= \lim_{x\to 2}(x+1)^2\cdot \lim_{x\to 2}(x+1) = (3)^2\cdot 3 = 3^3$$

وبالمثل يمكن إيجاد قيمة $\lim_{x\to 2}(x+1)^n$ حيث n عددًا صحيحًا موجبًا وهي تساوي $(3)^n$.

نظرية (6)

بفرض أن $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة وكانت n عددًا صحيحًا موجبًا فإن:

a) $\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$

b) $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون $c > 0$)

c) $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$)

ملاحظة: سنكتفي بدراسة حالات الجذور التربيعية والتكعيبية للدوال فقط.

مثال (7)

أوجد:

a) $\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5$

b) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3}$

c) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

الحل:

a) $\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)^5 = \left(\lim_{x\to -1}(x^2-3x-1)\right)^5 = 3^5 = 243$

b) $\lim_{x\to 2}\sqrt[3]{x-3} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 2}(x-3)}$
$= \sqrt[3]{2-3} = \sqrt[3]{-1} = -1$

c) $\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2}$

$\lim_{x\to 3}(x-2) = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$ تحقّق أن نهاية المقام $\neq 0$

$\lim_{x\to 3}(3x^2-2) = 25 \quad , \quad 25 > 0$ تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر > 0

$\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2} = \sqrt{\lim_{x\to 3}(3x^2-2)} = \sqrt{25} = 5$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{3x^2-2}}{x-2} = \dfrac{\lim_{x\to 3}\sqrt{3x^2-2}}{\lim_{x\to 3}(x-2)}$

$= \dfrac{5}{1} = 5$

حاول أن تحل

7 أوجد:

a $\lim_{x\to 5}\sqrt{x^2-5}$ b $\lim_{x\to 4}(x+\sqrt{x})^4$ c $\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt[3]{x^3-4x+5}}{x-2}$

إلغاء العامل الصفري في المقام
Eliminating Zero Factor of the Denominator

إذا كان لدينا دالة نسبية وكانت نهاية مقام هذه الدالة النسبية لا تساوي الصفر عندما $x \to c$ فإننا نطبّق نظرية (4) فرع e لإيجاد نهاية هذه الدالة. أما إذا ساوت نهاية المقام الصفر، فإننا نقوم باختصار العامل الصفري المشترك بين البسط والمقام، إن وجد، ثم نستخدم الصيغة المبسطة لإيجاد النهاية.

ملاحظات:

1 عند التعويض المباشر لقيمة x في كل من البسط والمقام وحصلنا على $\frac{0}{0}$ فإنها تسمى **صيغة غير معينة (Indeterminate Form).**

2 يمكن استخدام التحليل أو القسمة أو الضرب بالمرافق أو غيرها لإيجاد الصيغة المبسطة.

مثال (8)

أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x}$ b $\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}$ c $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

الحل:

a عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام.

$$\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \frac{\cancel{(x-1)}^{1}(x+2)}{x\cancel{(x-1)}_{1}}$$

$$= \frac{x+2}{x} \quad , \quad x \neq 1$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x^2-x} = \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x}$$

$$\because \lim_{x\to 1} x = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

عوّض عن x بـ 1

$$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{x+2}{x} = \frac{1+2}{1} = 3$$

تذكر:

مرافق العدد الجذري هو عدد جذري بحيث يكون ناتج ضرب العددين عددًا نسبيًّا.

أمثلة:

- $\sqrt{2}+1$ ، $\sqrt{2}-1$ مترافقان
- $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}+\sqrt{2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}-\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}+\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان
- $\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{b}$ ، $\sqrt[3]{a^2}-\sqrt[3]{ab}+\sqrt[3]{b^2}$ مترافقان

تذكر:

إذا كان a صفر للدالة الحدودية $f(x)$ فإن $(x-a)$ عامل من عوامل $f(x)$.

تذكر:

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$

$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)$

b عند التعويض المباشر عن x بـ 0 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

$$\frac{(2+x)^3-8}{x}=\frac{(2+x-2)\left((2+x)^2+2(2+x)+(2)^2\right)}{x}$$

x عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$=\frac{\cancel{x}^1(4+4x+x^2+4+2x+4)}{\cancel{x}^1}$$

$$=x^2+6x+12 \quad , \quad x\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to 0}\frac{(2+x)^3-8}{x}=\lim_{x\to 0}(x^2+6x+12)=12$$

c عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اكتب البسط دون استخدام رمز القيمة المطلقة وحلّل المقام إلى عوامل $(x-1)$ عامل صفري مشترك بين البسط والمقام

$$\frac{|x-1|}{x^2-1}=\begin{cases}\dfrac{\cancel{x-1}^{\,1}}{(\cancel{x-1})_1(x+1)} & : \ x>1\\[2ex] \dfrac{\cancel{1-x}^{\,-1}}{(\cancel{x-1})_1(x+1)} & : \ x<1\ ,\ x\neq -1\end{cases}$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{x+1} & : \ x>1\\[2ex] \dfrac{-1}{(x+1)} & : \ x<1\ ,\ x\neq -1\end{cases}$$

لإيجاد $\lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$

تحقق من نهاية المقام $\neq 0$

$$\because \lim_{x\to 1^+}(x+1)=2 \quad , \quad 2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليمين)

$$\therefore \lim_{x\to 1^+}\frac{1}{x+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^-}-(x+1)=-(1+1)=-2 \quad , \quad -2\neq 0$$

استخدم الصيغة المبسطة وعوّض عن x بـ 1 (النهاية من جهة اليسار)

$$\therefore \lim_{x\to 1^-}\frac{-1}{(x+1)}=\frac{-1}{(1+1)}=-\frac{1}{2}$$

$$\because \lim_{x\to 1^+}\frac{|x-1|}{x^2-1}\neq \lim_{x\to 1^-}\frac{|x-1|}{x^2-1}$$

$\therefore \lim_{x\to 1}\frac{|x-1|}{x^2-1}$ غير موجودة

حاول أن تحل

8 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{x^2-4}$

b $\lim_{x\to -7}\frac{(x+4)^2-9}{x^2+7x}$

c $\lim_{x\to 5}\frac{|x+2|-7}{x^2-25}$

مثال (9)

أوجد:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$ b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$ c) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x}+2}$

الحل:

a) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معيّنة.

اضرب البسط والمقام في مرافق البسط

$$\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}=\frac{\sqrt{2x-3}-1}{x-2}\times\frac{\sqrt{2x-3}+1}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)=a-b^2$

$$=\frac{2x-3-1}{(x-2)(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$(x-2)$ عامل مشترك بين البسط والمقام

$$=\frac{2\cancel{(x-2)}^{1}}{\cancel{(x-2)}_{1}(\sqrt{2x-3}+1)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}\qquad,\quad x\neq2$$

تحقّق أن نهاية ما تحت الجذر أكبر من 0

$$\lim_{x\to2}(2x-3)=1\ ;\ 1>0$$

$$\lim_{x\to2}(\sqrt{2x-3}+1)=\lim_{x\to2}\sqrt{2x-3}+\lim_{x\to2}1$$

تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$=\sqrt{\lim_{x\to2}(2x-3)}+1=1+1=2\quad,\quad 2\neq0$$

$$\lim_{x\to2}\frac{\sqrt{2x-3}+1}{x-2}=\lim_{x\to2}\frac{2}{\sqrt{2x-3}+1}$$

$$=\frac{\lim\limits_{x\to2}2}{\lim\limits_{x\to2}(\sqrt{2x-3}+1)}=\frac{2}{2}=1$$

b) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}$

عند التعويض المباشر عن x بـ 1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

حلّل البسط: الفرق بين مكعبين

$$\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\frac{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}^{1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)}{\cancel{(\sqrt[3]{x}-1)}_{1}}$$

$$=\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\qquad,\quad x\neq1$$

استخدام الصيغة المبسطة

$$\therefore\ \lim_{x\to1}\frac{x-1}{\sqrt[3]{x}-1}=\lim_{x\to1}(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1)$$

$$=\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x^2}+\lim_{x\to1}\sqrt[3]{x}+\lim_{x\to1}1$$

$$=\sqrt[3]{\lim_{x\to1}x^2}+\sqrt[3]{\lim_{x\to1}x}+1$$

عوّض عن x بـ 1

$$=1+1+1=3$$

معلومة:

$x-a=(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})$ حيث $x\geqslant0\ ,\ a\geqslant0$

$x-a=(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$

$x+a=(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{a})(\sqrt[3]{x^2}-\sqrt[3]{xa}+\sqrt[3]{a^2})$

c $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

مرافق $\sqrt[3]{a}$ هو $\sqrt[3]{a^2}$

$\sqrt[3]{a^2}\cdot\sqrt[3]{a}=a$

$a^2-b^2=(a-b)(a+b)$

$$\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}=\frac{(x^2-4)}{\sqrt[3]{x+2}}\times\frac{\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\sqrt[3]{(x+2)^2}}$$

$$=\frac{(x^2-4)\times\sqrt[3]{(x+2)^2}}{x+2}$$

$$=\frac{\cancel{(x+2)}^{1}(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}}{\cancel{(x+2)}_{1}}$$

$$=(x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\qquad,\qquad x\neq -2$$

استخدم الصيغة المبسطة

$$\lim_{x\to -2}\frac{x^2-4}{\sqrt[3]{x+2}}=\lim_{x\to -2}\left((x-2)\sqrt[3]{(x+2)^2}\right)$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\lim_{x\to -2}\sqrt[3]{(x+2)^2}$$

$$=\lim_{x\to -2}(x-2)\cdot\sqrt[3]{\lim_{x\to -2}(x+2)^2}$$

$$=(-2-2)\cdot\sqrt[3]{(-2+2)^2}$$

$$=(-4)\times(0)=0$$

حاول أن تحل

9 أوجد إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-2x}$

b $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x^3+1}}{\sqrt[3]{x+1}}$

c $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x-9}{3-\sqrt{x}}$

مثال (10)

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

b $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^5+32}{x+2}$

الحل:

a $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1}$

عند التعويض عن x بـ -1 في كل من البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

أقسم البسط على المقام ونوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

-1	1	6	2	-3
		-1	-5	3
	1	5	-3	0

الناتج: $x^2 + 5x - 3$ والباقي صفر

$$\frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1} = x^2+5x-3 \quad , \quad x \neq -1$$

$$\lim_{x\to -1} \frac{x^3+6x^2+2x-3}{x+1} = \lim_{x\to -1}(x^2+5x-3)$$

عوّض عن x بـ -1

$$= (-1)^2 + 5(-1) - 3$$

$$= -7$$

b $\lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2}$

عند التعويض عن x بـ -2 في كل البسط والمقام نحصل على صيغة غير معينة.

$$\frac{x^5+32}{x+2}$$

$$x^5+32 = x^5+0x^4+0x^3+0x^2+0x+32$$

أقسم البسط على المقام وأوجد الناتج باستخدام القسمة التركيبية

-2	1	0	0	0	0	32
		-2	4	-8	16	-32
	1	-2	4	-8	16	0

الناتج: $x^4 - 2x^3 + 4x^2 - 8x + 16$ والباقي صفر

$$\frac{x^5+32}{x+2} = x^4-2x^3+4x^2-8x+16 \quad , \quad x \neq -2$$

$$\lim_{x\to -2} \frac{x^5+32}{x+2} = \lim_{x\to -2}(x^4-2x^3+4x^2-8x+16)$$

عوّض عن x بـ -2

$$= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 4(-2)^2 - 8(-2) + 16$$

$$= 16+16+16+16+16$$

بسّط

$$= 80$$

حاول أن تحل

10 أوجد إن أمكن:

a $\lim_{x\to 3} \frac{x^3-2x^2-4x+3}{x-3}$

b $\lim_{x\to 2} \frac{-x^5+x^3+x+22}{x-2}$

1-2

نهايات تشتمل على $-\infty$ ، ∞

Limits Involving $-\infty$, ∞

سوف تتعلم

- نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$.
- نهايات غير محددة عندما $x \to a$.
- الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية.

المفردات والمصطلحات:

- نهاية محددة Finite Limit
- خط مقارب أفقي Horizontal Asymptote
- خط مقارب رأسي Vertical Asymptote

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية: $g(x) = x^2 + 1$ ، $f(x) = \frac{1}{x}$

a أكمل الجدول التالي:

x	$f(x) = \frac{1}{x}$	$g(x) = x^2 + 1$
-100		
$-3\,000$		
$-60\,000$		
100		
$3\,000$		
$60\,000$		

b استنتج قيم الدوال الواردة أعلاه عندما تأخذ x قيمًا موجبة كبيرة جدًّا وعندما تأخذ x قيمًا سالبة صغيرة جدًّا.

أوّلًا: نهايات محددة عندما $x \to \pm\infty$ — Finite Limits as $x \to \pm\infty$

إذا كانت x تأخذ قيمًا كبيرة جدًّا أي أن قيم x تكبر بلا حدود (تتحرّك مبتعدة كثيرًا جهة اليمين على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to \infty$.

وإذا كانت x تأخذ قيمًا صغيرة جدًّا أي أن قيم x تصغر بلا حدود (تتحرّك مبتعدة كثيرًا جهة اليسار على خط الأعداد) فإننا نقول $x \to -\infty$.

تعريف (3)

لتكن f دالة معرّفة في الفترة (a, ∞) فإن:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.

تعريف (4)

لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty, a)$ فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.

معلومة:

من الأزل إلى الأبد

- الأزل: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية من الماضي.
- الأبد: استمرار الوجود في أزمنة غير متناهية في المستقبل.

في الشكل (1) من بيان الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$

نجد أن:

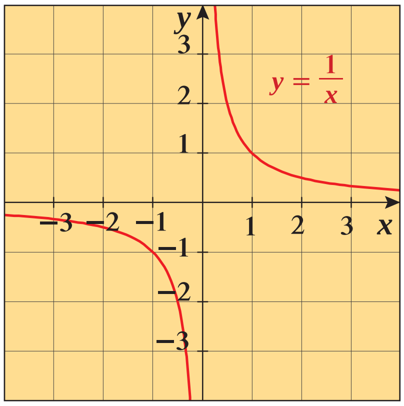
عندما $x \to \infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$

وعندما $x \to -\infty$ فإن $f(x) \to 0$

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا: $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$

أي أنه : $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{x}\right) = 0$



شكل (1)

نظرية (7)

لتكن f : $f(x)=\frac{1}{x}$ فإن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0$$

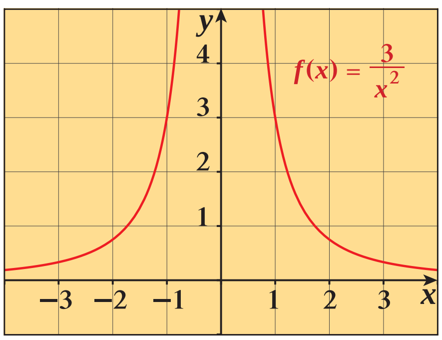
تدريب

الشكل يمثّل بيان الدالة f : $f(x)=\frac{3}{x^2}$

أكمل ما يلي:

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{3}{x^2} = ...$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{3}{x^2} = ...$



نظرية (8)

لتكن f : $k \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(x)=\frac{k}{x^n}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{k}{x^n} = 0 \quad , \quad \lim_{x\to-\infty} \frac{k}{x^n} = 0$$

فمثلًا: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{-2}{x^3} = 0$, $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{5}{x^4} = 0$, ...

تبقى النظريات (c , a 6), (4), (2) صحيحة عند إيجاد $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ وكذلك عند إيجاد $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

مثال (1)

أوجد النهايات التالية إن أمكن:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x+4}$ b $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+5}{x^2+25}$ c $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{6x^3}{5-7x^3}$

الحل:

a $$\frac{1}{x+4} = \frac{1}{x\left(1+\frac{4}{x}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{x}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4} = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{1+\frac{4}{x}}\right)$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x} = 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right) = \lim_{x\to\infty}1 + \lim_{x\to\infty}\frac{4}{x} = 1+0 = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+4} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+\frac{4}{x}}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to\infty}(1)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{4}{x}\right)}$$

$$= 0\times\frac{1}{1+0} = 0$$

b $$\frac{x+5}{x^2+25} = \frac{\cancel{x}^{1}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\cancel{x^2}_{x}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1+\frac{5}{x}}{x\left(1+\frac{25}{x^2}\right)} = \frac{1}{x}\cdot\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}} \quad , \quad x\neq 0$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = \lim_{x\to-\infty}\left[\frac{1}{x}\cdot\left[\frac{1+\frac{5}{x}}{1+\frac{25}{x^2}}\right]\right]$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right) = \lim_{x\to-\infty}1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 1+0 = 1 \quad , \quad 1\neq 0$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{25}{x^2} = 0$ ، تحقّق أن نهاية المقام $\neq 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = \lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x}\cdot\frac{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to-\infty}\left(1+\frac{25}{x^2}\right)}$$

$\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim\limits_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 0$

$$\lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{5}{x}\right) = \lim_{x\to-\infty}1 + \lim_{x\to-\infty}\frac{5}{x} = 1+0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to-\infty}\frac{x+5}{x^2+25} = 0\times\frac{1}{1} = 0$$

c $$\frac{6x^3}{5-7x^3} = \frac{6\cancel{x^3}^{1}}{\cancel{x^3}_{1}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)} = \frac{6}{\frac{5}{x^3}-7} \quad , \quad x\neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{6x^3}{5-7x^3} = \lim_{x\to\infty}\frac{6}{\frac{5}{x^3}-7}$$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^3} - \lim_{x\to\infty}7 = 0-7 = -7 \quad , \quad -7\neq 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^3} = 0$ ، تحقّق من أن نهاية المقام $\neq 0$

نظرية (4)

$$\therefore \lim_{x\to\infty} \frac{6}{\frac{5}{x^3}-7} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty} 6}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{5}{x^3}-7\right)}$$

$$= \frac{6}{-7} = -\frac{6}{7}$$

حاول أن تحل

1 أوجد النهايات التالية إن أمكن:

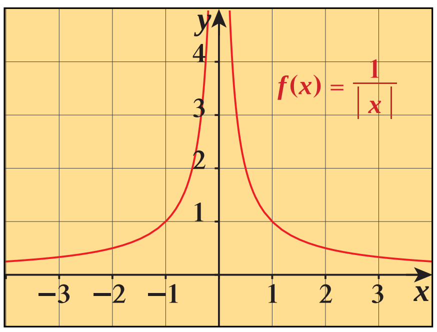
a $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x-2}$ b $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x+2}{x^2+9}$ c $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3-3x+1}{x^3+5}$

ثانيًا: نهايات غير محددة $(\pm\infty)$ عندما $x \to c$ Infinite Limits as $x \to c$

لنعتبر على سبيل المثال الدالتين:

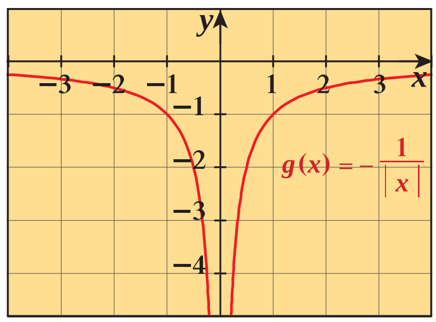
$$f(x) = \frac{1}{|x|} \quad , \quad g(x) = \frac{-1}{|x|}$$

والممثلتين بيانيًّا بالمنحنيين المرسومين



شكل (2)

$f(x) = \frac{1}{|x|}$



شكل (3)

$g(x) = \frac{-1}{|x|}$

نلاحظ من الشكل (2) أن قيم $f(x)$ تزداد بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار لذلك فإن $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة لأنها تتزايد بلا حدود.

ونعبّر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{|x|} = \infty$$

ويجب أن ندرك أن الرمز ∞ لا يعني قيمة معينة. (لا يمثل عددًا حقيقيًّا).

وإنما يفيد أن الدالة f : $f(x) = \frac{1}{|x|}$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to 0$

وبالمثل نرى أن الدالة g : $g(x) = \frac{-1}{|x|}$ الممثلة بيانيًّا بالشكل (3) تتناقص بلا حدود كلما اقتربت قيم x من الصفر سواء من جهة اليمين أو من جهة اليسار أي عندما $x \to 0$ ، أي أن $\lim\limits_{x\to 0} g(x)$ غير موجودة لأنها تتناقص بلا حدود.

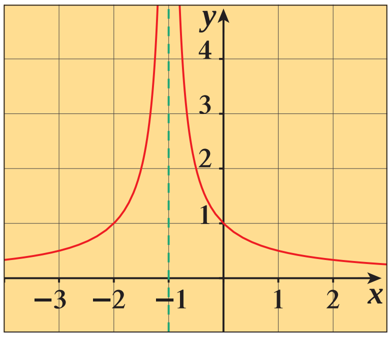
ونعبر عن ذلك رياضيًّا بالصيغة:

$$\lim_{x\to 0} \frac{-1}{|x|} = -\infty$$

نشاط

من شكل (4) قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما $x \to -1$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{1}{|x+1|} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

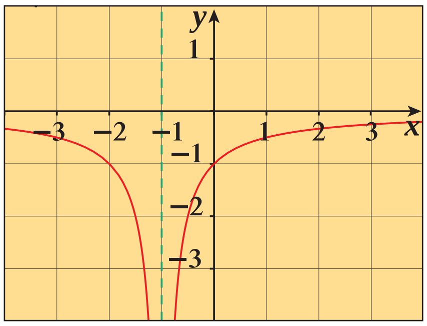


شكل (4)

$$f(x) = \frac{1}{|x+1|}$$

من شكل (5) قيم $g(x)$ تتناقص بلا حدود عندما $x \to -1$

$$\therefore \lim_{x \to -1} \frac{-1}{|x+1|} = \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$



شكل (5)

$$g(x) = \frac{-1}{|x+1|}$$

تعريف (5)

1. إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بالتالي:

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty$$

2. إذا كانت قيم $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبر عن ذلك رياضيًّا بالتالي:

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$$

نظرية (9)

$$\lim_{x \to c} f(x) = \infty \iff \left(\lim_{x \to c^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = \infty\right)$$

$$\lim_{x \to c} f(x) = -\infty \iff \left(\lim_{x \to c^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x \to c^-} f(x) = -\infty\right)$$

ملاحظات

1. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+b]=\pm\infty$
2. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)]=\pm\infty$
   وإذا كان b عدد حقيقي سالب فإن: $\lim\limits_{x\to c}[b\cdot f(x)]=\mp\infty$
3. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\infty$, $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]=\infty$
4. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x)=-\infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=\infty$, $\lim\limits_{x\to c}[f(x)+g(x)]=-\infty$
5. إذا كان $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to c} f(x)=-\infty$ فإن: $\lim\limits_{x\to c}[f(x)\cdot g(x)]=-\infty$

نظرية (10)

إذا كان n عدد صحيح زوجي موجب فإن:

$$\lim_{x\to c}\frac{1}{(x-c)^n}=\infty$$

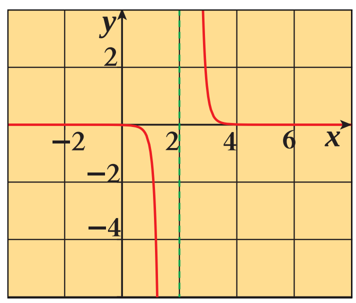
إذا كان n عدد صحيح فردي موجب فإن:

1. $\lim\limits_{x\to c^+}\frac{1}{(x-c)^n}=\infty$
2. $\lim\limits_{x\to c^-}\frac{1}{(x-c)^n}=-\infty$

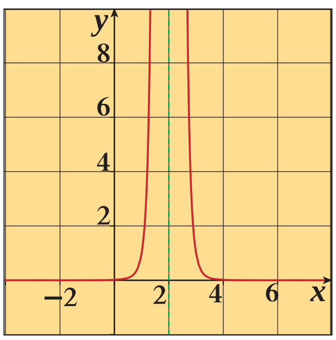
حيث $c\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{1}{(x-2)^7}=\infty$$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{(x-2)^7}=-\infty$$



$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{(x-2)^6}=\infty$$



مثال (2)

أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{1}{|x-2|}$

الحل:

$$\frac{1}{|x-2|}=\begin{cases}\frac{1}{x-2} & : x>2\\ \frac{-1}{x-2} & : x<2\end{cases}$$

نظرية (1) $\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{|x-2|}=\lim\limits_{x\to 2^+}\frac{1}{x-2}=\infty$

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{1}{|x-2|}=\lim_{x\to 2^-}\frac{-1}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2^-}\left(-1\cdot\frac{1}{x-2}\right)$$

نظرية

$\because \lim\limits_{x \to 2^-} \dfrac{1}{(x-2)} = -\infty \ , \ -1 < 0$

استخدم ملاحظة (2) $\quad \therefore \lim\limits_{x \to 2^-} \left(-1 \cdot \dfrac{1}{x-2}\right) = \infty \qquad (2)$

من (2) , (1)

$\therefore \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{|x-2|} = \infty$

حاول أن تحل

2 أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{3}{|x+1|}$

تعريف (6): الخط المقارب (المحاذي) الأفقي Definition of Horizontal Asymptote

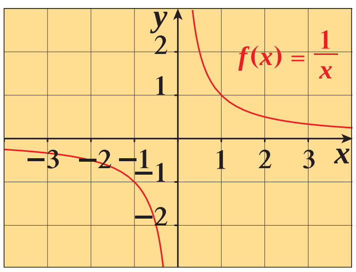
الخط $y = b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y = f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x \to -\infty} f(x) = b$$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $\quad f(x) = \dfrac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} = 0$$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي (أو محاذي أفقي) لمنحنى الدالة f . (الشكل (6))



شكل (6)

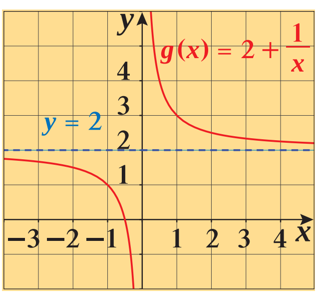
وكذلك بالنظر إلى بيان الدالة g : $\quad g(x) = 2 + \dfrac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x \to -\infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2 \quad , \quad \lim_{x \to \infty} \left(2 + \frac{1}{x}\right) = 2$$

ونقول إن الخط المستقيم $y = 2$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة g . (الشكل (7))

ونلاحظ أنه إذا كان $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to \infty} g(x)$ فإن الخط المقارب الأفقي وحيد وهو $y = b$.

قد يكون لمنحنى الدالة أكثر من خط مقارب أفقي.



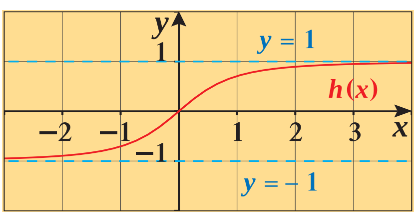
شكل (7)

فمثلاً:

لمنحنى الدالة h : $\quad h(x) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ في الشكل المقابل خطان مقاربان أفقيان هما:

$y = 1 \quad$ و $\quad y = -1$

لاحظ أن: $\quad h(x) = \dfrac{x}{|x|\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}}$ (الشكل (8))



شكل (8)

ملاحظة:

ستقتصر دراستنا على المحاذيات الأفقية لدوال الحدوديات النسبية.

تعريف (7): الخط المقارب (المحاذي) الرأسي — Definition of Vertical Asymptote

الخط $x = a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y = f(x)$ إذا توفر على الأقل أحد الشروط التالية:

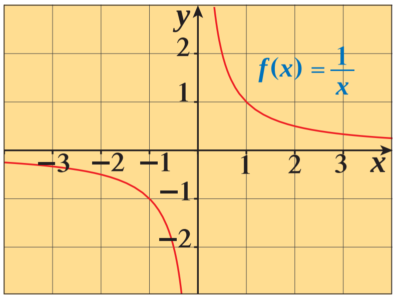
$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x) = \frac{1}{x}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x = 0$ هو خط مقارب (محاذي) رأسي لمنحنى الدالة f . (الشكل (9))



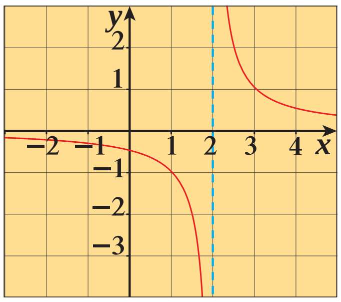
شكل (9)

بالنظر إلى بيان الدالة f: $f(x) = \frac{1}{x-2}$ نلاحظ أن:

$$\lim_{x\to 2^-} \left(\frac{1}{x-2}\right) = -\infty \quad , \quad \lim_{x\to 2^+} \left(\frac{1}{x-2}\right) = +\infty$$

ونقول إن الخط المستقيم $x = 2$ هو خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة f . (الشكل (10))

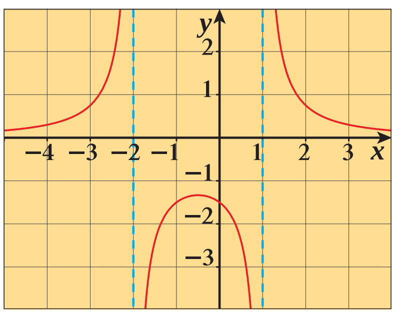
نلاحظ أن $x = 2$ هو صفر المقام.


شكل (10)
$f(x) = \frac{1}{x-2}$

بالنظر إلى بيان الدالة f : $f(x) = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$

نلاحظ أن: $x = 1$, $x = -2$ هما مقاربان (محاذيان) رأسيان لمنحنى الدالة f . (الشكل (11))

ونلاحظ أيضًا أن 1 , -2 هما صفرا للمقام.


شكل (11)
$f(x) = \frac{3}{(x+2)(x-1)}$

ملاحظة:

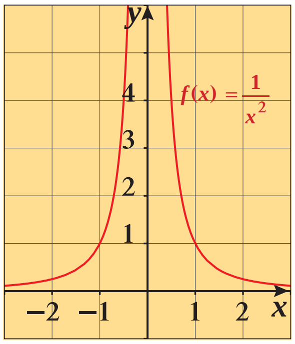
إذا كانت الدالة $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ حيث h , g كثيرتي حدود وليس بينهما عوامل مشتركة، فإن لكل صفر c لدالة المقام h يكون المستقيم $x = c$ خطًّا مقاربًا رأسيًّا (أو محاذيًا رأسيًّا).

أما في حالة وجود عوامل مشتركة بين h , g فيكون المحاذي الرأسي عند صفر (أصفار) المقام بعد التبسيط.

مثال (3)

أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والخطوط المقاربة الأفقية لكل مما يلي:

b $h(x) = \dfrac{x-1}{x^2-3x+2}$ **a** $g(x) = \dfrac{1}{x^2-4}$



الحل:

a

$$x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$$

صفرا المقام هما: -2 ، 2 وليست أصفارًا للبسط.

∴ المستقيمان $x = -2$ ، $x = 2$ هما المقاربان الرأسيان لمنحنى الدالة g.

$$\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x^2}}{1-\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x^2}}{\lim\limits_{x\to\infty}(1) - \lim\limits_{x\to\infty}\frac{4}{x^2}}$$

$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

∴ المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي لمنحنى g.

b

$$x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$$

$$h(x) = \frac{x-1}{x^2-3x+2}$$

نضع $h(x)$ في أبسط صورة

$$= \frac{x-1}{(x-1)(x-2)}$$

$$= \frac{1}{x-2} \quad , \quad x \neq 1$$

2 صفرًا للمقام وليس من أصفار البسط

∴ المستقيم $x = 2$ خط مقارب رأسي لمنحنى h

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x-2} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1-\frac{2}{x}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x}}{\lim\limits_{x\to\infty} 1 - \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x}}$$

$$= \frac{0}{1-0} = 0$$

∴ المستقيم $y = 0$ هو خط مقارب أفقي المنحنى h

حاول أن تحل

3 أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية و الخطوط المقاربة الأفقية لمنحنيات الدوال التالية:

c $f(x) = \dfrac{2x}{x-3}$ **b** $f(x) = \dfrac{1}{x^2}$ **a** $f(x) = \dfrac{x-3}{x^2-9}$

1–3

صيغ غير معينة

Indeterminate Forms

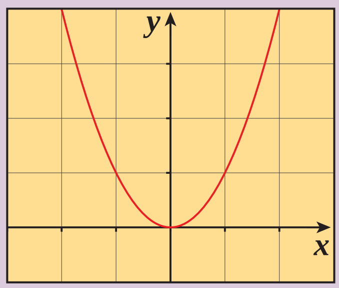
دعنا نفكر ونتناقش

إذا كانت f دالة قوى حيث: $f(x) = ax^n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$

فإن بيان هذه الدالة يمكن أن يأخذ أحد الأشكال أدناه:

أكمل ما يلي:

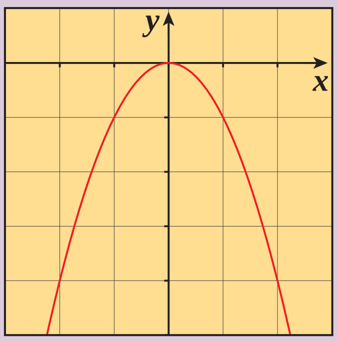
1 n عددًا زوجيًّا , $a > 0$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$

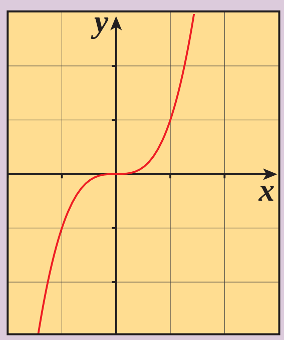
2 n عددًا زوجيًّا , $a < 0$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$

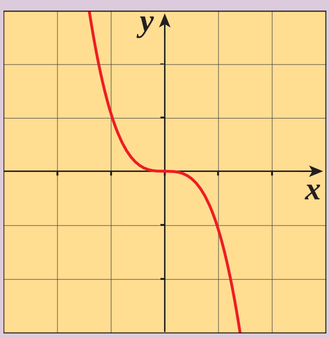
3 n عددًا فرديًّا , $a > 0$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$

4 n عددًا فرديًّا , $a < 0$



$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = ...$

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = ...$

سوف تتعلم

- صيغ غير معينة

$\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$

$\frac{-\infty}{-\infty}$, $\infty - \infty$

المفردات والمصطلحات:

- صيغة غير معينة

Indeterminate Form

تذكر:

إذا كانت:

$f(x) = ax^n$

$n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$

فإن:

درجة الدالة هي n ومعاملها الرئيسي a.

معلومة:

أنواع من الصيغ غير المعينة:

$\frac{0}{0}$, $(0)^0$

$(\infty)^0$, $(0 \times \infty)$

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

لتكن: $f(x) = ax^n \ , \ n \in \mathbb{Z}^+ \ , \ a \in \mathbb{R}^*$:

(1) إذا كان n عدد زوجي فإن:

$$\lim_{x\to\pm\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

(2) إذا كان n عدد فردي فإن:

$$\lim_{x\to-\infty} ax^n = \begin{cases} -\infty & : \quad a > 0 \\ \infty & : \quad a < 0 \end{cases} \ ، \ \lim_{x\to\infty} ax^n = \begin{cases} \infty & : \quad a > 0 \\ -\infty & : \quad a < 0 \end{cases}$$

فمثلًا:

$$\lim_{x\to-\infty}(5x^7) = -\infty \ , \ \lim_{x\to\infty} 2x^3 = \infty \ , \ \lim_{x\to\infty}(-x^5) = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^4}{3} = \infty \ , \ \lim_{x\to\infty}(5x^2) = \infty \ , \ \lim_{x\to\infty}(-4x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(-3x^4) = -\infty \ , \ \lim_{x\to-\infty}(-4x) = \infty$$

ملاحظة: إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0 \ , \ a_n \in \mathbb{R}^*$

فإن: $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty} a_n x^n$

أحيانًا نحتاج لحساب نهاية دالة على الصورة: $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$

حيث: $\lim_{x\to\infty} g(x) = \pm\infty \ , \ \lim_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$

في هذه الحالة نحصل على إحدى الصور التالية: $\frac{-\infty}{-\infty}$ أو $\frac{\infty}{-\infty}$ أو $\frac{-\infty}{\infty}$ أو $\frac{\infty}{\infty}$

ونسميها **صيغ غير معينة**.

كذلك إذا حسبنا $\lim_{x\to\infty}(f(x) - g(x))$ وحصلنا على الصورة $(\infty - \infty)$

فهي تسمى أيضًا **صيغة غير معينة**.

في الحالات السابقة نلجأ لبعض الأساليب الجبرية لحساب قيمة هذه النهايات والأمثلة والنظريات التالية ستوضح كيفية حساب مثل هذه النهايات.

مثال (1)

أوجد: $\lim_{x\to\infty}(2x^2 - 3x + 1)$

الحل:

بالتعويض المباشر

$$\lim_{x\to\infty}(2x^2 - 3x + 1) = \lim_{x\to\infty} 2x^2$$
$$= \infty$$

حاول أن تحل

1 أوجد: $\lim_{x\to\infty}(-3x^2 + 2x - 4)$

مثال تمهيدي

أوجد:

a $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2-2x}{4x^2+5}$ **b** $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x}$

الحل:

a لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذا سنلجأ للحل التالي:

أقسم كلًّا من البسط والمقام على x^2

$$\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}} \qquad x \neq 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{5}{x^2} = 0$

$$\lim_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 4 + \lim_{x\to\infty}\frac{5}{x^2} = 4+0 = 4 \quad , \quad 4 \neq 0$$

$\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} = 0$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 3 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x} = 3-0 = 3$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{3x^2-2x}{4x^2+5} = \lim_{x\to\infty}\frac{3-\frac{2}{x}}{4+\frac{5}{x^2}}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(4+\frac{5}{x^2}\right)}$$

$$= \frac{3}{4}$$

b لو حسبنا نهاية دالة البسط على نهاية دالة المقام لحصلنا على صيغة غير معينة لذلك نقسم كلًّا من البسط والمقام على x^4 (أكبر قوة لـ x).

$$\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}}$$

التحقق من أن نهاية المقام $0 \neq$

$$\lim_{x\to\infty}\left(3-\frac{2}{x^2}\right) = 3-0 = 3 \quad , \quad 3 \neq 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\frac{5x^3+2x^2-7}{3x^4-2x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}-\frac{7}{x^4}}{3-\frac{2}{x^3}} = \frac{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x}+\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^2}-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7}{x^4}}{\lim\limits_{x\to\infty}3-\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2}{x^3}}$$

$$= \frac{0+0-0}{3-0} = 0$$

نلاحظ من المثال التمهيدي **a** أن درجة الحدودية في البسط تساوي درجة الحدودية في المقام تساوي 2

وأن نهاية الدالة النسبية تساوي $\frac{3}{4}$

وهو **ناتج قسمة معامل x بأكبر قوة في البسط على معامل x بأكبر قوة في المقام.**

ونلاحظ في المثال التمهيدي **b** أن درجة الحدودية في البسط **أصغر من** درجة الحدودية في المقام

وأن نهاية الدالة النسبية تساوي 0

نستطيع تعميم ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (11)

إذا كانت كل من g , f دالة حدودية حيث:

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_0$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_0$$ فإن:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n}{b_m} \ : \ n = m$

b) $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \ : \ n < m$

ملاحظة: تبقى النظرية صحيحة عندما $x \to -\infty$

مثال (2)

استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{2x^3+5}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^4-x}$

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4}$

الحل:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{4-3x^3}{2x^3+5} = \lim_{x\to\infty} \frac{-3x^3+4}{2x^3+5}$

$= \frac{-3}{2}$

نظرية: $n = m = 3$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^2+x-1}{3x^4-x} = 0$

نظرية: $n = 2$, $m = 4$, $n < m$ (درجة حدودية البسط أصغر من درجة حدودية المقام)

c) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^4-1}{7-2x^4} = -\frac{1}{2}$

نظرية: $n = m = 4$ (درجة حدودية البسط = درجة حدودية المقام)

حاول أن تحل

2 استخدم النظرية السابقة في حساب كل من:

a) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-3x^2+5x+1}{6x^2-x+1}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x+1}{4x^3-2x+3}$

مثال (3)

إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3$

فأوجد قيمة كل من الثابتين a , b

الحل:

$\because \lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5} = 3 \ , \ 3 \neq 0$

$\therefore$ درجة الحدودية في البسط يجب أن تكون مساوية لدرجة الحدودية في المقام أي أن الحدودية في البسط يجب أن تكون من الدرجة الأولى.

$$ax^2 = 0 \implies a = 0$$

ومنه

$$\lim_{x\to\infty} \frac{ax^2+bx+3}{2x+5}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{bx+3}{2x+5}$$

نظرية $m = n = 1$

$$= \frac{b}{2}$$

$$\because \frac{b}{2} = 3 \implies b = 6$$

حاول أن تحل

3 أوجد قيمة كل من الثابتين a , b إذا كانت $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{ax^2+bx-3} = -1$

مثال (4)

أوجد: $\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}}$

الحل:

$$f(x) = \frac{x-2}{\sqrt{x^2+2x-4}} = \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\sqrt{x^2\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)}}$$

$$= \frac{x\left(1-\frac{2}{x}\right)}{|x|\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

عندما $x > 0$ يكون: $|x| = x$

$$= \frac{\cancel{x}^{1}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\cancel{x}^{1}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

بشرط $x \neq 0$

$$= \frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$\because \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 + \lim_{x\to\infty} \frac{2}{x} - \lim_{x\to\infty} \frac{4}{x^2}$$

$$= 1 + 0 - 0 = 1 \quad , \quad 1 > 0$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}} = \sqrt{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}\right)} = \sqrt{1} = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right) = \lim_{x\to\infty} 1 - \lim_{x\to\infty}\frac{2}{x}$$

$$= 1 - 0 = 1$$

$$\therefore \lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}\frac{1-\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)}{\lim_{x\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{x}-\frac{4}{x^2}}}$$

$$= \frac{1}{1} = 1$$

حاول أن تحل

4 أوجد:

a $\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{2x^2-x}}{x+1}$

b $\lim_{x\to-\infty}\frac{3x-5}{\sqrt{x^2-9}}$

1–4

نهايات بعض الدوال المثلثية

Limits of Some Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- نهايات بعض الدوال المثلثية.
- نظرية الإحاطة.
- استخدام نظرية الإحاطة.

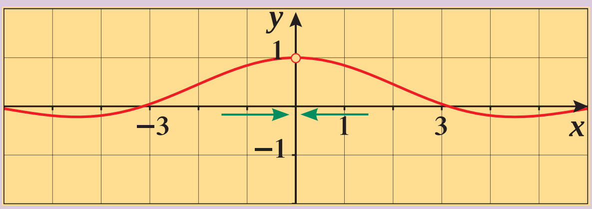
المفردات والمصطلحات:

- نهاية دالة مثلثية Limit of a Trigonometric Function
- نظرية الإحاطة Sandwich Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

عند حساب: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ $(x \text{ rad})$ وتمثيلها بيانيًّا كما في الشكل (1)، تقتربُ قيمتُها من الواحد عندما تقترب x من الصفر$(x \text{ rad})$. وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x بشكل كاف من الصفر دون أن تساويه.

x	y
-0.3	0.98507
-0.2	0.99335
-0.1	0.99833
-0.01	0.9998
0	ERROR
0.01	0.9998
0.1	0.99833
0.2	0.99335
0.3	0.98507
$y = \frac{\sin x}{x}$	



شكل (1)

يبيّن الشكل (1) الرسم البيانيّ للدالّة f كما يعطي الجدول أعلاه قيمًا للدالّة موضّحًا أنّ نهاية $f(x)$ تساوي 1 عندما تقترب x من الصفر.

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» نجد أن:

نظرية (12)

حيث x بالراديان ، $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

نتيجة (1)

إذا كان b ، a عددين حقيقيين، $b \neq 0$ ، $a \neq 0$ فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin ax}{bx} = \frac{a}{b} \quad , \quad \lim_{x \to 0} \frac{bx}{\sin ax} = \frac{b}{a}$$

فمثلًا:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 2x}{5x} = \frac{2}{5}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{2x}{\sin 3x} = \frac{2}{3}$$

معلومة:

في دراستنا للدوال المثلثية يكون قياس الزوايا بالراديان.

وبتطبيق تعريف النهاية على الدوال المثلثية الأساسية نجد أنّ:

$$\lim_{x\to 0} \sin x = 0 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad , \quad \lim_{x\to 0} \tan x = 0$$

ويمكننا تطبيق نظريات النهايات من البنود السابقة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية. يمكننا استنتاج أن: $\lim_{x\to 0} \cos ax = 1 \quad , \quad a \in R$

مثال (1)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x}$

b $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

c $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x}$

الحل:

نظرية (قاعدة الضرب)

$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$

a
$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin^2 x}{2x} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\sin x}{2}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2}$$
$$= 1 \times 0$$
$$= 0$$

نظرية

b $\lim_{x\to 0} \frac{x-3}{\cos x}$

$\lim_{x\to 0} \cos x = 1 \quad , \quad 1 \neq 0$

$$\therefore \lim_{x\to 0} \frac{x-3}{\cos x} = \frac{\lim_{x\to 0}(x-3)}{\lim_{x\to 0} \cos x}$$
$$= \frac{-3}{1}$$
$$= -3$$

اضرب البسط والمقام في $1+\cos x$

c
$$\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2}{1-\cos x} \times \frac{1+\cos x}{1+\cos x}$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{(1-\cos x)(1+\cos x)} \cdot (1+\cos x)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{1-\cos^2 x} \cdot (1+\cos x)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x^2}{\sin^2 x} \cdot (1+\cos x)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot (1+\cos x)\right)$$
$$= \lim_{x\to 0}\left(\frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \lim_{x\to 0}(1+\cos x)$$
$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{\sin x}\right)^2 \cdot \left(\lim_{x\to 0}(1) + \lim_{x\to 0} \cos x\right)$$
$$= (1)^2 \times (1+1)$$
$$= 1 \times 2 = 2$$

حاول أن تحل

a هل يمكنك حل c في المثال (1) بطريقة أخرى؟

b أوجد النهاية:

1 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{2x^2 - x}$

2 $\lim_{x\to 0} \frac{\sin 2x}{3x \cos x}$

3 $\lim_{x\to 0} \frac{x \sin x}{\cos x - 1}$

مثال (2)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}$

الحل:

a $\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$

$\tan x=\frac{\sin x}{\cos x}$

$\because\ \lim_{x\to 0}\cos x=1\ ,\ 1\neq 0$

$\therefore\ \lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}\right)$

$=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos x}$

قاعدة الضرب، توزيع النهاية

$=1\times\frac{\lim_{x\to 0}1}{\lim_{x\to 0}\cos x}=1\times\frac{1}{1}=1$

$\lim_{x\to 0}\cos x\neq 0$

b $\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x-3\sin x}{4x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{5\tan x}{4x}-\frac{3\sin x}{4x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\tan x}{4x}-\lim_{x\to 0}\frac{3\sin x}{4x}$

$=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}-\frac{3}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}$

نظرية (قاعدة الطرح)

$=\frac{5}{4}\times 1-\frac{3}{4}\times 1$

$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1\ ,\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$

$=\frac{5-3}{4}=\frac{1}{2}$

بسّط

حاول أن تحل

2 أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2\tan x}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{3\tan x+x^2\cos x}{5x}$

نتيجة (2)

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x}=1$$

نتيجة (3)

إذا كان $a\,,b\in\mathbb{R}^*$ فإن:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan ax}{bx}=\frac{a}{b}$$

مثال (3)

أوجد:

a $\lim_{x\to 0}\frac{5x+\sin x}{x}$

b $\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\tan x-2x\cos x}{3x}$

الحل:

قسمة البسط على المقام
a $\frac{5x+\sin x}{x} = \frac{5x}{x} + \frac{\sin x}{x}$

بسّط: $x \neq 0$
$= 5 + \frac{\sin x}{x}$

نظرية (قاعدة الجمع)
$\lim\limits_{x\to 0} \frac{5x+\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} 5 + \lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$

$= 5+1$

$= 6$

قسمة البسط على المقام
b $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{3}\cdot\frac{\tan x}{x} - \frac{2}{3}\cos x\right)$

بسّط $x \neq 0$
$= \lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x}{3}\cdot\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} - \lim\limits_{x\to 0}\frac{2}{3}\cos x$

$= \frac{1}{3}\times 1 - \frac{2}{3}\times 1$

بسّط
$= -\frac{1}{3}$

حاول أن تحل

3 أوجد:

a $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\sin x - x^2}{3x^2}$ **b** $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\tan 2x + 3x\cos 4x}{5x}$

نظرية الإحاطة Sandwich Theorem

إذا لم يكن ممكنًا إيجاد قيمة النهاية بطريقة مباشرة، فبإمكاننا إيجادها بطريقة غير مباشرة باستخدام نظريّة الإحاطة.

تتعلّق هذه النظريّة بدالّة f قيمتها بين قيم دالّتين أخريين h, g

حيث إذا كان للدالّتين g , h النهاية نفسها عندما $x \to c$

فإن للدالّة f حينها النهاية نفسها عندما $x \to c$

معلومة:

تسمى نظرية الإحاطة أحيانًا

Squeeze Theorem

Sandwich Theorem

or Pinching Theorem

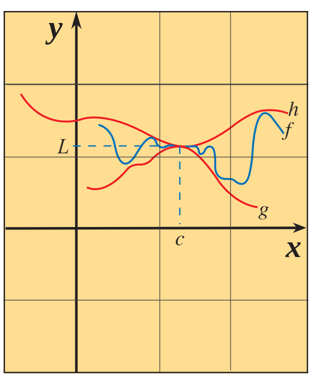
نظرية (13): نظرية الإحاطة
Sandwich Theorem

ليكن c , L عددين حقيقيين

فإذا كان $g(x) \le f(x) \le h(x)$ لكل x في جوار c ، $x \neq c$

وكان $\lim\limits_{x\to c} g(x) = \lim\limits_{x\to c} h(x) = L$

فإنّ: $\lim\limits_{x\to c} f(x) = L$



مثال (4)

أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)$

ⓑ $\lim\limits_{x\to 0}\left(4-x^2\sin\frac{1}{x}\right)$

الحل:

نعلم أنّ قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1,1]$

لذلك فإن:

ⓐ $-1\leqslant \sin\frac{1}{x}\leqslant 1$

اضرب في x^2 $\quad -x^2\leqslant x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2$

$\because\ \lim\limits_{x\to 0}(-x^2)=\lim\limits_{x\to 0}x^2=0$

ومن نظريّة الإحاطة $\quad \therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\sin\frac{1}{x}\right)=0$

ⓑ قيم دالّة الجيب تنتمي إلى الفترة $[-1,1]$ $\quad -1\leqslant \sin\frac{1}{x}\leqslant 1 \implies 1\geqslant -\sin\frac{1}{x}\geqslant -1$

$\therefore\ -1\leqslant -\sin\frac{1}{x}\leqslant 1$

اضرب في x^2 $\quad -x^2\leqslant -x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant x^2$

أضف 4 $\quad 4-x^2\leqslant 4-x^2\sin\frac{1}{x}\leqslant 4+x^2$

$\because\ \lim\limits_{x\to 0}(4-x^2)=4\ ,\ \lim\limits_{x\to 0}(4+x^2)=4$

نظرية الإحاطة $\quad \therefore\ \lim\limits_{x\to 0}\left(4-x^2\sin\frac{1}{x}\right)=4$

حاول أن تحل

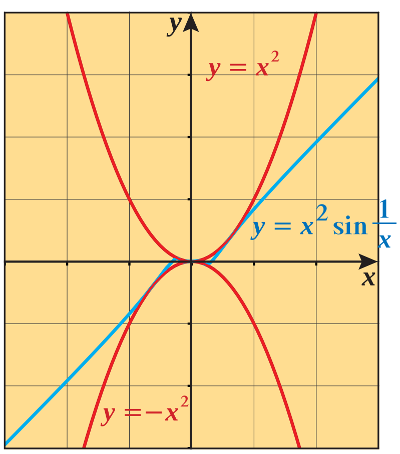
4 أوجد:

ⓐ $\lim\limits_{x\to 0}\left(x^2\cos\frac{1}{x^2}\right)$

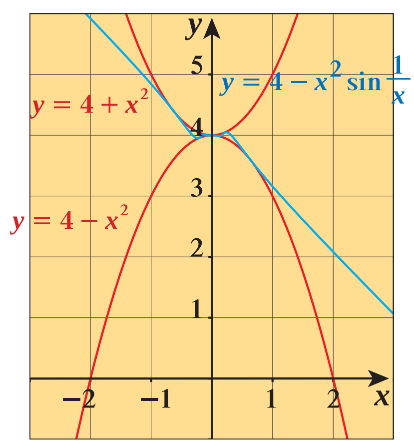
ⓑ $\lim\limits_{x\to 0}\left(2+x^2\sin\frac{1}{2x}\right)$

الأشكال التالية تحقق بيانيًّا المثال 4.

ⓐ



ⓑ



كذلك يمكننا استخدام نظرية الإحاطة في إيجاد نهايات الدوال المثلثية عندما $x \to \pm\infty$.

مثال (5)

أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x}$

الحل:

نعلم أن: $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$

$\forall x > 0 \ , \ \frac{-1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$

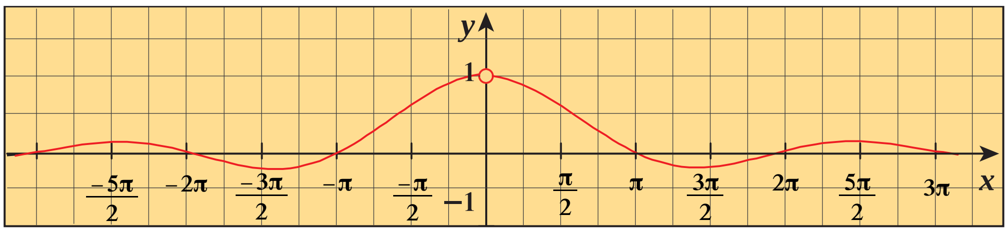
$\because \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{-1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

نظرية الإحاطة $\therefore \lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

حاول أن تحل

5 أوجد: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\cos x}{x+1}$

ويمكننا التأكد من صحة حل المثال السابق بيانيًّا كالتالي:



x (rad)	$y = \frac{\sin x}{x}$
$\frac{7\pi}{2}$	−0.091
$\frac{37\pi}{7}$	0.0224
150	−0.00477
240	0.00394
300	−0.00333
600	0.000074

الرسم البياني للدالة $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات، وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x \to \pm\infty$.

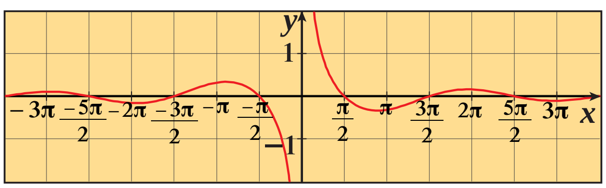
يبيّن جدول قيم الدالة f أن $f(x) \to 0$ عندما $x \to \infty$.

ويمكن استنتاج $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$

كذلك يمكن استنتاج

الرسم البياني للدالة f : $f(x) = \frac{\cos x}{x}$ يتذبذب حول محور السينات وسعة التذبذب تتناقص للصفر عندما $x \to \pm\infty$ ويمكن استنتاج أن $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{\cos x}{x} = 0$

x (rad)	$y = \frac{\cos x}{x}$
3π	−0.106
4π	0.0795
100	−0.00862
200	0.002435
300	−0.0000736
450	0.00162256

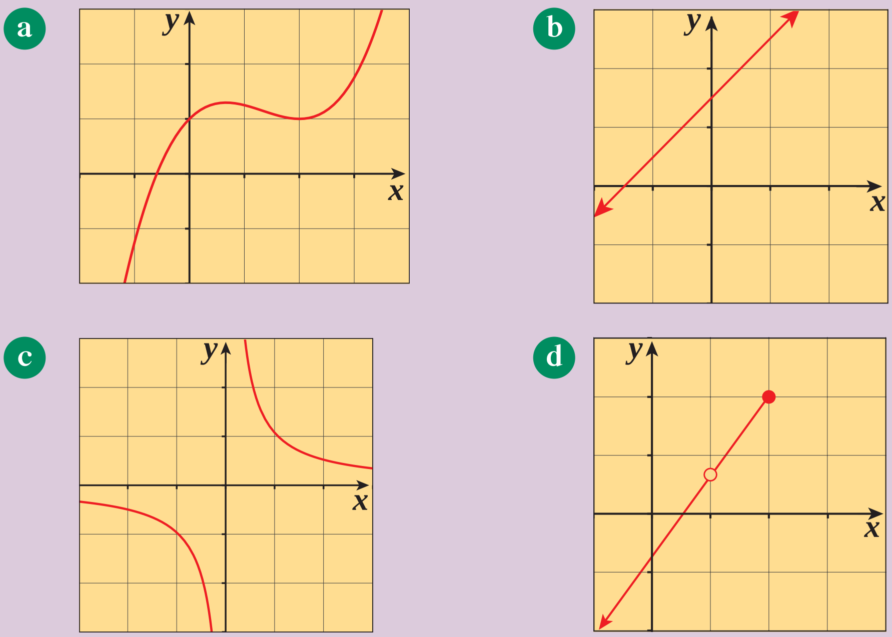


الاتّصال

Continuity

دعنا نفكر ونتناقش

البيانات التالية توضح منحنيات دوال مختلفة:



أي من المنحنيات أمكن رسمه دون رفع سن القلم؟ وأيها لزم رفع سن القلم؟

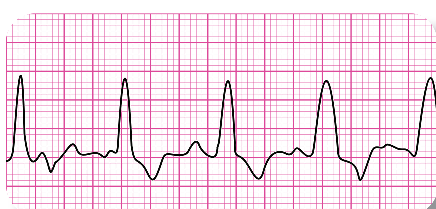
الاتصال عند نقطة Continuity at a Point

1 المنحنيات في البيانات b , a

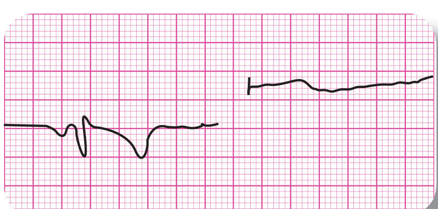
نقول عنها أن ليس بها **نقاط انفصال** «**متصلة عند كل نقطة من نقاطها**».

2 المنحنيات في البيانات d , c

نقول إن هذه المنحنيات لها نقاط انفصال.



شكل (1)



شكل (2)

يستخدم الأطباء مبدأ الاتصال لدراسة منحنى تخطيط القلب.
يبيّن الشكل (1) تخطيطاً متصلاً بينما يبيّن الشكل (2) تخطيطاً به نقاط انفصال.

سوف تتعلم

- الاتصال عند نقطة.
- الانفصال عند نقطة.
- أنواع الانفصال.
- التخلص من الانفصال.

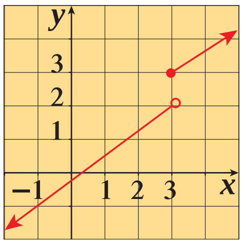
المفردات والمصطلحات:

- الاتصال Continuity
- اتصال من الجهتين Two–Side Continuity
- اتصال من جهة اليمين Continuity From the Right
- اتصال من جهة اليسار Continuity From the Left
- الاتصال عند نقطة Continuity at a Point
- انفصال Discontinuity
- انفصال يمكن التخلص منه Removable Discontinuity
- انفصال نتيجة قفزة Jump Discontinuity
- انفصال لا نهائي Infinite Discontinuity

معلومة:

بيان تخطيط القلب يعبّر بوضوح عن الاتصال إذا كان القلب سليمًا ومعافى، وعن الانفصال إذا كان يوجد انسداد في الشرايين.

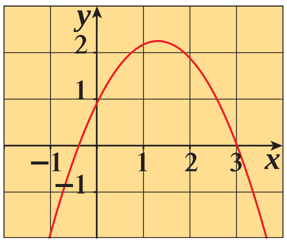
تدريب

1


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

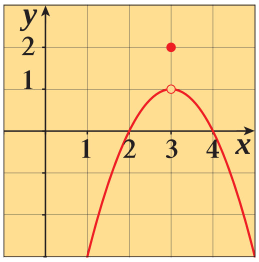
ماذا تلاحظ؟

2


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

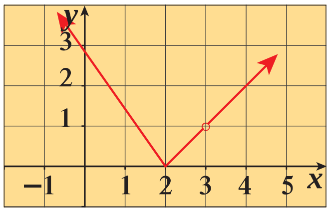
ماذا تلاحظ؟

3


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

4


$\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ ....

$f(3)$ ....

ماذا تلاحظ؟

تعريف (8): الاتصال عند نقطة

تكون الدالة f متصلة عند $x = c$ في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

من التعريف السابق نجد أنه لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط **الثلاثة** التالية:

1. الدالة f **معرّفة** عند $x = c$ أي $f(c)$ موجودة.
2. $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة
3. $\lim\limits_{x\to c} f(x) = f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f **منفصلة (ليست متصلة) عند** $x = c$.

مثال (1)

لتكن f :
$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x & : \ x \geq 1 \\ 5x - 1 & : \ x < 1 \end{cases}$$

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 1$.

الحل:

$$f(1)=(1)^2+3(1)=1+3=4 \qquad (1)$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^-}(5x-1)=5(1)-1=4$$

$$\lim_{x\to1^+} f(x)=\lim_{x\to1^+}(x^2+3x)=(1)^2+3(1)=4$$

$$\lim_{x\to1^-} f(x)=\lim_{x\to1^+} f(x)=4$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=4 \qquad (2)$$

$$\lim_{x\to1} f(x)=f(1)$$

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة عند $x=1$

حاول أن تحل

1 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^3+x & : x\le 0 \\ \dfrac{x^2}{x+1} & : x>0 \end{cases}$ ابحث اتصال f عند $x=0$

مثال (2)

لتكن f : $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-9}{x-3} & : x>3 \\ 7 & : x\le 3 \end{cases}$

ابحث اتصال الدالة f عند $x=3$.

الحل:

$$f(3)=7$$

$$\lim_{x\to3^-} f(x)=\lim_{x\to3^-} 7=7$$

$$\lim_{x\to3^+} f(x)=\lim_{x\to3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to3^+}\frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)}{\cancel{x-3}_{1}}$$

$$=\lim_{x\to3^+}(x+3)=3+3=6$$

$$\because \lim_{x\to3^-} f(x)\neq\lim_{x\to3^+} f(x)$$

$\therefore \lim_{x\to3} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x=3$

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$ حيث $f(x)=\begin{cases} 2x+1 & : x<2 \\ 1 & : x=2 \\ x^2+1 & : x>2 \end{cases}$

في المثال السابق نجد أن $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = f(3) = 7$ في هذه الحالة تكون الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار وسوف نتطرق لذلك لاحقًا.

مثال (3)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$ حيث
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{|x-2|} & : x \neq 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

الحل:

$$|x-2| = \begin{cases} x-2 & : x > 2 \\ -x+2 & : x < 2 \end{cases}$$

$$\frac{x-2}{|x-2|} = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x-2} & : x > 2 \\ \dfrac{-x+2}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$$

$$\therefore\ f(x) = \begin{cases} 1 & : x > 2 \\ -1 & : x < 2 \\ 1 & : x = 2 \end{cases}$$

$$f(2) = 1$$

$$\lim_{x\to2^-} f(x) = -1 \quad , \quad \lim_{x\to2^+} f(x) = 1$$

$$\because\ \lim_{x\to2^-} f(x) \neq \lim_{x\to2^+} f(x)$$

$\therefore\ \lim\limits_{x\to2} f(x)$ ليست موجودة

$\therefore$ الدالة f ليست متصلة عند $x = 2$

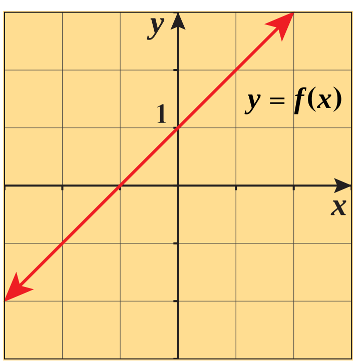
حاول أن تحل

3 ابحث اتصال الدالة f عند $x = -1$ حيث
$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x+1|}{x+1} - 2x & : x \neq -1 \\ 2 & : x = -1 \end{cases}$$

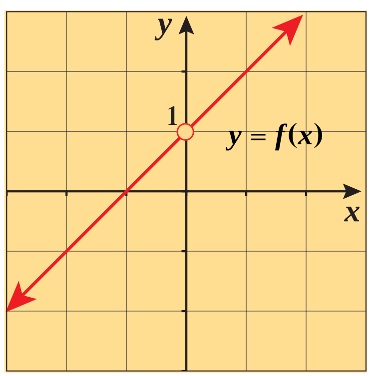
ملاحظة: في المثال السابق الدالة f متصلة عند $x = 2$ من جهة اليمين. لماذا؟

يبيّن الشكلان c , b أدناه أمثلة توضيحيّة **لبعض الأنواع المختلفة للانفصال:**

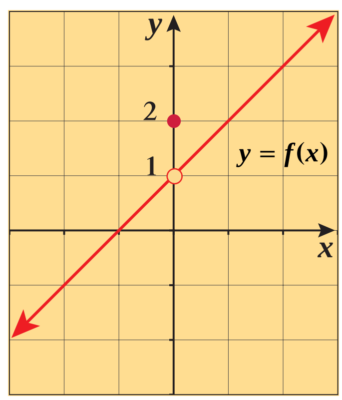
a



b



c

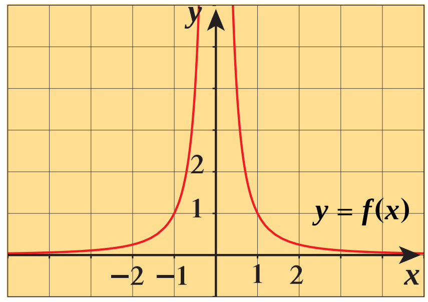


فالدالّة الموضّحة في الشكل a متصلة عند $x = 0$، والدالّة الموضّحة في الشكل b ليست متّصلة عند $x = 0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0) = 1$. الدالّة الموضّحة في الشكل c ليست متّصلة عند $x = 0$ ولكي تكون متّصلة يقتضي أن تكون $f(0)$ مساوية لِـ 1 بدلًا من 2.

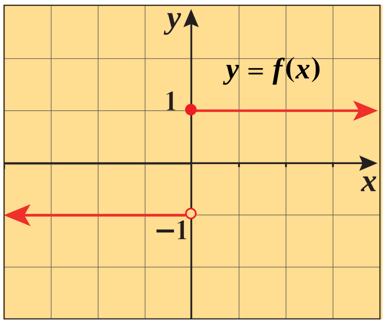
الانفصال في c , b هو انفصال يمكن التخلّص منه من خلال إعادة تعريف الدّالة عند $x = 0$ وذلك بوضع $\lim\limits_{x\to0} f(x) = f(0)$

والأشكال التالية أمثلة أخرى **لدوال منفصلة:**

e



d



وإذا نظرنا إلى الانفصال في e , d حيث $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ غير موجودة ولا توجد طريقة لإصلاح ذلك الوضع بتغيّر f عند الصفر. للدالّة في d لها **انفصال نتيجة قفزة**؛ والنهايات ذات الجانب الواحد موجودة لكن لها قيم مختلفة.

(نهاية الدالة من جهة اليمين ≠ نهاية الدالة من جهة اليسار).

والدالّة $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في e لها **انفصال لا نهائيّ**. (النهاية غير موجودة).

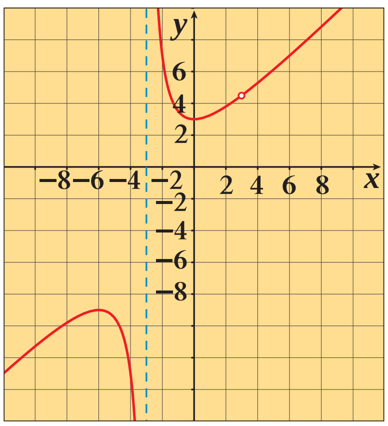
التخلّص من الانفصال The Removal of Discontinuity

لتكن الدالّة f : $f(x) = \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9}$

لاحظ أن مجال f هو $D = \mathbb{R} - \{-3 , 3\}$

$$f(x) = \frac{\overset{1}{\cancel{(x-3)}}(x^2 + 3x + 9)}{\underset{1}{\cancel{(x-3)}}(x+3)}$$

$$= \frac{x^2 + 3x + 9}{x+3} \quad , \quad x \neq 3$$



ومن الرسم البيانيّ للدالّة f نلاحظ أن لبيان f انفصال عند $x = 3$ يمكن التخلّص منه لأن النهاية موجودة بينما الانفصال عند $x = -3$ لا يمكن التخلّص منه لأن النهاية غير موجودة.

وللتخلّص من الانفصال نعرّف f عند $x = 3$ بحيث نجعل $\lim\limits_{x\to 3} f(x) = f(3)$

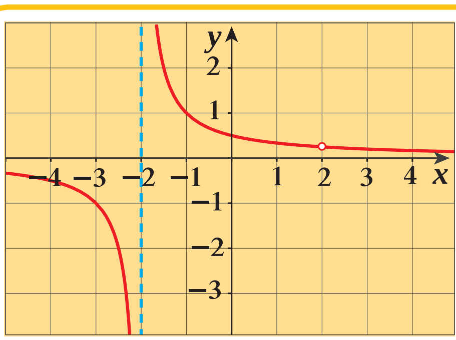
$$\lim_{x\to 3} \frac{x^3 - 27}{x^2 - 9} = \lim_{x\to 3} \frac{x^2 + 3x + 9}{x + 3}$$

$$= \frac{9 + 9 + 9}{3 + 3} = \frac{27}{6} = \frac{9}{2}$$

نسمي الدالة بـ g بعد إعادة تعريفها:

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - 27}{x^2 - 9} & : \; x \neq 3 \;,\; x \neq -3 \\ \dfrac{9}{2} & : \; x = 3 \end{cases}$$

مثال (4)



لتكن الدالّة : $f(x) = \dfrac{x - 2}{x^2 - 4}$ الموضّح بيانها بالشكل

a بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x = -2$, $x = 2$

b أعد تعريف الدالّة f بحيث تصبح متصلة عند $x = 2$

الحل:

a $f(x) = \dfrac{x-2}{x^2-4}$

حلّل المقام إلى عوامل

$$= \frac{x-2}{(x-2)(x+2)} = \frac{1}{x+2} \quad , \quad x \neq 2$$

مجال f : $D = \mathbb{R} - \{-2, 2\}$

$\therefore$ f غير متصلة عند $x = -2$, $x = 2$ لأنها غير معرّفة عندهما.

b $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{1}{x+2} = \dfrac{1}{4}$

$\therefore$ يمكن إعادة تعريف f عند $x = 2$ لأن $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = \dfrac{1}{4}$

نعيد تعريف الدالة f ونسمي الدالة بـ g.

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{x-2}{x^2-4} & : \quad x \neq 2 \ , \ x \neq -2 \\ \dfrac{1}{4} & : \quad x = 2 \end{cases}$$

حاول أن تحل

4 أعد تعريف الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$ لتصبح دالّة متّصلة عند $x = 1$.

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

سوف تتعلم

- نظريات الاتصال.
- دوال متصلة.
- الدوال المركبة.
- اتصال الدوال المركبة.

المفردات والمصطلحات:

- دالة متصلة
Continuous Function
- دالة مركبة
Composite Function

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f: $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x$

والدالة g: $g(x) = |x - 2|$

والدالة q: $q(x) = x^2 - 5$

1 ابحث اتصال كل من f, g عند $x = 2$

2 ابحث اتصال كل من $f \cdot q$, $f + q$ عند $x = 2$

3 لتكن h: $h(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)}$

a اكتب h دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

b هل الدالة h متصلة عند $x = 2$؟ ولماذا؟

نظرية (14): خواصّ الدوالّ المتّصلة

Properties of Continuous Functions

إذا كانت f, g دالتين متّصلتين عند $x = c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x = c$

الجمع:		$f + g$	1
الطرح:		$f - g$	2
الضرب في ثابت:	$k \in \mathbb{R}$	$k \cdot f$,	3
الضرب:		$f \cdot g$	4
القسمة:	$g(c) \neq 0$	$\dfrac{f}{g}$,	5

معلومة:

تمثّل الأفعوانيّة خطًّا متّصلًا لمسار العربة.

دوال متّصلة Continuous Functions

1 الدالة f: $f(x) = k$ حيث k ثابت متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

2 الدالة كثيرة الحدود متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

3 الدالة الحدودية النسبية $\dfrac{f}{g}$ متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

4 الدالة f: $f(x) = |x|$ متصلة عند كل $c \in \mathbb{R}$.

5 الدوال المثلثية الأساسية متصلة عند كل عدد حقيقي c في مجالها أي $c \in D$.

مثال (1)

ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

ⓐ $f(x) = x^2 + |x|$, $c = -1$

ⓑ $f(x) = \sin x - \cos x$, $c = \frac{\pi}{2}$

الحل:

ⓐ لتكن الدالة g : $g(x) = x^2$

الدالة h : $h(x) = |x|$

الدالة g دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = -1$

الدالة h دالة مطلق x متصلة عند $x = -1$

$\therefore$ دالة الجمع f حيث $f(x) = g(x) + h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = -1$ (نظرية)

ⓑ لتكن الدالة g : $g(x) = \sin x$

الدالة h : $h(x) = \cos x$

الدالة g دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

الدالة h دالة مثلثية متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ متصلة عند $x = \frac{\pi}{2}$ (نظرية)

حاول أن تحل

1 ابحث اتصال الدالة f عند $x = c$ في كل مما يلي:

ⓐ $f(x) = x^2 - 4x + 3 + |x|$, $c = 3$

ⓑ $f(x) = \frac{\tan x}{x+1}$, $c = \frac{\pi}{4}$

مثال (2)

ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x-2}{x^2+9} - \frac{1}{x}$ عند $x = 3$

الحل:

لتكن الدالة g : $g(x) = \frac{x-2}{x^2+9}$

الدالة h : $h(x) = \frac{1}{x}$

الدالة g دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x = 3$).

الدالة h دالة حدودية نسبية متصلة عند $x = 3$ (لأن المقام لا يساوي الصفر عند $x = 3$).

$\therefore$ دالة الطرح f حيث $f(x) = g(x) - h(x)$ هي دالة متصلة عند $x = 3$ (نظرية)

حاول أن تحل

2 ابحث اتصال الدالة f : $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1} - \frac{2x}{x-2}$ عند $x = 1$

اتصال الدوال الجذرية عند نقطة

نظرية (15)

a الدالة الجذرية $y = \sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}^+$ ، n عدد صحيح زوجي موجب،
ومتصلة عند كل $x = c : c \in \mathbb{R}$ ، n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

b إذا كانت g دالة متصلة عند $x = c$ وكانت $g(c) > 0$
فإن الدالة: $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x = c$

مثال (3)

ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند العدد المبيّن:

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1}$ ، $x = 1$

b $f(x) = \sqrt{x+3}$ ، $x = -1$

الحل:

a لتكن الدالة g: $g(x) = \sqrt[3]{x}$

الدالة h: $h(x) = x^2 + 1$

g دالة جذرية حيث $n = 3$ (عدد صحيح فردي) متصلة عند $x = 1$ (نظرية)

h دالة كثيرة حدود متصلة عند $x = 1$

وحيث إن $2 \neq 0$ ، $h(1) = 2$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ متصلة عند $x = 1$

b نفرض أن g: $g(x) = x + 3$ حيث $x \geqslant -3$

g دالة متصلة عند $x = -1$

وحيث إن $2 > 0$ ، $g(-1) = 2$

$\therefore$ الدالة f حيث $f(x) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x+3}$ متصلة عند $x = -1$ (نظرية)

حاول أن تحل

3 ابحث اتصال كل من الدالتين التاليتين عند $x = -2$

a $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+4}$

b $f(x) = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

الدالة المركبة Composite Function

إذا كانت كل من g , f دالة حقيقية فإننا سنرى من خلال بعض الأمثلة أننا نستطيع تعيين دالة جديدة تنتج من تركيب الدالتين g , f إذا توفرت بعض الشروط.

لنأخذ على سبيل المثال الدالتين الحقيقيتين:

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{R}$$

حيث: $f(x) = x - 1$

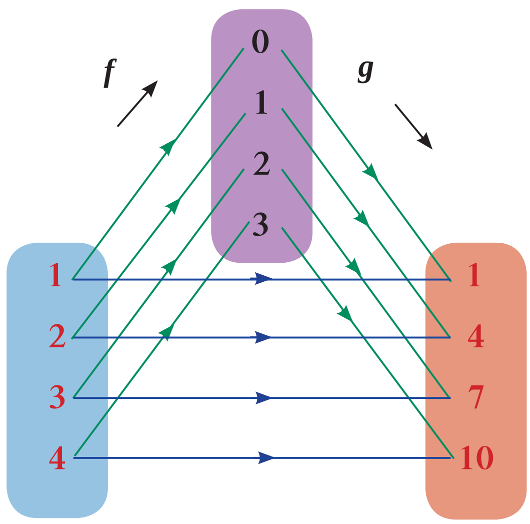
$$g : \{0, 1, 2, 3\} \to \mathbb{R}$$

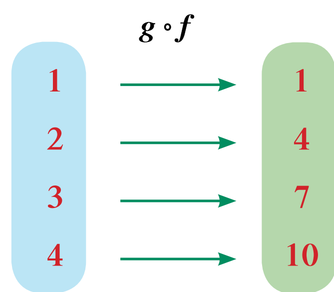
$$g(x) = 3x + 1$$

واضح أن:

تحت تأثير الدالة الثانية g		تحت تأثير الدالة الأولى f	
0	$\longrightarrow 3\times 0+1=1$	1	$\longrightarrow 1-1=0$
1	$\longrightarrow 3\times 1+1=4$	2	$\longrightarrow 2-1=1$
2	$\longrightarrow 3\times 2+1=7$	3	$\longrightarrow 3-1=2$
3	$\longrightarrow 3\times 3+1=10$	4	$\longrightarrow 4-1=3$

وإذا فرضنا دالة ثالثة تعمل عمل الدالتين g , f معًا (f ثم g) لوجدنا أنه تحت تأثير هذه الدالة الجديدة:





نرمز للدالة الجديدة بالرمز $(g\circ f)$ وتقرأ g بعد f

ويكون: $\boxed{(g\circ f)(x)=g(f(x))}$

$$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(0)=1$$
$$(g\circ f)(2)=g(f(2))=g(1)=4$$
$$(g\circ f)(3)=g(f(3))=g(2)=7$$
$$(g\circ f)(4)=g(f(4))=g(3)=10$$

لاحظ أن: مدى الدالة الأولى f هو مجال الدالة الثانية g وإلا لما أمكن تعيين $(g\circ f)$.

وعمومًا:

إذا كانت كل من f , g دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعين دالة مركبة h:

$$h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$$

ستقتصر دراستنا على الدوال القابلة للتركيب.

مثال (4)

الدالتان g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 - 1$, $f(x) = 1 + x$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(2)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(2)$

الحل:

ⓐ $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (f(x))^2 - 1 = (1+x)^2 - 1 = x^2 + 2x$

حل آخر

$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(1+x) = (1+x)^2 - 1 = 1 + 2x + x^2 - 1 = x^2 + 2x$

ⓑ $(g \circ f)(2) = (2)^2 + 2(2) = 8$

ⓒ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 1 + g(x) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

حل آخر

$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x^2 - 1) = 1 + x^2 - 1 = x^2$

ⓓ $(f \circ g)(2) = (2)^2 = 4$

حاول أن تحل

4 إذا كانت g , f معرّفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي: $g(x) = x^2 + 3$, $f(x) = 2x + 3$ أوجد:

ⓐ $(g \circ f)(x)$ ⓑ $(g \circ f)(-1)$ ⓒ $(f \circ g)(x)$ ⓓ $(f \circ g)(-1)$

نستنتج من مثال (4) أن:

$$(g \circ f)(x) \neq (f \circ g)(x)$$

إلّا في بعض الحالات الخاصة.

مثال (5)

لتكن: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x^4 + 2$

أوجد:

ⓐ $(f \circ g)(x)$ ⓑ $(f \circ g)(0)$ ⓒ $(g \circ f)(x)$ ⓓ $(g \circ f)(0)$

الحل:

لاحظ أن مجال f هو $[0, \infty)$

وأن مدى g : $[2, \infty)$ هو مجموعة جزئية من مجال f

مجال g هو $\mathbb{R}$

$\therefore$ مدى f هو مجموعة جزئية منه

ⓐ $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sqrt{g(x)} = \sqrt{x^4 + 2}$

ⓑ $(f \circ g)(0) = \sqrt{(0)^4 + 2} = \sqrt{2}$

ⓒ $(g \circ f)(x) = (f(x))^4 + 2 = (\sqrt{x})^4 + 2 = x^2 + 2$

ⓓ $(g \circ f)(0) = (0)^2 + 2 = 2$

حاول أن تحل

5 لتكن: $g(x) = \dfrac{3}{x^2+4}$, $f(x) = \sqrt{1+x^2}$ أوجد:

a $(f \circ g)(x)$

b $(g \circ f)(\sqrt{3})$

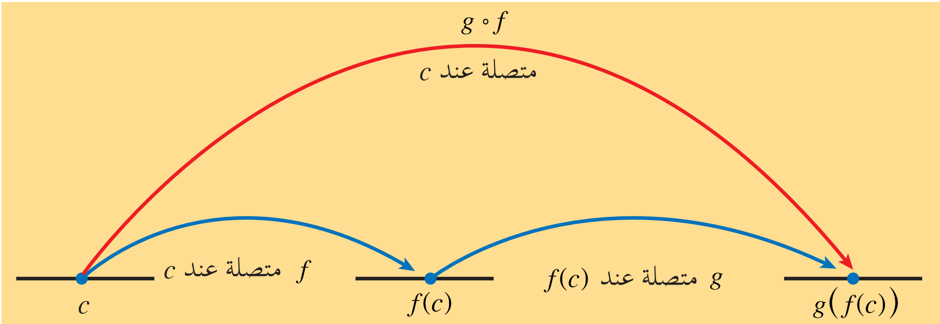
اتصال الدوالّ المركّبة عند نقطة Continuity of Composite Functions at a Point

نظرية (16): اتصال الدوال المركّبة

إذا كانت f متّصلة عند c ، و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g \circ f$ متّصلة عند c.

أي أن نهاية $g(f(x))$ عندما $x \to c$ هي $g(f(c))$ بمعنى

$$\lim_{x \to c} g(f(x)) = g(f(c))$$



مثال (6)

لتكن: $f(x) = x^2 + 5$, $g(x) = \sqrt{x}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

الحل:

f دالة متصلة عند $x = -2$ (1)

$f(-2) = 9$

g دالة متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}^+$

$\therefore$ g دالة متصلة عند $x = 9$

أي أن g دالة متصلة عند $x = f(-2)$ (2)

من (1) , (2) نجد أن $g \circ f$ متصلة عند $x = -2$

حاول أن تحل

6 لتكن: $g(x) = 2x + 3$ ، $f(x) = \frac{|x|}{x+2}$. ابحث اتصال الدالة $f \circ g$ عند $x = 1$

مثال (7)

لتكن: $f(x) = |x^2 - 5x + 6|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

الحل:

نفرض أن: $h(x) = x^2 - 5x + 6$ ، $g(x) = |x|$

فنجد أن: $f(x) = (g \circ h)(x)$

$g(h(x)) = |x^2 - 5x + 6|$

h دالة متصلة عند $x = 2$ (1)

$h(2) = 4 - 10 + 6 = 0$

g دالة متصلة عند $x = 0$

أي أن g دالة متصلة عند $x = h(2)$ (2)

من (1) , (2) نجد أن $g \circ h$ متصلة عند $x = 2$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 2$

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = |x^2 - 3x + 2|$ ابحث اتصال الدالة f عند $x = 0$

1–7

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

سوف تتعلم

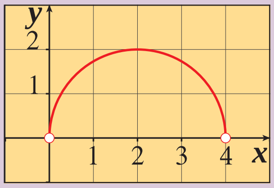
- الاتصال على فترة.
- ناتج تركيب دالتين متصلتين.

المفردات والمصطلحات:

- الاتصال على فترة
Continuity on an Interval

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{-x^2+4x}$ معرّفة على الفترة $(0, 4)$



a ابحث اتصال f عند $x=1$, $x=2$

b هل f متصلة عند $x=0$ من جهة اليمين؟

c هل f متصلة عند $x=4$ من جهة اليسار؟

d هل توجد نقاط تنتمي إلى الفترة $(0, 4)$ لا تكون فيها الدالة f متصلة؟

الاتّصال على فترة Continuity on an Interval

تعريف (9) الاتّصال على فترة مفتوحة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة (a , b) فإننا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المفتوحة (a , b) إذا كانت f متصلة عند كل x تنتمي إلى الفترة (a , b)

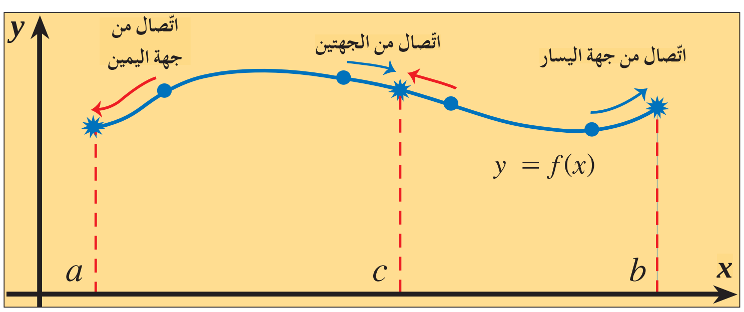
تعريف (10) الاتّصال على فترة مغلقة:

لتكن الدالة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّنا نقول أن الدالة f متصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$ إذا تحققت الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)

2 الدالة f متّصلة عند $x=a$ من جهة اليمين أي أنّ: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

3 الدالة f متّصلة عند $x=b$ من جهة اليسار أي أنّ: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$



الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y=f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

مثال (1)

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$ حيث: $f(x) = \begin{cases} -2 & : x = 1 \\ x^2 - 3 & : 1 < x < 3 \\ 6 & : x = 3 \end{cases}$

الحل:

$f(x) = x^2 - 3 \quad : \quad x \in (1, 3)$

$\forall c \in (1, 3)$

$f(c) = c^2 - 3$

$\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} (x^2 - 3) = c^2 - 3$

$\therefore \lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) \qquad \forall c \in (1, 3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $(1, 3)$ $\quad (1)$

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 1$ من جهة اليمين.

$f(1) = -2$

$\lim\limits_{x \to 1^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 1^+} (x^2 - 3) = -2$

$\because f(1) = \lim\limits_{x \to 1^+} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 1$ من جهة اليمين. $\quad (2)$

ندرس اتصال الدالة f عند $x = 3$ من جهة اليسار.

$f(3) = 6$

$\lim\limits_{x \to 3^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 3^-} (x^2 - 3) = 6$

$\therefore f(3) = \lim\limits_{x \to 3^-} f(x)$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = 3$ من جهة اليسار. $\quad (3)$

من $(1), (2), (3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على $[1, 3]$

حاول أن تحل

1 ادرس اتصال الدالة f على $[1, 5]$ حيث: $f(x) = \begin{cases} 2 & : x = 1 \\ \dfrac{x^2 + 1}{x} & : 1 < x < 5 \\ \dfrac{26}{5} & : x = 5 \end{cases}$

ملاحظات:

أوّلًا: إذا تحقق الشرطان 2 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $[a, b)$.**

ثانيًا: إذا تحقق الشرطان 3 , 1 من التعريف (10) نقول إن **الدالة f متصلة على $(a, b]$.**

ثالثًا: تبقى النظرية (14) صحيحة إذا استبدلنا النقطة بفترة بحيث تكون هذه الفترة مجموعة جزئية من مجال الدالة.

رابعًا: إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

خامسًا: إذا كانت الدالة متصلة على كل من الفترتين $[a, c]$, $[c, b]$ فإن الدالة متصلة على $[a, b]$.

سادسًا: يبقى التعريف (10) صحيحًا في حالة الفترات على الصورة $[a, \infty)$, $(-\infty, b]$.

مثال (2)

ادرس اتصال كل من الدوال التالية على الفترة المبيّنة:

a $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$, $[-1,5]$

b $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$, $[0,5]$

الحل:

a $\because$ f دالة حدودية نسبية ،

$\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ x^2+1 \neq 0$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$

$\because\ [-1,5] \subseteq \mathbb{R}$

$\therefore$ f متصلة على $[-1,5]$

b $f(x)=\dfrac{x}{x^2-4}$

$x^2-4=0 \qquad \forall x \in \{-2,2\}$

$\because$ f دالة حدودية نسبية متصلة $\forall x \in \mathbb{R}-\{-2,2\}$

$\because$ f ليست متصلة عند $x=2$ ، $2 \in [0,5]$

$\therefore$ الدالة f متصلة $\forall x \in [0,5]-\{2\}$

أي أنها متصلة على كل من $[0,2)$, $(2,5]$.

حاول أن تحل

2 ادرس اتصال f على الفترة المبيّنة:

a $f(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+2}$, $[0,3]$

b $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$, $[0,2]$

مثال (3)

ادرس اتصال الدالة f على مجالها حيث:

$$f(x)=\begin{cases} x+3 & : \quad x \leq -1 \\ \dfrac{4}{x+3} & : \quad x > -1 \end{cases}$$

الحل:

مجال الدالة f هو: $D_f=(-\infty,-1]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$

ندرس اتصال الدالة f على مجالها.

نفرض: $g(x) = x + 3$

g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because \quad f(x) = g(x) \qquad \forall x \in (-\infty, -1]$

$\therefore$ f دالة متصلة على $(-\infty \,, -1]$ $\qquad (1)$

نفرض: $h(x) = \dfrac{4}{x+3}$

h دالة حدودية نسبية متصلة لكل $x \in \mathbb{R} - \{-3\}$

$\because \quad f(x) = h(x) \qquad \forall\, x \in (-1 \,, \infty)$

$\therefore$ f متصلة على $(-1 \,, \infty)$ $\qquad (2)$

ندرس اتصال الدالة f عند $x = -1$ من جهة اليمين.

حيث نهاية المقام $\neq 0$ $\qquad f(-1) = 2$

$$\lim_{x \to -1^+} f(x) = \lim_{x \to -1^+} \frac{4}{x+3} = 2$$

$$\because \quad f(-1) = \lim_{x \to -1^+} f(x)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x = -1$ من جهة اليمين. $\qquad (3)$

من $(1), (2), (3)$

$\therefore$ الدالة f متصلة على الفترة $(-\infty \,, \infty)$

$\therefore$ f متصلة على $\mathbb{R}$

حاول أن تحل

3 لتكن f :

$$f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & , \quad x < 1 \\ -x + 2 & , \quad 1 \le x < 3 \\ 1 & , \quad x \ge 3 \end{cases}$$

ادرس اتصال الدالة f على مجالها.

مثال (4)

لتكن الدالة f : $\qquad f(x) = \begin{cases} x^2 - a & : \quad x < 0 \\ 2 & : \quad x = 0 \\ ax + b & : \quad x > 0 \end{cases}$ $\qquad$ متصلة على مجالها $\mathbb{R}$

أوجد قيمة الثابتين $a \,, b$

الحل:

$\because$ f دالة متصلة على مجالها $\mathbb{R}$ $\quad \therefore$ f متصلة عند $x = 0$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0} f(x) = f(0)$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0)$$

$$f(0) = 2$$

$$\lim_{x\to0^-} f(x) = \lim_{x\to0^-} (x^2 - a) = -a$$
$$\therefore\ -a = 2 \implies a = -2$$
$$\lim_{x\to0^+} f(x) = \lim_{x\to0^+} (ax + b) = b$$
$$\therefore\ b = 2$$

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x) = \begin{cases} 5 & : \quad x = 1 \\ ax + b & : \quad 1 < x < 4 \\ b + 8 & : \quad x = 4 \end{cases}$$

متصلة على $[1,4]$. أوجد قيم الثابتين $a\,,b$

تعلمنا دراسة اتصال الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ عند $x = c$ وكذلك يمكننا دراسة اتصال الدالة f على فترة ما باستخدام التعميم التالي:

تعميم:

إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x) \geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x) = \sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

مثال (5)

لتكن f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[-5,0]$.

الحل: نفرض أن $g(x) = x^2 - 2x$ ، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

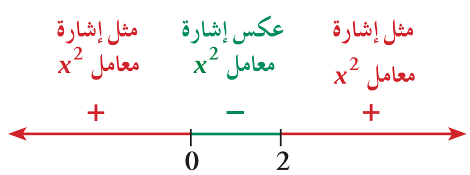
$$\therefore\ D_f = \{x : g(x) \geq 0\}$$

$x^2 - 2x \geq 0$

المعادلة المناظرة: $x^2 - 2x = 0$

$x(x-2) = 0$

$x = 0 \quad , \quad x = 2$



$\therefore$ مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - (0,2)$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-5,0]$ حيث $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x}$

$g(x) \geqslant 0 \qquad \forall x \in \mathbb{R} - (0,2)$

$\because [-5,0]$ مجموعة جزئية من $\mathbb{R} - (0,2)$

$\therefore\ g(x) \geqslant 0 \qquad \forall\, x \in [-5,0] \qquad (1)$

معلومة:

إشارة الحدودية $f(x)$ تكون ثابتة لا تتغير في الفترة $(a\,,b)$ إذا كانت هذه الفترة لا تحتوي على صفر من أصفار الحدودية $f(x)$. ولتعيين إشارة الحدودية في هذه الفترة نعوّض عن x بأي قيمة $c \in (a\,,b)$.

$\because$ الدالة g: $g(x) = x^2 - 2x$ دالة متصلة على $[-5, 0]$ $\quad (2)$

من $(1), (2)$

$\therefore$ f متصلة على $[-5, 0]$

حاول أن تحل

5 لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2 - 7x + 10}$.

أوجد D_f (مجال الدالة f) ثم ادرس اتصال الدالة f على $[6, 10]$.

مثال (6)

لتكن f: $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[-3, 3]$.

الحل: نفرض أن $g(x) = 9 - x^2$، $f(x) = \sqrt{g(x)}$

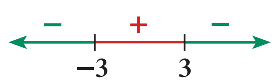
$D_f = \{x : g(x) \geqslant 0\}$

$9 - x^2 \geqslant 0$

المعادلة المناظرة: $9 - x^2 = 0$

$(3 - x)(3 + x) = 0$

$x = 3 \quad , \quad x = -3$



$\therefore$ مجال الدالة f هو $[-3, 3]$

لدراسة اتصال الدالة f على $[-3, 3]$ حيث $f(x) = \sqrt{9 - x^2}$

$g(x) \geqslant 0 \quad \forall x \in [-3, 3] \quad (1)$

الدالة g: $g(x) = 9 - x^2$ متصلة على $[-3, 3]$ $\quad (2)$

من (1) و (2)

$\therefore$ f متصلة على $[-3, 3]$

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \sqrt{-x^2 + 4x - 3}$.

ادرس اتصال الدالة f على $[1, 3]$.

ملاحظة:

ناتج تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$ هو دالة متصلة على $\mathbb{R}$.

مثال (7)

لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4}$. ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

الحل:

نفرض أن: $h(x) = x^2 - 5x + 4$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$

$$f(x) = (g \circ h)(x)$$

$$\begin{aligned} f(x) = (g \circ h)(x) &= g(h(x)) \\ &= g(x^2 - 5x + 4) \\ &= \sqrt[3]{x^2 - 5x + 4} \end{aligned}$$

$\because$ الدالة h متصلة على $\mathbb{R}$.

$\because$ الدالة g متصلة على $\mathbb{R}$.

$\therefore$ الدالة f متصلة على $\mathbb{R}$ لأنها عبارة عن تركيب دالتين كل منهما متصلة على $\mathbb{R}$.

حاول أن تحل

7 لتكن: $f(x) = \sqrt[3]{-x^2 + 2x + 5}$.

ادرس اتصال الدالة f على $\mathbb{R}$.

المرشد لحل المسائل

لتكن الدالّة: $f(x)=\dfrac{x^3+kx^2+3x-2}{x^2-x-2}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أوجد قيمة k التي تجعل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتصبح متّصلة عند $x=2$، ثم أعد تعريف الدالّة.

الحل:

a المقام لا يساوي صفر $\qquad x^2-x-2\neq 0$

تحليل المقام $\qquad (x+1)(x-2)\neq 0$

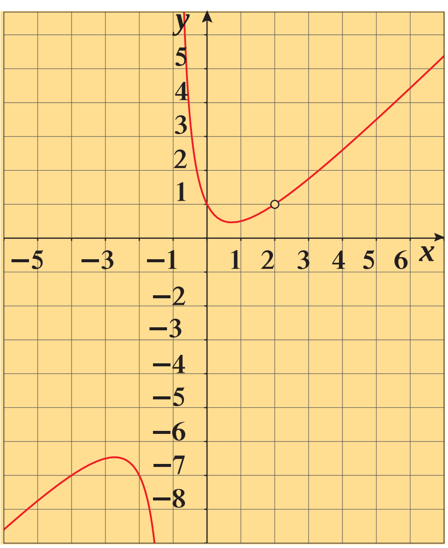
$x\neq -1\ ,\ x\neq 2$

$\therefore$ مجال الدالّة: $\qquad D_f=(-\infty,-1)\cup(-1,2)\cup(2,+\infty)$

b كي نعرف الدالّة وتصبح متّصلة عند $x=2$، يجب أن يكون 2 صفرًا للبسط أي:

أعداد حقيقية $a\,,b\,,c$ $\qquad x^3+kx^2+3x-2=(x-2)(ax^2+bx+c)$

نتوسّع $\qquad x^3+kx^2+3x-2=ax^3+(b-2a)x^2+(c-2b)x-2c$



بمقارنة المعاملات نجد أن: $\qquad a=1\ ,\ b=-1\ ,\ c=1$

فنستنتج أن: $\qquad k=b-2a=-1-2(1)=-3$

تصبح معادلة الدالة: $\qquad f(x)=\dfrac{\cancel{(x-2)}^{\,1}(x^2-x+1)}{\cancel{(x-2)}_{\,1}(x+1)}$

$$\lim_{x\to 2} f(x)=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x+1}{x+1}=\frac{3}{3}=1$$

عندها يمكن إعادة تعريف الدالة وتسميتها بـ g

$$\therefore\ g(x)=\begin{cases}\dfrac{x^3-3x^2+3x-2}{x^2-x-2} & ,\ x\neq 2\ ,\ x\neq -1\\ 1 & ,\ x=2\end{cases}$$

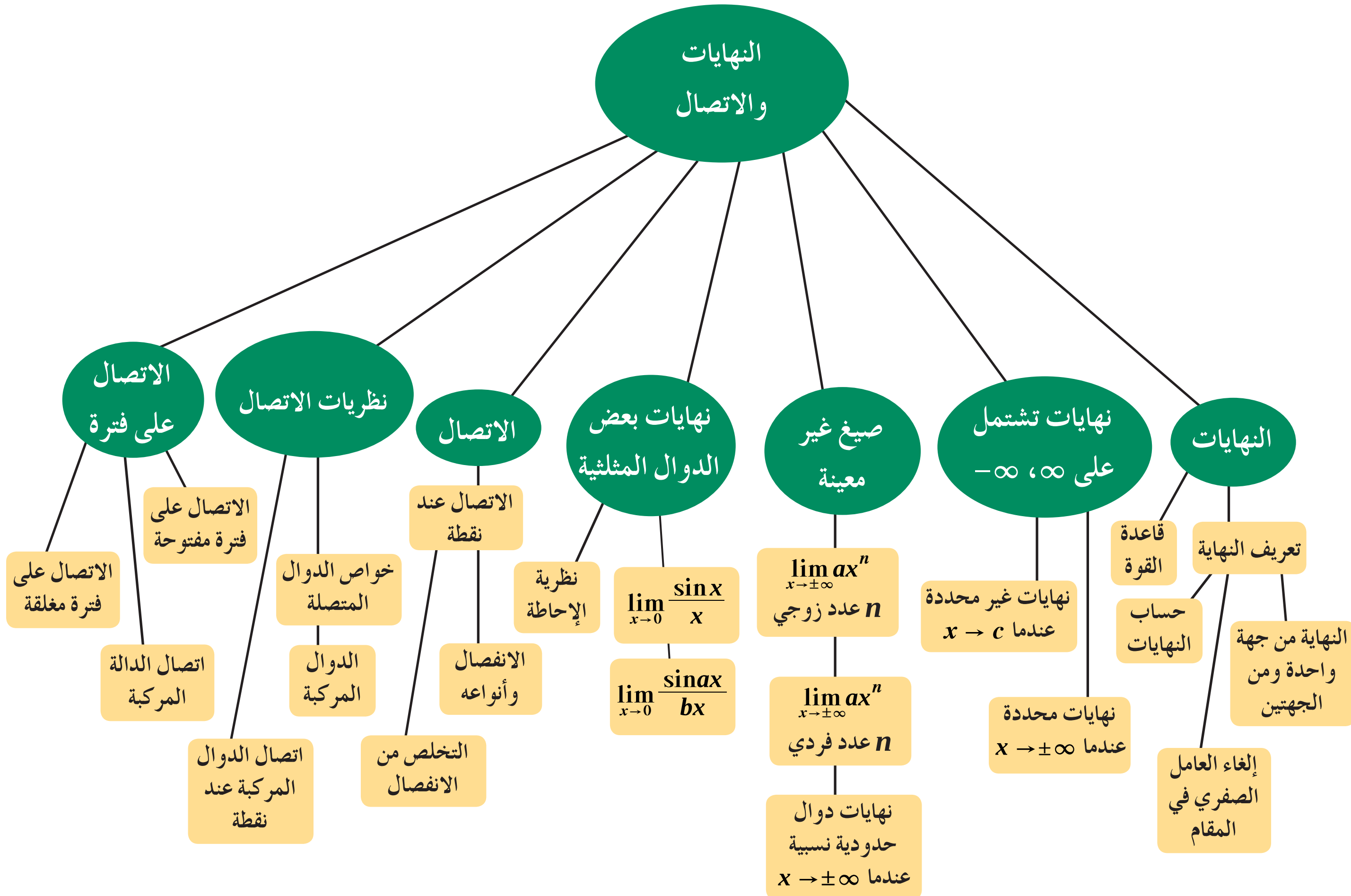
مسألة إضافية

لتكن الدالّة $f(x)=\dfrac{x^4+kx^3-15x^2+2x-8}{x^2-3x-10}$ حيث k عدد صحيح.

a أوجد مجال الدالّة f

b أعد تعريف الدالة f بحيث تكون منفصلة عند $x=-2$ فقط.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

- لتكن x كمية متغيرة، c عددًا حقيقيًّا، نقول إن x تقترب من c باطراد إذا كان بالإمكان جعل الكمية $|x-c|$ أصغر من أي عدد حقيقي موجب.
- ليكن c , L عددين حقيقيين، f دالة حقيقية معرّفة في جوار أو جوار ناقص للعدد c نكتب: $\lim_{x\to c} f(x)=L$ وتعني أنه عندما تقترب x من c باطراد، $x\neq c$ فإن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L.
- بفرض أن c , L عددين حقيقيين يكون للدالة f نهاية عندما تقترب x من c إذا وفقط إذا كانت النهاية من جهة اليمين تساوي النهاية من جهة اليسار ويعبر عن ذلك: $\lim_{x\to c} f(x)=L \iff \lim_{x\to c^+} f(x)=L=\lim_{x\to c^-} f(x)$
- إذا كانت f: $f(x)=k$ وكان c , k أعدادًا حقيقيّة، k ثابت فإن: $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} k=k$
- إذا كانت $f(x)=x$ حيث c عددًا حقيقيًّا، فإن: $\lim_{x\to c} f(x)=\lim_{x\to c} x=c$
- إذا كانت k, c, M, L أعدادًا حقيقية، $\lim_{x\to c} f(x)=L$ و $\lim_{x\to c} g(x)=M$ فإن:

  a قاعدة الجمع: $\lim_{x\to c}(f(x)+g(x))=L+M$

  b قاعدة الطرح: $\lim_{x\to c}(f(x)-g(x))=L-M$

c قاعدة الضرب: $\lim_{x\to c}(f(x)\cdot g(x)) = L\cdot M$

d قاعدة الضرب في ثابت: $\lim_{x\to c}(k\cdot f(x)) = k\cdot L$

e قاعدة القسمة: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}\ ,\ M\neq 0$

- إذا كانت $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ دالّة كثيرة الحدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ:

$$\lim_{x\to c} f(x) = f(c) = a_n c^n + a_{n-1}c^{n-1} + \ldots + a_0$$

- إذا كانت $g(x)\ ,\ f(x)$ كثيرتي حدود، c عدد حقيقيّ، فإنّ: $\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}\ ,\ g(c)\neq 0$
- إذا كانت n عددًا صحيحًا موجبًا وكانت $\lim_{x\to c} f(x)$ موجودة فإن:

b $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{c}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن يكون $c>0$)

a $\lim_{x\to c}(f(x))^n = \left(\lim_{x\to c} f(x)\right)^n$

c $\lim_{x\to c}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to c} f(x)}$ (في حالة n عددًا زوجيًّا يشترط أن تكون $\lim_{x\to c} f(x) > 0$)

- لتكن f دالة معرّفة في الفترة (a,∞) فإن: $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$ يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى ∞.
- لتكن f دالة معرّفة في الفترة $(-\infty,a)$ فإن: $\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$. يعني أن قيم $f(x)$ تقترب باطراد من L عندما x تؤول إلى $-\infty$.
- لتكن: $f(x) = \frac{1}{x}$ فإن: $\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x} = 0\ ,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0$
- لتكن: $f(x) = \frac{k}{x^n}\ ,\ n\in\mathbb{Z}^+\ ,\ k\in\mathbb{R}$ $\qquad \lim_{x\to\pm\infty}\frac{k}{x^n} = 0$
- إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي فإن: $\lim_{x\to a}[f(x)\pm b] = \pm\infty$
- إذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ وكان b عدد حقيقي موجب فإن: $\lim_{x\to a}[b\cdot f(x)] = \pm\infty$

وإذا كان b عدد حقيقي سالب $\lim_{x\to a}[b\cdot f(x)] = \mp\infty$

- إذا كان n عدد صحيح موجب وزوجي فإن: $\lim_{x\to c}\frac{1}{(x-c)^n} = \infty$
- إذا كان n عدد صحيح موجب وفردي فإن:

2 $\lim_{x\to c^-}\frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$

1 $\lim_{x\to c^+}\frac{1}{(x-c)^n} = \infty$

- إذا كانت قيم $f(x)$ تتزايد بلا حدود عندما تؤول x إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim_{x\to c} f(x) = \infty$
- إذا كانت $f(x)$ تتناقص بلا حدود عندما x تؤول إلى c فإننا نعبّر عن ذلك رياضيًّا بالتالي: $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$
- $\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ إذا وفقط إذا ($\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty$ ، $\lim_{x\to a^+} f(x) = \infty$)
- $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ إذا وفقط إذا ($\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty$ ، $\lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty$)
- الخط $y=b$ يسمى خط مقارب أفقي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توفر أحد الشرطين التاليين أو كلاهما:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = b \quad \text{أو} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = b$$

- الخط $x=a$ يسمى خط مقارب رأسي لمنحنى الدالة $y=f(x)$ إذا توافر على الأقل أحد الشروط التالية:

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \infty\ ,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = \infty\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = \infty$$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a^+} f(x) = -\infty\ ,\ \lim_{x\to a} f(x) = -\infty$$

• لتكن: $f(x)=ax^n \ , \ n\in\mathbb{Z}^+ \ , \ a\in\mathbb{R}^*$:

1 إذا كان n عدد زوجي فإن: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & : \ a>0\\ -\infty & : \ a<0\end{cases}$

2 إذا كان n عدد فردي فإن: $\lim\limits_{x\to-\infty} ax^n=\begin{cases}-\infty & : \ a>0\\ \infty & : \ a<0\end{cases}$ ، $\lim\limits_{x\to\infty} ax^n=\begin{cases}\infty & : \ a>0\\ -\infty & : \ a<0\end{cases}$

• إذا كانت كل من $f \ , \ g$ دالة حدودية حيث: $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+...+a_0 \ , \ g(x)=b_mx^m+b_{m-1}x^{m-1}+...+b_0$

فإن: b $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0 \ : \ n<m$ a $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{a_n}{b_m} \ : \ n=m$

• $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ حيث x بالراديان. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

• إذا كان $a \ , \ b$ عددين حقيقيين، $a\neq 0 \ , \ b\neq 0$ فإن: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{bx}{\sin ax}=\dfrac{b}{a}$ ، $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\dfrac{a}{b}$

• ليكن $c \ , \ L$ عددين حقيقيين، إذا كان $g(x)\leq f(x)\leq h(x)$ لكل $x\neq c$ في جوار c، وكان $\lim\limits_{x\to c} g(x)=\lim\limits_{x\to c} h(x)=L$

فإنّ: $\lim\limits_{x\to c} f(x)=L$

• تكون الدالة $y=f(x)$ متصلة عند نقطة c في مجالها إذا كانت $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

• لتكون f متصلة عند c يجب أن تتوافر الشروط الثلاثة التالية:

1 الدالة معرّفة عند $x=c$ أي $f(c)$ موجودة.

2 $\lim\limits_{x\to c} f(x)$ موجودة

3 $\lim\limits_{x\to c} f(x)=f(c)$

وإذا لم يتحقق أيّ شرط من الشروط السابقة فنقول إن f ليست متصلة (منفصلة) عند c.

• إذا كانت $f \ , \ g$ دالتين متصلتين عند $x=c$، فإنّ الدوال التالية هي دوالّ متّصلة عند $x=c$

1 $f+g$ 2 $f-g$

3 $k\cdot f$ حيث k أيّ عدد حقيقي ثابت. 4 $f\cdot g$

5 $\dfrac{f}{g} \ , \ g(c)\neq 0$

• الدالة الجذرية $y=\sqrt[n]{x}$ متصلة عند كل $x=c \ ; \ c\in\mathbb{R}^+$ حيث n عدد صحيح زوجي موجب، ومتصلة عند كل $x=c \ ; \ c\in\mathbb{R}$ حيث n عدد صحيح فردي أكبر من 1.

• إذا كانت g دالة متصلة عند $x=c$ وكان $g(c)>0$ فإن الدالة: $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة عند $x=c$

$$\begin{tikzcd} x \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "(g\circ f)(x)"'] & f(x) \arrow[d, "g"] \\ & g(f(x)) \end{tikzcd}$$

• إذا كانت كل من $f, \ g$ دالتين حقيقيتين وكان مدى الدالة f مجموعة جزئية من مجال الدالة g فإنه يتعيّن دالة مركبة h: $h(x)=(g\circ f)(x)=g(f(x))$

• إذا كانت f متّصلة عند c و g متّصلة عند $f(c)$ فإن الدالّة المركّبة $g\circ f$ متّصلة عند c.

• إذا كانت الدالّة f معرّفة على الفترة $[a, b]$ فإنّ:

1 الدّالّة f متّصلة على الفترة المفتوحة (a, b)، إذا كانت f متّصلة عند كل x في الفترة (a, b)

2 الدّالّة f متّصلة عند a من جهة اليمين إذا كان: $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)=f(a)$

3 الدّالّة f متّصلة عند b من جهة اليسار إذا كان: $\lim\limits_{x\to b^-} f(x)=f(b)$

وإذا تحقّقت الشروط الثلاثة، فإنّ الدالّة تكون متّصلة على الفترة المغلقة $[a, b]$

• إذا كانت الدالة g متصلة على فترة ما، $g(x)\geqslant 0$ في هذه الفترة فإن الدالة $f(x)=\sqrt{g(x)}$ متصلة على هذه الفترة.

الوحدة الثانية

الاشتقاق

The Derivatives

مشروع الوحدة: تأثير الضغط على الغطّاس

1 **مقدمة المشروع:** يساعد جهاز التنفّس الذي يستخدم في الغطس، علماء البحار على استكشاف أعماق المياه إلى أبعد حدود ممكنة، بالإضافة إلى كون الغطس أيضًا رياضة شعبيّة. ولكن، للغطس بأمان، يتوجّب على الغطّاسين فهم ضغط الماء في الأعماق لأنّه يصبح خطيرًا إذا تخطّى $12\ \text{m}$.

تسمح أجهزة التنفس الحديثة للغطّاسين بالبقاء لأوقات طويلة تحت الماء. ولكن عمق الغطس ومدّته يبقيان محدودين ويتأثّران في الضغط الذي يسمح جسم الإنسان بتحمّله. سوف تستخدم الرياضيّات لاكتشاف الأمان في كيفيّة استخدام أجهزة التنفّس للغطس ثمّ سوف تصمّم ملصقًا عن هذا الجهاز.

2 **الهدف:** إيجاد العلاقة بين معدّل الهواء الذي يستخدمه الغطّاس وعدّة عوامل مثل: العمق، سعة رئتيه، عمر الغطّاس...

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني — آلة حاسبة — حاسوب.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

تعطيك أجهزة التنفّس للغطس كمّيّة الضغط تحت الماء. عند سطح الماء يكون ضغط الهواء واحدًا (ضغط جوّي) $(P = 1\ \text{atm})$. يتزايد الضغط كلّما غطسنا أكثر تحت الماء.

وحدة قياس الضغط $P(\text{atm})$ تتغيّر مع العمق d (بالمتر) بحسب المعادلة: $P = \dfrac{d}{13} + 1$. ومن المعروف، بحسب قانون بويل، أنّ حجم الهواء V يتغيّر عكسيًّا مع الضغط P أي أنّ $V = \dfrac{12}{P}$ حيث V تقاس بالكوارت (qt).

a أوجد الضغط على سطح الماء.

b أوجد الضغط على عمق $5\ \text{m}$، من ثمّ أوجد حجم الهواء في رئتيه.

c ارسم جدولًا تبيّن فيه تغيّر الضغط وحجم الهواء نسبة للضغط $(d < 20\ \text{m})$.

d اصنع رسمًا بيانيًّا تبيّن فيه تغيّر حجم الرئة نسبة إلى العمق.

5 **التقرير:** أجر بحثًا عن متوسط حجم الرئة لعدة أعمار، من ثمّ اكتب تقريرًا مفصّلًا تبيّن فيه متوسط العمق الذي يستطيع النزول إليه كل غطاس بحسب عمره.

دروس الوحدة

معدلات التغير وخطوط المماس	المشتقة	قواعد الاشتقاق	مشتقات الدوال المثلثية	قاعدة السلسلة	المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني
2–1	2–2	2–3	2–4	2–5	2–6

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نهاية دالة عند نقطة معينة.
- تعلمت اللانهاية لدالة.
- تعلمت الاتصال لدالة عند نقطة وعلى فترة.
- تعرفت نقاط عدم الاتصال (الانفصال) لدالة.
- تعلمت كيفية التخلص من نقاط الانفصال إذا أمكن ذلك.

ماذا سوف تتعلم؟

- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة، ومتوسّط معدّل التغيّر، و معدّل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد معادلات خط المماس والخط العمودي على المماس عند نقطة معطاة على منحنى الدالة.
- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقّة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- التعرف على العلاقة بين الاتصال عند نقطة وقابلية الاشتقاق.
- التمييز بين الركن والناب والمماس الرأسي وعدم الاتصال.
- التعرف على العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.
- إيجاد مشتقات الدوال ومن ضمنها مشتقات الرتب العليا.
- استخدام قواعد الاشتقاق للدوال المثلثيّة.
- إيجاد مشتقة دالة الدالة باستخدام قاعدة السلسلة.
- إيجاد الاشتقاق الضمني وتطبيقه.

المصطلحات الأساسية

مشتقة دالة – رمز المشتقة f' ، $\frac{dy}{dx}$ – $\frac{d}{dx}(f(x))$ – معدل التغيّر – متوسط معدل التغير – السرعة المتوسطة – السرعة اللحظية – ميل المماس – معادلة المماس – معادلة الخط العمودي (الناظم) – رسم بياني – قابلية الاشتقاق– الاشتقاق – ركن – ناب – مماس رأسي – قواعد الاشتقاق – قاعدة السلسلة – اشتقاق الدوال المثلثية – اشتقاق من رتب عليا – اشتقاق ضمني.

أضف إلى معلوماتك

يعتبر التفاضل Differentiation أحد الفروع المهمة في الرياضيات حيث هو مفاضلة دالة عند نقطة معينة أي مقياس لمقدار تغير متغير بالنسبة إلى متغير آخر. من المتعارف عليه أن اكتشاف علم التفاضل يعود إلى نيوتن Newton (1642–1727) ولايبنتز Leibniz (1646–1716) حيث أصدرا بشكل منفصل حوالى سنة 1685 منشورات مفصلة عن هذا العلم.

اسحق نيوتن Isaac Newton
(1642–1727)
ساهم نيوتن في دراسة متسلسلات القوى ونظرية ذات الحدين ووضع طريقة نيوتن لتقريب جذور الدوال إضافة إلى تأسيسه لحساب التفاضل والتكامل.

لايبنتز Gottfried Wilhelm Leibniz
(1646–1716)
ينسب إليه رمز التفاضل ∂x ورمز التكامل
$\int_{t=x_0}^{x} f(t).\partial t$

2-1

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

سوف تتعلم

- إدراك مفهوم التغيّر في الدالة ومعدل التغير ومتوسط معدل التغيّر.
- حساب السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية.
- إيجاد ميل مماس منحنى الدالة عند نقطة.
- إيجاد معدل التغير للدالة.

المفردات والمصطلحات:

- معدل التغيير Rate of Change
- السرعة المتوسطة Average Velocity
- السرعة اللحظية Instantaneous Velocity
- الميل Slope
- المماس Tangent
- العمودي Normal

معلومة:

$\Delta t = t_2 - t_1$

أي أن $t_2 = t_1 + \Delta t$

بوضع $\Delta t = h$

$\therefore\ t_2 = t_1 + h$

وعليه:

$f(t_2) - f(t_1)$

$= f(t_1 + h) - f(t_1)$

دعنا نفكر ونتناقش

أظهرت التجارب أن المسافة التي يقطعها جسيم سقط سقوطًا حرًّا من السكون نحو سطح الأرض تعطى بالعلاقة: $d(t) = 4.9t^2$ حيث d المسافة بالمتر (m)، t الزمن بالثواني (s) (قانون جاليليو).

فإذا سقط جسيمًا سقوطًا حرًّا من مرتفع، أوجد بعد مرور ثانيتين من السقوط:

a التغير في الزمن.

b التغير في المسافة.

c السرعة المتوسطة $\bar{v}$:
$$\bar{v} = \frac{\text{التغير في المسافة}}{\text{التغير في الزمن}}$$

السرعة المتوسّطة والسرعة اللحظية Average and Instantaneous Velocity

نوجد **السرعة المتوسطة** $\bar{v}$ لجسم متحرّك، في فترة زمنيّة ما، بقسمة التغير في المسافة (Δd) على التغير في الزمن (Δt).

وعليه تكون وحدة السرعة المتوسّطة عبارة عن وحدة المسافة مقسومة على وحدة الزمن؛ أي كيلومتر/ساعة (km/h) أو متر/ثانية (m/s) أو أيّ وحدات أخرى موجودة في المسألة قيد الدراسة.

وفي حالات كثيرة سواء أكان في مجال العلوم أم في الحياة اليوميّة لا تمدّنا السرعة المتوسطة لجسم متحرّك بالمعلومات ذات الأهمية القصوى فمثلًا: إذا ارتطمت سيّارة بحائط خرسانيّ فإنّ ما سيحدّد الآثار المترتبة على الحادث ليس مقدار السرعة المتوسطة التي تقاد بها السيّارة من نقطة بدء الحركة حتّى نقطة الارتطام بل مقدار السرعة عند لحظة الارتطام: **السرعة اللحظيّة**. وكذلك بالنسبة إلى «الرادار» فإن السرعة التي تُضبط بها السيّارة هي السرعة اللحظيّة للسيّارة.

مثال توضيحي

تسقط كرة من علو 50 m، وفق المعادلة $d(t) = 4.9t^2$، حيث d المسافة التي تقطعها الكرة بالأمتار (m)، t الزمن بالثواني (s).

a **ما السرعة المتوسطة في الفترة الزمنية من الثانية الأولى إلى الثانية الثالثة؟**

b **أوجد سرعة الكرة عند اللحظة $t = 3$**

الحل:

a

$\because \; d(t) = 4.9t^2$

في الثانية الأولى، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_1 = d(1) = 4.9(1)^2 = 4.9$

في الثانية الثالثة، المسافة التي قطعتها الكرة هي: $d_2 = d(3) = 4.9(3)^2 = 44.1$

السرعة المتوسطة بين الثانية الأولى والثالثة هي: $\bar{v} = \dfrac{\Delta d}{\Delta t} = \dfrac{d_2 - d_1}{t_2 - t_1}$

$$\bar{v} = \frac{44.1 - 4.9}{3 - 1} = \frac{39.2}{2} = 19.6$$

السرعة المتوسطة لسقوط الكرة هي: 19.6 m/s

b يمكننا حساب السرعة المتوسّطة للجسم على الفترة الزمنية من اللحظة $t_1 = 3$ إلى اللحظة $t_2 = 3 + h$، حيث $\Delta t = h$ هو الفارق الزمني بين اللحظتين

تمثل السرعة المتوسطة على الفترة الزمنية $[3 , 3 + h]$ التي مدتها $\Delta t = h$

ولا نستطيع استخدام تلك القاعدة لحساب السرعة بالضبط عند اللحظة $t = 3$ أي $h = 0$ لأنه لا يمكن القسمة على صفر.

وعلى ذلك فإنّه يمكننا أخذ فكرة جيّدة لما يحدث عند $t = 3$ وذلك بحساب قيمة الصيغة التي حصلنا عليها بجعل h تقترب من الصفر، وإذا فعلنا ذلك فإنّنا نجد نمطًا واضحًا كما في الجدول، يظهر هذا النمط أنّ السرعة المتوسّطة تقترب من القيمة 29.4 m/s عندما تقترب h من الصفر، مما يسمح بالقول إن السرعة اللحظية للكرة عند $t = 3$ تساوي 29.4 m/s

السرعة المتوسطة على الفترة $\dfrac{\Delta d}{\Delta t}$ (m/s)	مدّة الفترة الزمنيّة h بالثانية
34.3	1
29.89	0.1
29.449	0.01
29.4049	0.001
29.40049	0.0001

أكّد جبريًا:

$$\frac{\Delta d}{\Delta t} = \frac{4.9(3 + h)^2 - 4.9(3)^2}{h}$$

نفك البسط في المعادلة ونبسّط:

$$= \frac{4.9(9 + 6h + h^2) - 44.1}{h}$$

$$= \frac{29.4h + 4.9h^2}{h} = \frac{h(29.4 + 4.9h)}{h}$$

$$= 29.4 + 4.9h \quad , \quad h \neq 0$$

لقيم h الموجبة الصغيرة جدًّا السرعة المتوسّطة تساوي $29.4 + 4.9h \text{ (m/s)}$

وتكون $4.9h$ صغيرة جدًّا أي قريبة من الصفر.

ونعبّر عن ذلك كالتالي:

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t} = \lim_{h \to 0} (29.4 + 4.9h)$$

$$= 29.4$$

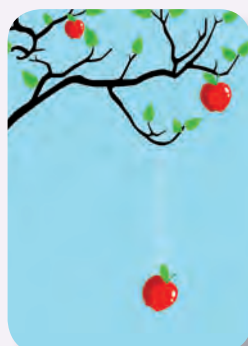
ملاحظة:

$$\frac{d(t_2) - d(t_1)}{t_2 - t_1} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

الربط بالحياة:

السقوط الحر

عندما تسقط الأجسام سقوطًا حرًّا في مكان ما، على افتراض أنه فارغ من الهواء، فإنها تصل جميعها إلى سطح الأرض في فترة زمنية مشتركة وإن اختلفت كتلها. من ناحية ثانية إذا سقطت هذه الأجسام في مكان ما يملؤه الهواء فالوضع يختلف تمامًا إذ نجد أن حجرًا صغيرًا يصل إلى سطح الأرض في زمن أقل من ورقة علمًا أنهما سقطا في اللحظة نفسها.



وفي هذه الحالة نقول إنّ نهاية السرعة المتوسّطة هي 29.4 عندما تقترب h من الصفر ولا تساويه ونقول إنّها السرعة اللحظية عند اللحظة $t = 3$.
ومنه تكون السرعة اللحظية $29.4\ m/s$

وعمومًا لو فرضنا أن جسيم يتحرك في خط مستقيم خلال فترة زمنية صغيرة جدًّا مقدارها h
فإنه عندما $t = t_1$ يكون الجسيم عند الموقع $d(t_1)$
وعندما $t = t_1 + h$ يكون الموقع هو $d(t_1 + h)$
وعليه فإن السرعة المتوسطة للجسيم خلال تلك الفترة تكون:

$$\bar{v} = \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

وعندما تؤول h إلى الصفر نحصل على السرعة اللحظية.

ويمكن أن نعرف السرعة اللحظية v عند الزمن t_1 كالتالي:

$$v = \lim_{h \to 0} \bar{v} = \lim_{h \to 0} \frac{d(t_1 + h) - d(t_1)}{h}$$

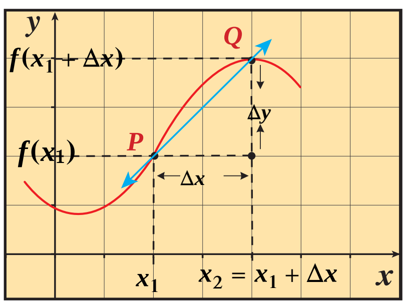
بشرط أن تكون النهاية موجودة.

متوسّط معدّل التغيّر وميل المماس

Average Rate of Change and Tangent Slope

إذا كان لدينا دالة: $y = f(x)$
فإذا طرأ تغير قدره Δx على قيمة المتغير المستقل x
فإنه يتبع ذلك تغير قدره Δy على قيمة المتغير التابع y ويكون:

$$\Delta y = y_2 - y_1$$
$$= f(x_2) - f(x_1)$$



شكل (1)

ويكون متوسط معدل التغير للدالة y:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$$

وفي الشكل (1) $\overleftrightarrow{PQ}$ قاطع للمنحنى،
ميل القاطع: $m(\overleftrightarrow{PQ}) = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

والآن، ماذا يحدث لميل القاطع عندما تقترب Q من P بإطراد؟

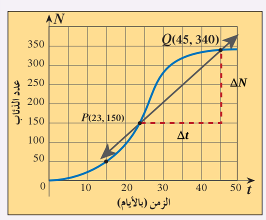
معلومة:
عادة ما يرغب علماء الأحياء في معرفة المعدّلات التي تنمو فيها الكائنات الموضوعة تحت الملاحظة في شروط مخبريّة.
يبيّن الشكل أدناه كيفية تكاثر مجموعة من ذباب الفاكهة خلال التجارب المخبريّة في فترة مدّتها 50 يومًا وذلك على فترات زمنية منتظمة، وبتحديد النقاط يمكن رسم المنحنى المبيّن الذي يمرّ بهذه النقاط. استخدم النقطتين $P(23, 150)$, $Q(45, 340)$ في الشكل لحساب متوسّط معدل التغيّر وميل القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$. ماذا تلاحظ؟
الحل:
بفرض عدد الذباب $= N$،
وعدد الأيام $= t$.
يوجد 150 ذبابة في اليوم 23، 340 ذبابة في اليوم 45
متوسّط معدل التغيّر في عدد الذباب هو:

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{340 - 150}{45 - 23}$$
$$= \frac{190}{22}$$

(ذبابة/يوم)

$$\therefore \frac{\Delta N}{\Delta t} \approx 8.6$$

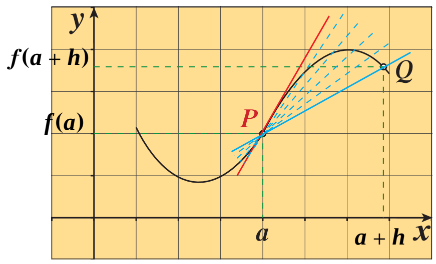
أي حوالي 9 ذبابات كل يوم.



نمو ذباب الفاكهة تحت الشروط المخبرية لمجتمع الذباب

الحل الذي وجده العالم الرياضي بيير فيرمات Pierre de Fermat سنة 1629 والذي ما زلنا نستخدمه حتّى الآن يزودنا بطريقة لتحديد المماسّات واستنتاج صيغ لميل المماس عند نقطة على منحنى الدالة ومعدّلات التغيّر:

1 يمكننا حساب ميل القاطع للمنحنى $y = f(x)$ المار بالنقطتين



$P(a, f(a))$, $Q(a+h\ ,\ f(a+h))$

الموجودتين على المنحنى حيث $h = \Delta x$

والميل يساوي $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

2 نجد قيمة نهاية ميل القاطع إن وجدت عندما تقترب Q من P على المنحنى أي أن h تقترب من الصفر.

3 **نحدّد ميل المماس للمنحنى عند النقطة $P(a\ ,\ f(a))$ بالقيمة m إن وجد:**

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a\ ,\ f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

المستقيم العمودي على منحنى عند نقطة تنتمي إلى المنحنى هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة **ويسمى الناظم.**

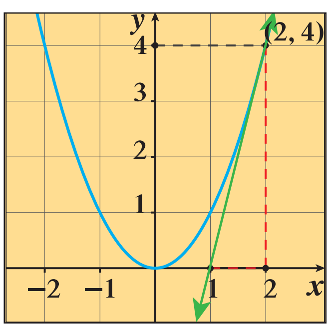
مثال (1)

أوجد ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند النقطة $P(2\ ,4)$.

الحل:

نبدأ بميل القاطع للمنحنى بين النقطة $P(2\ ,4)$ ونقطة قريبة منها $Q(2+h\ ,\ (2+h)^2)$ على المنحنى.

نكتب ميل القاطع ونوجد النهاية للميل عندما تقترب Q من P على المنحنى.



رسم توضيحي

ميل المماسّ للقطع المكافئ $y = x^2$ عند $P(2\ ,4)$: هو 4

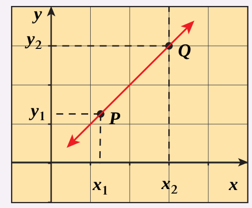
تذكر:

ميل المستقيم المار بالنقطتين: $P(x_1\ ,y_1)\ ,\ Q(x_2\ ,y_2)$

يساوي: $\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

حيث $x_1 \neq x_2$

ويُمكن أن نعبر عنه بالصيغة $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.



معلومة:

بيير فيرمات

Pierre de Fermat

(1601−1665)

عالم رياضيات فرنسي عرف بنظريته الشهيرة (نظرية فيرمات): لا توجد أعداد صحيحة موجبة $x\ ,y\ ,z$ تحقق المعادلة $x^n + y^n = z^n$ حيث n عدد صحيح موجب أكبر من 2.

يفرض أن:

$$y = f(x)$$

ميل القاطع عند $(2, 4)$:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(2+h)-f(2)}{h}$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(2+h)^2-4}{h}$$
$$= \frac{h^2+4h+4-4}{h}$$
$$= \frac{h^2+4h}{h}$$
$$= h+4 \quad , \quad h \neq 0$$

نهاية ميل القاطع عندما تقترب Q من P على المنحنى هي:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{h \to 0}(h+4) = 4$$

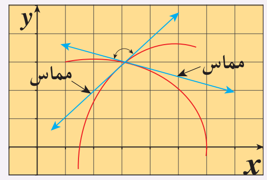
على ذلك يكون ميل المماسّ للقطع المكافئ عند P يساوي 4

حاول أن تحل

1 أوجد ميل المماس للقطع المكافئ $y = (x-2)^2 + 2$ عند النقطة $A(1,3)$

معلومة:
ميل منحنى عند نقطة يعني ميل المماس للمنحنى عند هذه النقطة إن وجد.

معلومة:
في الهندسة، الزاوية التي يصنعها مماسان على منحنين عند نقطة تقاطعهما هي زاوية المنحنين.



2-2

المشتقة

The Derivative

سوف تتعلم

- إيجاد الميل والمشتقات باستخدام تعريف المشتقة.
- إيجاد مشتقة الدالة عند نقطة.
- إيجاد المشتقة من جهة واحدة.
- العلاقة بين الاتصال عند نقطة أو على فترة وقابلية الاشتقاق.
- تحديد حالات عدم وجود المشتقة عند نقطة.

المفردات والمصطلحات:

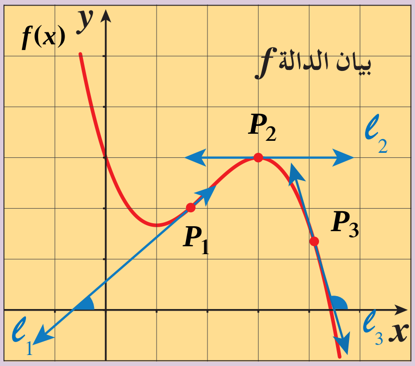
- المشتقة عند نقطة Derivative at a Point
- مشتقة دالة Derivative of a Function
- مشتقة من جهة واحدة One–Sided Derivative
- التفاضل Differentiability
- نقطة ركن Corner Point
- نقطة ناب Cusp Point
- مماس رأسي Vertical Tangent
- عدم اتصال Discontinuity

دعنا نفكّر ونتناقش

تعلمت فيما سبق أنه إذا كان ℓ مستقيمًا يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن ميل المستقيم: $m = \tan\theta$

الشكل (1) يمثّل بيان الدالة f.

ℓ_1 , ℓ_2 , ℓ_3 مماسات لمنحنى f عند النقاط P_1 , P_2 , P_3 على الترتيب.



شكل (1)

1. ميل المستقيم ℓ_1 (المماس لمنحنى الدالة f عند P_1) أكبر من الصفر. لماذا؟
2. ميل المماس ℓ_2 لمنحنى f عند P_2 يساوي صفرًا. لماذا؟
3. ميل المماس ℓ_3 لمنحنى f عند P_3 أصغر من الصفر. لماذا؟
4. إذا أمكن رسم مماسات عند نقاط مختلفة على المنحنى، فهل ميل المنحنى عند كل نقطة من هذه النقاط يكون قيمة ثابتة أم متغيرة؟

تعريف المشتقّة Definition of Derivative

تعلّمت أنّ ميل منحنى الدالة f عند نقطة إحداثيها السينيّ $x = a$ هو:

$$m = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

في حال وجود هذه النهاية فإنّها تسمّى مشتقّة الدّالة f عند a

تعريف: المشتقّة عند نقطة Derivative at a Point

مشتقة الدالة f عند $x = a$ هي $f'(a)$:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

شرط وجود النهاية.

من التعريف السابق يمكننا القول أن الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x = a$ إذا كانت النهاية موجودة ويرمز لذلك بالرمز:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=a} \quad \text{أو} \quad f'(a)$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة عند $x = a$ نقول إن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$ (غير موجودة $f'(a)$)

مثال (1)

باستخدام التعريف، أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = 2x^2 + 1$ عند $x = 1$

الحل:

(إن وجدت)
$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$x = 1 \Longrightarrow a = 1 \quad , \quad f(1) = 2(1)^2 + 1 = 3$$

$$\therefore \; f'(1) = \lim_{h \to 0} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{2(1+h)^2 + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2 + 4h + 2h^2 + 1 - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{4h + 2h^2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{h}(4 + 2h)}{\cancel{h}} = \lim_{h \to 0} (4 + 2h)$$

$$= 4 + 0 = 4$$

$\therefore$ مشتقة الدالة f عند $x = 1$ هي: $f'(1) = 4$

حاول أن تحل

1 باستخدام التعريف أوجد مشتقة الدالة f: $f(x) = 3x^2$ عند $x = -2$

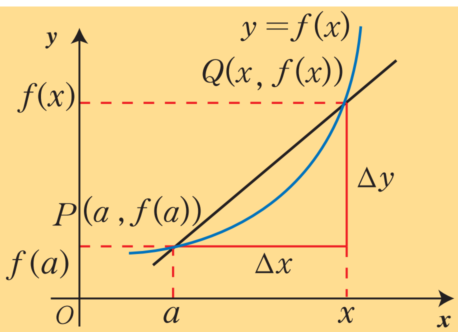
نحصل على مشتقة $f(x)$ عند $x = a$ بأخذ النهاية عندما تقترب h من الصفر $(h \to 0)$ لميل الخطوط القاطعة، كما في الشكل (2)

تعريف (بديل): المشتقّة عند نقطة

مشتقّة دالّة f عند $x = a$ هي :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

شرط وجود النهاية.



شكل (2)

ميل الخط القاطع $\overleftrightarrow{PQ}$ هو:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ملاحظة: التعريف البديل للمشتقة هو صورة أخرى لتعريف المشتقة.

مثال (2)

باستخدام التعريف البديل. أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = \sqrt{x}$ عند $x = a$ حيث $a > 0$

الحل:

عند النقطة $x = a$ ، (إن وجدت)
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

اضرب البسط والمقام بالمرافق $(\sqrt{x}+\sqrt{a})$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a} \cdot \frac{\sqrt{x}+\sqrt{a}}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \lim_{x\to a} \frac{\overset{1}{\cancel{(x-a)}}}{\underset{1}{\cancel{(x-a)}}(\sqrt{x}+\sqrt{a})}$$

يمكننا الآن إيجاد النهاية

$$= \lim_{x\to a} \frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x)=\frac{1}{x}$ عند $b\neq 0$, $x=b$

المشتقّة من جهة واحدة One–Sided Derivative

مشتقة الدالة f من اليمين يرمز لها بالرمز $f'_{+}(a)$ وهي:

$$\lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

ومشتقة الدالة f من اليسار يرمز لها بالرمز $f'_{-}(a)$ وهي:

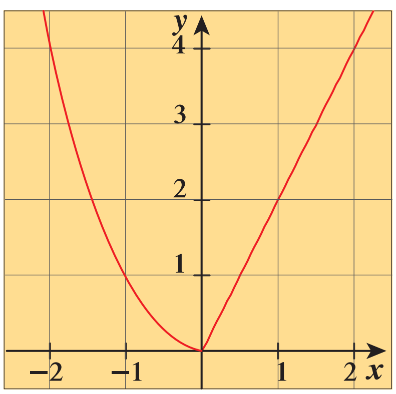
$$\lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

إن الدالة لها مشتقة عند نقطة إذا وفقط إذا كانت المشتقتان لجهة اليمين ولجهة اليسار موجودتين ومتساويتين عند تلك النقطة.

مثال (3)

بيّن أن الدالة التالية لها مشتقّة لجهة اليمين ومشتقّة لجهة اليسار عند $x=0$، لكن ليس لها مشتقّة عند $x=0$

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x\le 0 \\ 2x & : \quad x>0 \end{cases}$$



رسم توضيحي

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_{+}(0) = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{2(0+h)-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} \frac{2h}{h} = \lim_{h\to 0^{+}} 2 = 2 \qquad (1)$$

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{f(0+h)-f(0)}{h} \quad \text{(إن وجدت)}$$

$$f'_{-}(0) = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{(0+h)^2-0^2}{h} = \lim_{h\to 0^{-}} \frac{h^2}{h} = \lim_{h\to 0^{-}} h = 0 \qquad (2)$$

من (1) , (2)

$$f'_{-}(0) \neq f'_{+}(0)$$

$\therefore$ $f'(0)$ ليست موجودة أي أن الدالّة ليس لها مشتقّة عند $x = 0$

حاول أن تحل

3 لتكن f : $f(x) = |x - 2|$ ، ابحث قابلية الدالة f للاشتقاق عند $x = 2$.

مثال (4)

لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}x^2 + \frac{3}{4} & : \quad x \le 1 \\ \sqrt{x} & : \quad x > 1 \end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقة لجهة اليمين مساوية للمشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$.

الحل:

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليسار:

(إن وجدت)

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1+h)^2 + \frac{3}{4} - \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{4}(1 + 2h + h^2) + \frac{3}{4} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\frac{1}{4} + \frac{h}{2} + \frac{h^2}{4} + \frac{3}{4} - 1}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\overset{1}{\cancel{h}}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right)}{\underset{1}{\cancel{h}}}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}h\right) = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

نتحقّق من وجود المشتقّة لجهة اليمين:

(إن وجدت)

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h}$$

ضرب البسط والمقام بمرافق البسط

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\sqrt{1+h} - 1}{h} \times \frac{\sqrt{1+h} + 1}{\sqrt{1+h} + 1}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{(\sqrt{1+h} - 1) \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}{h \cdot (\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{1 + h - 1}{h(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{\overset{1}{\cancel{h}}}{\underset{1}{\cancel{h}}(\sqrt{1+h} + 1)}$$

$$\because \lim_{h\to0^+}(1+h)=1 \quad , \quad 1>0$$

$$\therefore \lim_{h\to0^+}\sqrt{1+h}=\sqrt{\lim_{h\to0^+}(1+h)}=\sqrt{1}=1$$

$$\lim_{h\to0^+}(\sqrt{1+h}+1)=1+1=2 \quad , \quad 2\neq0$$

$$\lim_{h\to0^+}\frac{1}{\sqrt{1+h}+1}=\frac{\lim\limits_{h\to0^+}1}{\lim\limits_{h\to0^+}(\sqrt{1+h}+1)}=\frac{1}{2} \qquad (2)$$

من $(1),(2)$ $\qquad f'_-(1)=f'_+(1)$

وبالتالي الدالّة f لها مشتقة لجهة اليمين عند $x=1$ مساوية للمشتقة لجهة اليسار.

حاول أن تحل

4 لتكن الدالة f :

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x} & : \quad x\leq-1\\[2mm] \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{3}{2} & : \quad x>-1\end{cases}$$

بيّن أن للدالة f مشتقّة لجهة اليمين مساوية للمشتقّة لجهّة اليسار عند $x=-1$.

ملاحظات:

- إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x : $x\in(a,b)$، فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على الفترة (a,b).
- إذا كانت الدالة $y=f(x)$ قابلة للاشتقاق عند كل x: $x\in(-\infty,\infty)$ فإننا نقول إن الدالة قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$ مثل كثيرة الحدود.
- إذا وضعنا x بدلًا من a في تعريف المشتقة عند النقطة نحصل على $f'(x)$ حيث $f'(x)=\lim\limits_{h\to0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$
ويمكن أن نرمز للمشتقة بأحد الرموز التالية: $\dfrac{dy}{dx}, \dfrac{d}{dx}(f(x)), f'(x), y'$
- لأيّ دالة f تكون f' دالة أخرى مجالها مكوّن من جميع قيم x التي يكون للدالة مشتقة عندها أي $(D_{f'}\subseteq D_f)$ أي أن f' دالة مستخلصة من f.

مثال (5)

لتكن $f(x)=x^3$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة إن وجدت.

الحل:

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \qquad \text{إن وجدت}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{3x^2h+3xh^2+h^3}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{\overset{1}{\cancel{h}}(3x^2+3xh+h^2)}{\underset{1}{\cancel{h}}}$$

$$= \lim_{h \to 0} (3x^2 + 3xh + h^2)$$
$$= 3x^2$$
$$\therefore\ f'(x) = 3x^2$$

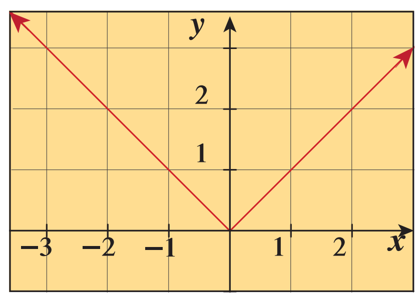
حاول أن تحل

5 لتكن $f(x) = x^2 + 2$. أوجد $f'(x)$ باستخدام تعريف المشتقة.

متى تكون $f'(a)$ غير موجودة؟

الدالة f لن يكون لها مشتقّة عند نقطة $P(a\,,\,f(a))$ إذا كانت $\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ غير موجودة.
وتوضّح الأشكال التالية أربع حالات تكون فيها هذه النهاية غير موجودة:

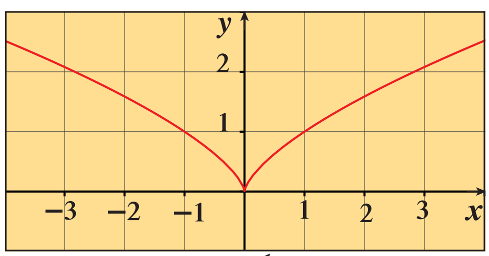
a **ركنًا (Corner):** تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
مثال: $f(x) = |x|$



شكل (3)

يوجد ركن عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

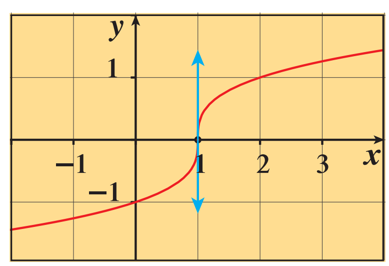
b **نابًا (Cusp):** يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها. مثال: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$



شكل (4)

يوجد ناب عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة ويوجد مماس رأسي عندها

c **مماسًا رأسيًا:** يكون المماس للمنحنى عند نقطة محددة رأسيًا.
مثال: $f(x) = \sqrt[3]{x - 1}$

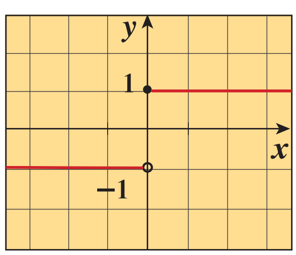


شكل (5)

يوجد مماس رأسي عند $x = 1$، $f'(1)$ غير موجودة

d **عدم اتصال:** تكون المشتقّة من جهة واحدة أو كلّ من الجهتين غير موجودة. مثال:

$$f(x) = \begin{cases} -1 & , x < 0 \\ 1 & , x \geq 0 \end{cases}$$



شكل (6)

يوجد عدم اتصال عند $x = 0$، $f'(0)$ غير موجودة

سوف نثبت بعد ذلك، نظرية تقول بأنه ينبغي أن تكون الدالة متصلة عند $x = a$ كشرط لدراسة قابلية الاشتقاق عند $x = a$.
وسوف تمدنا هذه النظرية بطريقة سريعة وسهلة للتحقق من أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = a$

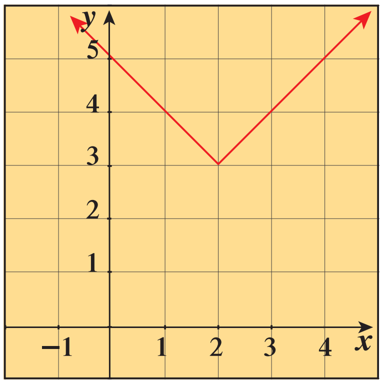
معلومة:

$$|x^2-1| = \begin{cases} x^2-1 & : x \le -1 \\ 1-x^2 & : -1 < x < 1 \\ x^2-1 & : x \geqslant 1 \end{cases}$$

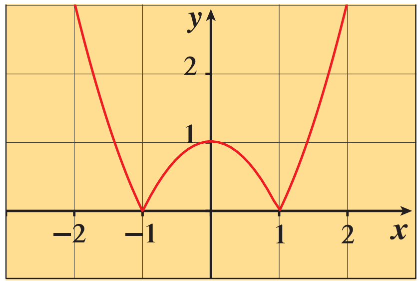
تدريب

أوجد كل النقاط في مجال الدالة حيث تكون الدالة غير قابلة للاشتقاق في كل مما يلي:

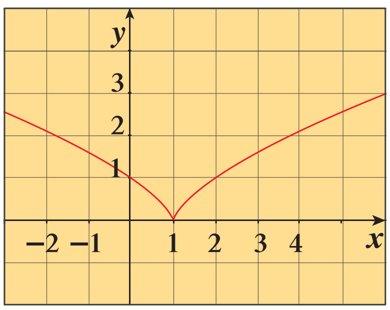
a $f(x) = |x-2|+3$



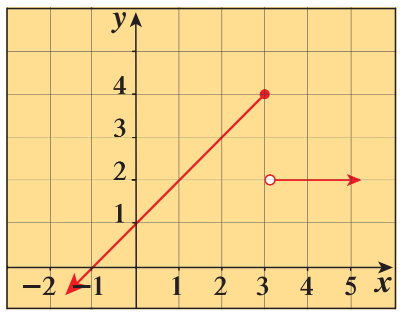
b $f(x) = |x^2-1|$



c $f(x) = (x-1)^{\frac{2}{3}}$



d $f(x) = \begin{cases} 2 : x > 3 \\ x+1 : x \le 3 \end{cases}$



الاشتقاق والاتصال Differentiability and Continuity

نبدأ هذا الجزء بإلقاء نظرة على الطرائق العاديّة التي يمكن أن تفشل في أن تكون فيها للدالّة مشتقّة عند نقطة.

كأحد الأمثلة، قد أظهرنا بيانيًّا أنّ عدم اتصال الدالة عند نقطة يسبّب عدم وجود مشتقّة للدالة عند هذه النقطة.

وعليه **إذا كانت الدالة f ليست متصلة عند نقطة $(a\ ,\ f(a))$ فإنها غير قابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.**

مثال (6)

لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \ x < 2 \\ 2x-1 & , \ x \ge 2 \end{cases}$

ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.

الحل:

نبحث اتصال الدالة f عند $x = 2$

$$f(2) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} x^2 = (2)^2 = 4$$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} (2x - 1) = 2(2) - 1 = 3$$

$$\because \lim_{x \to 2^-} f(x) \neq \lim_{x \to 2^+} f(x)$$

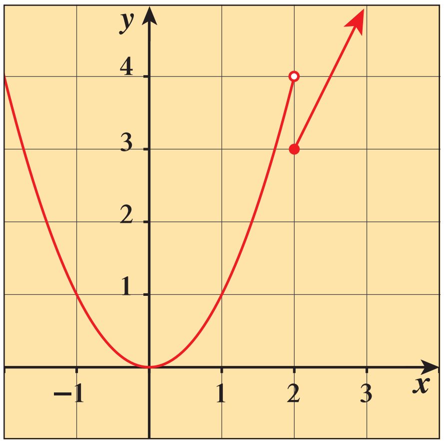
وبالتالي f ليست متصلة عند $x = 2$

$\therefore \lim_{x \to 2} f(x)$ غير موجودة

$\therefore$ f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 2$.

حاول أن تحل

6 لتكن f : $f(x) = \begin{cases} x^2 - 4 & : \quad x \leq 2 \\ 3x - 2 & : \quad x > 2 \end{cases}$ ، ابحث قابلية الاشتقاق للدالة f عند $x = 2$.



شكل (7)

الشكل (7) يمثل بيان الدالة في مثال (6).

وفي الحقيقة أنّ الاتصال شرط جوهريّ لإمكانيّة وجود المشتقّة، والنظرية التالية تبين العلاقة بين الاشتقاق والاتصال.

نظريّة الاشتقاق والاتصال

إذا كانت الدّالة f لها مشتقّة عند نقطة، فإنّها تكون متّصلة عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن النقطة $(a \ , \ f(a))$ تنتمي لبيان الدالة f

علينا أن نبيّن أنّ $\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$ أو مكافئًا لذلك أنّ: $\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = 0$

باستخدام قاعدة حاصل ضرب النهايات (وملاحظة أنّ $x - a \neq 0$)،

نستطيع أن نكتب:

$$\lim_{x \to a} [f(x) - f(a)] = \lim_{x \to a} \left[(x - a)\,\frac{f(x) - f(a)}{x - a}\right]$$

$$= \lim_{x \to a} (x - a) \cdot \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

$= 0 \cdot f'(a)$ حيث $f'(a)$ موجودة

$$= 0$$

معكوس النظريّة ليس صحيحًا دائمًا كما رأينا سابقًا:
فالدالّة المتّصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماسّ رأسيّ، ومن ثمّ لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معيّنة.

مثال (7)

لتكن f :
$$f(x)=\begin{cases}6x-1 & : \ x>\frac{1}{2}\\ 2x+1 & : \ x\leqslant\frac{1}{2}\end{cases}$$

بيّن أن الدالة f متّصلة عند $x=\frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

الحل:

لنبحث اتصال الدالة f عند $x=\frac{1}{2}$

$$f\left(\frac{1}{2}\right)=2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}(6x-1)=6\left(\frac{1}{2}\right)-1=2$$

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}(2x+1)=2\left(\frac{1}{2}\right)+1=2$$

$$\because \lim_{x\to\frac{1}{2}^+} f(x)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-} f(x)=f\left(\frac{1}{2}\right)=2$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=\frac{1}{2}$

نبحث اشتقاق الدالة f عند $x=\frac{1}{2}$

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$$ إن وجدت

$$f'_+\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{6x-1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^+}\frac{6\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}^{1}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}_{1}}=6$$

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{f(x)-f\left(\frac{1}{2}\right)}{x-\frac{1}{2}}$$ إن وجدت

$$f'_-\left(\frac{1}{2}\right)=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2x+1-2}{x-\frac{1}{2}}=\lim_{x\to\frac{1}{2}^-}\frac{2\cancel{\left(x-\frac{1}{2}\right)}^{1}}{\cancel{x-\frac{1}{2}}_{1}}=2$$

$$\therefore f'_-\left(\frac{1}{2}\right)\neq f'_+\left(\frac{1}{2}\right)$$

أي أن f متصلة عند $x=\frac{1}{2}$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عند $x=\frac{1}{2}$

حاول أن تحل

7 لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases}-x-1 : x>\frac{-1}{3}\\ 5x+1 : x\leqslant\frac{-1}{3}\end{cases}$$

بيّن أنّ الدالة f متصلة وغير قابلة للاشتقاق عند $x=-\frac{1}{3}$

مثال (8)

لتكن الدالة f :
$$f(x)=\begin{cases}x^2-x-2 & : \ x\leqslant 2\\ -x^2+7x-10 & : \ x>2\end{cases}$$

بيّن أن الدالة f متّصلة عند $x=2$ وادرس قابلية الاشتقاق عندها.

الحل:

لنبحث اتصال الدالة f عند $x=2$

$$f(2)=(2)^2-(2)-2=0$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^-}(x^2-x-2)=4-2-2=0$$
$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(-x^2+7x-10)=-4+14-10=0$$
$$\lim_{x\to 2^-} f(x)=\lim_{x\to 2^+} f(x)=f(2)$$

$\therefore$ الدالة f متصلة عند $x=2$

ندرس قابلية الاشتقاق عند $x=2$

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ (إن وجدت)

$$f'_-(2)=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2-x-2-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}\frac{(x+1)\cancel{(x-2)}}{\cancel{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to 2^-}(x+1)=2+1=3$$
$$\therefore\ f'_-(2)=3$$

$$f'_+(2)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$ (إن وجدت)

$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-x^2+7x-10-0}{x-2}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}\frac{-\cancel{(x-2)}(x-5)}{\cancel{x-2}}$$
$$=\lim_{x\to 2^+}-(x-5)=-(2-5)=3$$
$$\therefore\ f'_+(2)=3$$
$$f'_+(2)=f'_-(2)=3$$

$\therefore$ الدالة f قابلة للاشتقاق عند $x=2$ و $f'(2)=3$.

أي أن f متصلة عند $x=2$ وقابلة للاشتقاق عند هذه النقطة.

حاول أن تحل

8 ادرس اتصال الدالة f عند $x=1$ وقابلية اشتقاقها عند هذه النقطة حيث:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2}{x^2+1} & : \ x\leqslant 1\\ 2x-1 & : \ x>1\end{cases}$$

معلومة:
يستخدم علماء الفضاء الاشتقاق في دراسة سرعة دوران الأقمار الاصطناعية على مجالها.

مثال (9)

لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x+5 & : x\leqslant 3 \\ x^2-1 & : x>3 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(3)$

الحل:

$$f'_{-}(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ (إن وجدت)

$$f'_{-}(3)=\lim_{x\to 3^-}\frac{x+5-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^-}\frac{x-3}{x-3}=1$$

$$\therefore\ f'_{-}(3)=1$$

$$f'_{+}(3)=\lim_{x\to 3^+}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}$$ (إن وجدت)

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-1-8}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{x^2-9}{x-3}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}\frac{\cancel{(x-3)}^{1}(x+3)}{\cancel{x-3}_{1}}$$

$$=\lim_{x\to 3^+}(x+3)=6$$

$$\therefore\ f'_{+}(3)=6$$

$$\because\ f'_{-}(3)\neq f'_{+}(3)$$

$\therefore\ f'(3)$ غير موجودة

حاول أن تحل

9 لتكن الدالة f : $f(x)=\begin{cases} x^2+x & : x\leqslant -1 \\ x^2-x-2 & : x>-1 \end{cases}$

أوجد إن أمكن $f'(-1)$.

2–3

قواعد الاشتقاق

Rules of Derivative

سوف تتعلم

مشتقّات دوال

- القوى الصحيحة الموجبة.
- الضرب في عدد ثابت.
- الجمع والطرح.
- الضرب والقسمة.
- القوى الصحيحة السالبة للمتغيّر x.
- إيجاد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند نقطة على منحنى دالة.
- قابلية الاشتقاق على فترة.

المفردات والمصطلحات:

- قاعدة Rule
- مشتقة ثابت Derivative of a Constant
- مشتقة قوى صحيحة موجبة Derivative of Postive Integer Powers
- مشتقة قوى صحيحة سالبة Derivative of Negative Integer Powers
- مشتقة الضرب بعدد ثابت Derivative of the Constant Multiple
- مشتقة الجمع والطرح Derivative of the Sum and the Difference
- مشتقة الضرب والقسمة Derivative of the Product and the Quotient

دعنا نفكّر ونتناقش

أوجد مشتقات الدوال التالية بالنسبة إلى x مستخدمًا تعريف المشتقة.

1. $g(x) = 7$
2. $f(x) = \frac{x}{3}$
3. $u(x) = -\frac{2}{x}$
4. $v(x) = x^4$

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن إيجاد مشتقة الدالة بالتعريف تحتاج إلى مهارات وعمليات حسابية مطولة والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال دون استخدام تعريف المشتقة وذلك لدوال قابلة للاشتقاق.

قاعدة (1): مشتقة دالة ثابتة Derivative of a Constant Function

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k عدد ثابت فإن $f'(x) = 0$ لجميع قيم x الحقيقية.

يمكننا القول بأن مشتقة أيّ دالّة ثابتة تساوي صفرًا.

البرهان:

إذا كانت $f(x) = k$ حيث k ثابت؛ فإنّ:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{k-k}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0$$

$$\therefore\ f'(x) = 0$$

تدريب (1)

أوجد مشتقّة $f(x)$ في الحالات التالية:

a. $f(x) = 5$

b. $f(x) = e^2$

c. $f(x) = \pi^{15}$

قاعدة (2): مشتقة الدالة $f(x) = x$

Derivative of the Function $f(x) = x$

إذا كانت $f(x) = x$ فإن $f'(x) = 1$

لجميع قيم x الحقيقية

البرهان:

$$\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h}=\lim_{h\to0}\frac{h}{h}=\lim_{h\to0}1=1$$

$$\therefore\ f'(x)=1$$

قاعدة (3): قاعدة القوى للأسس الصحيحة الموجبة للمتغيّر x

Power Rule for Positive Integer Powers of x

إذا كان $f(x)=x^n$ حيث n عدد صحيح موجب $n\neq1$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^n)=n\,x^{n-1}$$

أي أن: $f'(x)=nx^{n-1}$

تدريب (2)

أوجد مشتقة كل من الدوال التالية:

a) $f(x)=x^4$ b) $g(x)=x^{10}$ c) $h(x)=x^{12}$

قاعدة (4): قاعدة الضرب بعدد ثابت

The Constant Multiple Rule

إذا كانت f دالة في x قابلة للاشتقاق وكان k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(kf(x))=k\frac{d}{dx}f(x)$$

أي أن: $(kf(x))'=k\,f'(x)$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(kf(x))=\lim_{h\to0}\frac{kf(x+h)-kf(x)}{h}$$

$$=\lim_{h\to0}\frac{k\,(f(x+h)-f(x))}{h}$$

$$=k\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=k\,\frac{d}{dx}(f(x))$$

توضّح القاعدة (4) بأنّه

مشتقة ضرب دالة قابلة للاشتقاق في ثابت هو مشتقة هذه الدالة مضروبة في الثابت.

القاعدتان (4) ,(3) تمكّنان من إيجاد مشتقّة أيّ حدّ جبريّ بسرعة.

مثلًا $(7x^4)'=7\,(x^4)'=28x^3$

لإيجاد مشتقّات كثيرات الحدود، نحتاج إلى إيجاد مشتقّات مجاميع وفروق حدود جبريّة.

نستطيع أن نفعل ذلك بتطبيق قاعدة الجمع والطرح.

قاعدة (5): قاعدة الجمع والطرح The Sum and Difference Rule

إذا كانت f , g دالّتين في x قابلتين للاشتقاق، فإنّ مجموعهما والفرق بينهما يكونان قابلين للاشتقاق عند كلّ نقطة تكون عندها كلّ من f , g قابلة للاشتقاق.

$$\frac{d}{dx}(f(x) \pm g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) \pm \frac{d}{dx}(g(x))$$

أي أن: $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$

البرهان:

(إن وجدت)

$$\frac{d}{dx}[f(x)+g(x)] = \lim_{h\to 0}\frac{[f(x+h)+g(x+h)]-[f(x)+g(x)]}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h}$$

$$= \frac{d}{dx}(f(x))+\frac{d}{dx}(g(x))$$

وبالمثل بالنسبة إلى الفرق بين دالّتين.

مثال (1)

أوجد $\frac{dy}{dt}$ حيث $y = t^3+6t^2-\frac{5}{3}t+16$

الحل:

قاعدة الجمع والطرح

$$\frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}(t^3)+\frac{d}{dt}(6t^2)-\frac{d}{dt}\left(\frac{5}{3}t\right)+\frac{d}{dt}(16)$$

قاعدة الدالّة الثابتة وقاعدة القوى

$$= 3t^2+6\times 2t-\frac{5}{3}+0$$

$$= 3t^2+12t-\frac{5}{3}$$

حاول أن تحل

1 أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = 5x^3-4x^2+6$

قاعدة (6): اشتقاق ضرب دالتين The Product Rule

ضرب دالّتين f , g في x قابلتين للاشتقاق يكون قابلًا للاشتقاق بحيث:

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}(g(x))+g(x)\cdot\frac{d}{dx}(f(x))$$

أي أن: $(f(x)\cdot g(x))' = f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$

البرهان:

نبدأ كالمعتاد بتطبيق التعريف:

(إن وجدت) $$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالتين f, g نطرح ونجمع $f(x+h)\cdot g(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}(f(x)\cdot g(x)) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)\cdot g(x+h) - f(x+h)\cdot g(x) + f(x+h)\cdot g(x) - f(x)\cdot g(x)}{h}$$

بالتحليل والفصل

$$= \lim_{h\to 0}\left[f(x+h)\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + g(x)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} f(x+h)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-g(x)}{h} + \lim_{h\to 0} g(x)\cdot \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

عندما تقترب h من الصفر فإنّ $f(x+h)$ تقترب من $f(x)$، لأنّ f تكون متصلة عند x وقابلة للاشتقاق عند x.

الكسران يقتربان من قيم $\frac{d}{dx}g(x)$ ، $\frac{d}{dx}f(x)$ على الترتيب عند x، $\lim_{h\to 0} g(x) = g(x)$ لذلك:

$$\frac{d}{dx}(f\cdot g)(x) = f(x)\cdot\frac{d}{dx}g(x) + g(x)\cdot\frac{d}{dx}f(x)$$

يمكننا القول إن مشتقة ضرب دالتين = الدالة الأولى × مشتقة الدالة الثانية + الدالة الثانية × مشتقة الدالة الأولى.

مثال (2)

أوجد $f'(x)$ إذا كان $f(x) = (x^2+1)(x^3+3)$

الحل:

لتكن: $u = x^2+1 \;,\; v = x^3+3$

بتطبيق قاعدة الضرب نجد أن:

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(u\cdot v) = u\cdot\frac{dv}{dx} + v\cdot\frac{du}{dx}$$
$$= (x^2+1)(3x^2) + (x^3+3)(2x)$$
$$= 3x^4 + 3x^2 + 2x^4 + 6x$$
$$= 5x^4 + 3x^2 + 6x$$

حاول أن تحل

2 a هل يمكنك حل مثال 2 بطريقة أخرى؟ فسّر إجابتك.

b أوجد $f'(x)$ إذا كان:

1. $f(x) = (2x+1)(3x-2)$
2. $f(x) = 4x^2(x+6)$
3. $f(x) = (x^3-4)^2$

The Quotient Rule

قاعدة (7): قاعدة القسمة

لتكن f, g دالتين في x قابلتين للاشتقاق حيث $g(x) \neq 0$ فإن:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{f(x+h)}{g(x+h)} - \frac{f(x)}{g(x)}}{h}$$ (إن وجدت)

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot f(x+h) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}$$

لتغيير الكسر إلى كسر مكافئ يحتوي على الفرق بين نواتج القسمة لمشتقّات الدالّتين f , g ، نطرح ونجمع $g(x) \cdot f(x)$ في البسط.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \cdot f(x+h) - g(x) \cdot f(x) + g(x) \cdot f(x) - f(x) \cdot g(x+h)}{h \cdot g(x+h) \cdot g(x)}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{g(x) \frac{f(x+h) - f(x)}{h} - f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h}}{g(x+h) \cdot g(x)}$$

وبأخذ النهايات في البسط والمقام نحصل على قاعدة ناتج القسمة التالية:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{g(x) \cdot \frac{d}{dx} f(x) - f(x) \cdot \frac{d}{dx} g(x)}{(g(x))^2}$$

يمكننا القول إن: مشتقة قسمة دالتين = $\dfrac{\text{دالة المقام} \times \text{مشتقة دالة البسط} - \text{دالة البسط} \times \text{مشتقة دالة المقام}}{\text{مربع دالة المقام}}$

مثال (3)

أوجد مشتقة $f(x) = \dfrac{x^3 - 1}{5x^2 + 1}$

الحل:

بتطبيق قاعدة القسمة حيث: $u = x^3 - 1 \quad , \quad v = 5x^2 + 1$

$$f(x) = \frac{u}{v}$$

$$f'(x) = \frac{v.u' - u.v'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{(5x^2 + 1) \cdot (3x^2) - (x^3 - 1) \cdot (10x)}{(5x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{15x^4 + 3x^2 - 10x^4 + 10x}{(5x^2 + 1)^2}$$

$$= \frac{5x^4 + 3x^2 + 10x}{(5x^2 + 1)^2}$$

حاول أن تحل

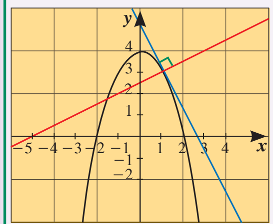
3 أوجد مشتقة $f(x)=\dfrac{4x^2+2x}{2x^3+5}$

يمكننا إيجاد ميل المماس لمنحنى الدالة f عند النقطة $(a, f(a))$ عن طريق إيجاد المشتقة عند هذه النقطة. وتكون معادلة المماس: $y-f(a)=f'(a)(x-a)$

والمستقيم العمودي (الناظم) على منحنى الدالة عند النقطة $(a, f(a))$ هو المستقيم العمودي على مماس المنحنى عند تلك النقطة ومعادلته:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

تذكر: إذا كان مستقيمان متعامدين وليس أيًّا منهما أفقيًّا فإنّ ناتج ضرب ميليهما يساوي -1.



رسم توضيحي
العمودي متعامد مع المماس عند النقطة $(1, 3)$.

مثال (4)

أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ لمنحنى الدالة f حيث $f(x)=\dfrac{x^3+1}{x^2+2}$

الحل:

نوجد أولًا مشتقة الدالة f بتطبيق قاعدة القسمة

$$f'(x)=\frac{(x^2+2)(x^3+1)'-(x^3+1)(x^2+2)'}{(x^2+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{(x^2+2)(3x^2)-(x^3+1)(2x)}{(x^2+2)^2}$$

ومنه الميل: $$f'(1)=\frac{(1^2+2)(3(1)^2)-(1^3+1)(2(1))}{(1^2+2)^2}=\frac{5}{9}$$

معادلة خط المماس: $$y-f(a)=f'(a)\cdot(x-a)$$

$$y-f(1)=f'(1)\cdot(x-1)$$

$$\therefore\ y-\frac{2}{3}=\frac{5}{9}(x-1)$$

$$y=\frac{5}{9}x-\frac{5}{9}+\frac{2}{3}$$

$$y=\frac{5}{9}x+\frac{1}{9}$$

لإيجاد معادلة الناظم عند النقطة $\left(1, \frac{2}{3}\right)$ على المنحنى نستخدم المعادلة:

$$y-f(a)=-\frac{1}{f'(a)}(x-a)$$

ميل الناظم: $$\frac{-1}{f'(a)}=-\frac{9}{5}$$

$$y-\frac{2}{3}=-\frac{9}{5}(x-1)$$

$$y=-\frac{9}{5}x+\frac{37}{15}$$

حاول أن تحل

4 أوجد معادلة المماس ومعادلة الناظم على منحنى الدالة f حيث $f(x)=\frac{x-1}{x+2}$ عند النقطة $(1,0)$

نتيجة

إذا كانت g دالة قابلة للاشتقاق وكانت $g(x)\neq 0$ ، k عددًا ثابتًا فإنّ:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right)=\frac{-k\frac{d}{dx}(g(x))}{(g(x))^2}$$

أي أن:

$$\left(\frac{k}{g(x)}\right)'=\frac{-k\cdot(g'(x))}{(g(x))^2}$$

البرهان:

مشتقة دالة ثابتة $\quad \frac{d}{dx}(k)=0 \quad \because$

وبتطبيق قاعدة القسمة

$$\because \quad \frac{d}{dx}\left(\frac{k}{g(x)}\right)=\frac{g(x)\times 0-k\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$=\frac{-k\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

مثال (5)

أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=\frac{3}{x^2+1}$

الحل:

$$f'(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{3}{x^2+1}\right)$$

$$=\frac{-3\times 2x}{(x^2+1)^2}$$

$$=\frac{-6x}{(x^2+1)^2}$$

حاول أن تحل

5 أوجد $f'(x)$ حيث $f(x)=\frac{-4}{x^2+2x+5}$

قوى x الصحيحة السالبة (الأسس الصحيحة السالبة)
Negative Integer Powers of x

قاعدة اشتقاق قوى x الصحيحة السالبة هي قاعدة الاشتقاق نفسها في حالة القوى الصحيحة الموجبة كما في القاعدة (3). لذلك نستطيع الآن أن نوسّع قاعدة القوى لتشمل القوى الصحيحة السالبة باستخدام قاعدة القسمة.

قاعدة (8): قاعدة القوى للأسس الصحيحة السالبة للمتغيّر x
Power Rule for Negative Integer Powers of x

إذا كان n عددًا صحيحًا موجبًا، $x \neq 0$ فإنّ:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = -n\,x^{-n-1}$$

أي أن $\quad (x^{-n})' = -nx^{-n-1}$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(x^{-n}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

$$= \frac{-1 \times \frac{d}{dx}(x^n)}{(x^n)^2} \qquad \text{نتيجة}$$

$$= \frac{-1 \times (n\,x^{n-1})}{(x^n)^2} \qquad \text{قاعدة (3)}$$

$$= \frac{-n\,x^{n-1}}{x^{2n}}$$

$$= -n\,x^{n-1-2n}$$

$$= -n\,x^{-n-1}$$

مثال (6)

لتكن: $y = \frac{x^2+3}{2x}$. أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = 1$

الحل:

يمكن أن نوجد المشتقّة بقاعدة القسمة، لكن من الأيسر أن نبسّط أولًا كمجموع قوّتين للمتغيّر x :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{2x} + \frac{3}{2x}\right)$$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}x^{-1}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1} = \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{2}x^{-2}\right]_{x=1} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2} = -1$$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \frac{3x^2+7}{8x^2}$ ، أوجد $\frac{dy}{dx}$ عند $x = -1$

قاعدة (9)

إذا كان $f(x) = x^{\frac{m}{n}}$ حيث m , n عددان صحيحان مختلفان، $n \neq 0$ فإن: $\frac{d}{dx}(x^{\frac{m}{n}}) = \frac{m}{n}x^{\frac{m}{n}-1}$

لجميع قيم x التي تكون المشتقة عندها موجودة.

أي أن $(x^{\frac{m}{n}})' = \frac{m}{n}(x)^{\frac{m}{n}-1}$

يمكن استنتاج أن: إذا كانت $f(x) = \sqrt{x}$ تكون $f'(x) = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

مثال (7)

أوجد مشتقة الدالة f: $x > 0$, $f(x) = x^{\frac{3}{2}}$

الحل:

بتطبيق القاعدة

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{3}{2}-1}$$

$$= \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

$$f'(x) = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$$

حاول أن تحل

7 أوجد مشتقة الدالة f : $f(x) = x^{\frac{4}{3}}$

مثال (8)

لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+2 & : x \leqslant 1 \\ 2x+1 & : x > 1 \end{cases}$ دالة متصلة على مجالها.

أوجد $f'(x)$ إن أمكن

الحل:

مجال الدالة: $D_f = (-\infty , 1] \cup (1 , \infty) = \mathbb{R}$

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : & x < 1 \\ \text{تبحث} & : & x = 1 \\ 2 & : & x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = (1)^2 + 2 = 3$$

إن وجدت

$$f'_-(1) = \lim_{x\to1^-} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2+2-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-} \frac{x^2-1}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^-} \frac{\cancel{(x-1)}^{1}\,(x+1)}{\cancel{x-1}_{1}}$$
$$= \lim_{x\to1^-} (x+1)$$
$$= 1+1 = 2 \qquad (1)$$

إن وجدت

$$f'_+(1) = \lim_{x\to1^+} \frac{f(x)-f(1)}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2x+1-3}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2x-2}{x-1}$$
$$= \lim_{x\to1^+} \frac{2\cancel{(x-1)}^{1}}{\cancel{x-1}_{1}}$$
$$= \lim_{x\to1^+} 2 = 2 \qquad (2)$$

من (1) و (2)

$$f'_-(1) = f'_+(1) = 2$$
$$\therefore \quad f'(1) = 2$$

ومنه

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x < 1 \\ 2 & : \quad x = 1 \\ 2 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x \leqslant 1 \\ 2 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

حاول أن تحل

8 أوجد المشتقة إن أمكن لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \quad x \leqslant 2 \\ 4x-3 & : \quad x > 2 \end{cases}$

b $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : \quad x < 1 \\ 2\sqrt{x} & : \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

2-4

مشتقات الدوال المثلثية

Derivatives of Trigonometric Functions

سوف تتعلم

- إيجاد مشتقة دالة الجيب.
- إيجاد مشتقة دالة جيب التمام.
- إيجاد مشتقات الدوال المثلثية الأخرى.

المفردات والمصطلحات:

- مشتقة دالة الجيب
Derivative of the Sine Function
- مشتقة دالة جيب التمام
Derivative of the Cosine Function
- مشتقة دالة الظل
Derivative of the Tangent Function
- مشتقة دالة ظل التمام
Derivative of the Cotangent Function
- مشتقة دالة القاطع
Derivative of sec Function
- مشتقة دالة قاطع التمام
Derivative of csc Function

تذكر:

إذا كان x قياس زاوية بالراديان فإن:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

دعنا نفكر ونتناقش

أوجد مشتقة الدالة f : $\quad f(x) = \sin x$

مستخدمًا تعريف المشتقة.

والقواعد التالية تساعدك في إيجاد مشتقة بعض الدوال المثلثية دون استخدام تعريف المشتقة.

أولًا: مشتقات الدوال الجيبية

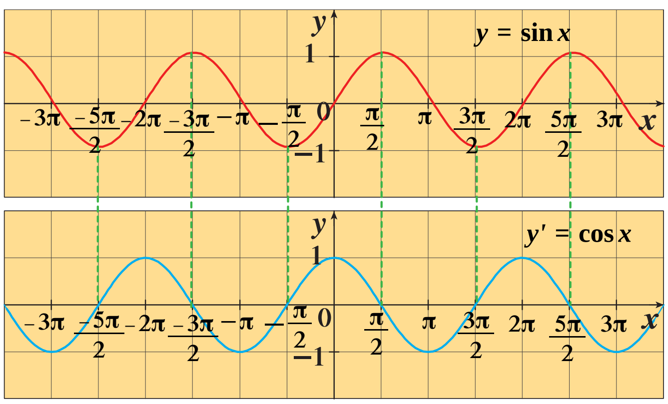
1 مشتقة دالة الجيب هي موجب دالة جيب التمام

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$$

2 مشتقة دالة جيب التمام هي سالب دالة الجيب

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$$

قواعد الاشتقاق التي تم دراستها صحيحة للدوال الجيبية.



شكل (1)

لاحظ الشكل (1):

الدالة $f(x) = \sin x$ لها مماسات أفقية عند كل من القيم $\ldots, \frac{3\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}, \ldots$ وبيان الدالة $f'(x) = \cos x$ يتقاطع مع محور السينات عند هذه القيم أي أن المشتقة عندها تساوي الصفر.

مثال (1)

أوجد المشتقّات للدوال التالية:

a $y = x^2 \sin x$ **b** $u = \dfrac{\cos x}{1 - \sin x}$ **c** $f(x) = \sin^2 x$

الحل:

قاعدة الضرب

a $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{d}{dx}x^2\right) \cdot \sin x + \left(\frac{d}{dx}\sin x\right) \cdot x^2$

$= 2x\sin x + x^2\cos x$

قاعدة القسمة

b $\frac{du}{dx} = \frac{(1-\sin x) \cdot \frac{d}{dx}(\cos x) - \cos x \cdot \frac{d}{dx}(1-\sin x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{(1-\sin x)(-\sin x) - \cos x(0-\cos x)}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{-\sin x + \sin^2 x + \cos^2 x}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)^2}$

$= \frac{1}{1-\sin x}$

c $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d}{dx}(\sin^2 x)$

$= \frac{d}{dx}(\sin x \cdot \sin x)$

$= \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x) + \sin x \cdot \frac{d}{dx}(\sin x)$

$= \sin x \cdot \cos x + \sin x \cdot \cos x$

$= 2\sin x\cos x$

حاول أن تحل

1 أوجد المشتقات للدوال التالية:

a $h(x) = \cos^2 x$　　b $g(x) = \frac{x}{\cos x}$　　c $y = \frac{\sin x}{\sin x + \cos x}$

ثانيًا: مشتقات الدوال المثلثيّة الأخرى

الدالتان $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \cos x$ دالّتان قابلتان للاشتقاق، لذا فإن الدوال المثلثية التالية:

$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ ، $\sec x = \frac{1}{\cos x}$

$\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ ، $\csc x = \frac{1}{\sin x}$

هي أيضًا دوال قابلة للاشتقاق عند كلّ قيمة للمتغيّر x تكون معرّفة عندها وتعطى مشتقاتها بالقواعد التالية:

1 $\frac{d}{dx}\tan x = \sec^2 x$

2 $\frac{d}{dx}\cot x = -\csc^2 x$

3 $\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x$

4 $\frac{d}{dx}\csc x = -\csc x \cot x$

تذكر:

$\sec^2 x = 1 + \tan^2 x$

$\csc^2 x = 1 + \cot^2 x$

مثال (2)

أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \tan x + \cot x$ b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$ c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

الحل:

a $f(x) = \tan x + \cot x$

$f'(x) = \sec^2 x + (-\csc^2 x) = \sec^2 x - \csc^2 x$

b $g(x) = \sec x \cdot (1 + \sin x)$

$g'(x) = (1 + \sin x)(\sec x \cdot \tan x) + \sec x \cdot \cos x = \sec x \cdot \tan x + \sec x \cdot \tan x \cdot \sin x + 1$

c $h(x) = \csc x + \sin x \cdot \tan x$

$h'(x) = -\csc x \cdot \cot x + \tan x \cdot \cos x + \sec^2 x \cdot \sin x$

حاول أن تحل

2 أوجد مشتقات الدوال التالية:

a $f(x) = \dfrac{1 + \tan x}{\tan x}$ b $g(x) = \sec x + \csc x$ c $h(x) = \dfrac{\sec x}{\csc x}$

مثال (3)

أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \tan x$ عند النقطة $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

الحل:

نوجد أوّلًا مشتقة الدالة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^2 x$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{4}} = \sec^2 \frac{\pi}{4} = (\sqrt{2})^2 = 2$$

وعليه ميل المستقيم العمودي للمنحنى عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 1\right)$

هو $m_1 = \dfrac{-1}{m} = \dfrac{-1}{2}$

معادلة المستقيم العمودي:

$$y - 1 = \frac{-1}{2}\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$y = \frac{-1}{2}x + \frac{\pi}{8} + 1$$

حاول أن تحل

3 أوجد معادلة المستقيم العمودي لمنحنى الدالة: $y = \sec x$ عند النقطة $F\left(\frac{\pi}{3}, 2\right)$

2-5

قاعدة السلسلة

Chain Rule

سوف تتعلم

• إيجاد مشتقة تركيب دالتين باستخدام قاعدة السلسلة.

المفردات والمصطلحات:

• قاعدة السلسلة Chain Rule

• دالة مركبة Composite Function

• قاعدة سلسلة القوى Power Chain Rule

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن الدوال التالية:

$$f(x)=3x^2+1 \quad , \quad g(x)=x^2$$

$$h(x)=x^3 \quad , \quad q(x)=x^{10}$$

أكمل ما يلي:

a $(g\circ f)(x)=g(f(x))=g(3x^2+1)$

$$=(3x^2+1)^2=9x^4+....+....$$

$$\frac{d}{dx}(g\circ f)(x)=36x^3+....+....$$

b $(h\circ f)(x)=h(f(x))=..........$

$$=........=..............$$

$$(h\circ f)'(x)=...............$$

c $(q\circ f)(x)=...........$

هل من السهل إيجاد $(q\circ f)'$ بنفس الأسلوب السابق؟

من فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أنه عند إيجاد مشتقة:

$$(q\circ f)(x)=(3x^2+1)^{10}$$

سنجد صعوبة في فك هذا المقدار.

تساعدنا القواعد التالية على إيجاد مشتقة مثل هذه الدوال.

قاعدة السلسلة (التسلسل) Chain Rule

إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبّة

$$(f\circ g)(x)=f(g(x))$$

تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون:

$$(f\circ g)'(x)=f'(g(x))\cdot g'(x)$$

أي يمكننا القول إن مشتقّة الدالة المركّبة $f(g(x))$ عند x هي مشتقّة الدّالة f عند $g(x)$ مضروبة في مشتقّة الدالّة g عند x.

مثال (1)

إذا كان $g(x) = x^{10}$, $f(x) = 3x^2 + 1$. فأوجد باستخدام قاعدة السلسلة

a $(f \circ g)'(x)$

b $(g \circ f)'(-1)$

الحل: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

قاعدة السلسلة

a $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = 6x , \quad g'(x) = 10x^9$

$f'(g(x)) = 6(x^{10}) = 6x^{10}$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$\therefore (f \circ g)'(x) = 6x^{10} \cdot 10x^9 = 60x^{19}$

$f \circ g(x) = f(g(x)) = 3(x^{10})^2 + 1 = 3x^{20} + 1$

حل آخر

$\therefore (f \circ g)'(x) = 60x^{19}$

b $(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$

$= 10(f(x))^9 \cdot 6x$

$= 10(3x^2 + 1)^9 \cdot 6x$

$(g \circ f)'(-1) = -60(4)^9$

$= -15728640$

حاول أن تحل

1 a هل يمكنك حل مثال (1) a بطريقة أخرى؟ فسّر.

b لتكن: $g(x) = x^{13}$, $f(x) = -2x^3 + 4$ أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$ ، $(g \circ f)'(0)$

مثال (2)

لتكن: $g(x) = x^2 + 1$, $(x \neq 0)$ $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f \circ g)'(x)$

الحل:

$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$f'(x) = \dfrac{2x - (2x + 1)}{x^2} = \dfrac{-1}{x^2} \quad , \quad g'(x) = 2x$

المتغير: $g(x)$

$f'(g(x)) = f'(x^2 + 1) = \dfrac{-1}{(x^2 + 1)^2}$

قاعدة السلسلة

$\therefore (f \circ g)'(x) = \dfrac{-1}{(x^2 + 1)^2} \cdot 2x$

$= \dfrac{-2x}{(x^2 + 1)^2}$

حاول أن تحل

2 لتكن: $g(x)=\sqrt{x}$, $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x^2+4}$

أوجد باستخدام قاعدة السلسلة $(f\circ g)'(1)$

وضع عالم الرياضيات لايبنتز (Leibniz) صورة أخرى لقاعدة السلسلة.

صورة أخرى لقاعدة السلسلة

إذا كانت $u=g(x)$, $y=f(u)$ فإن:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

يتم حسابها عند $u=g(x)$

مثال (3)

إذا كانت: $u=5x^2+2$, $y=u^3-3u+1$

فأوجد: $\dfrac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل

الحل:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

مشتقة بدلالة u
$$\frac{dy}{du}=3u^2-3$$

مشتقة بدلالة x
$$\frac{du}{dx}=10x$$

قاعدة التسلسل
$$\frac{dy}{dx}=(3u^2-3)\times(10x)$$

تعويض
$$\frac{dy}{dx}=\left(3(5x^2+2)^2-3\right)\times(10x)$$
$$=750x^5+600x^3+90x$$

حاول أن تحل

3 لتكن: $u=2x^3+x$, $y=u^2+4u-3$

أوجد: $\dfrac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

الربط بالفيزياء

إذا كانت $s(t)$ دالة موقع جسم بعد t ثانية من حركته فإن سرعته اللحظية v هي:

$v = \frac{ds}{dt} = s'(t)$

ملاحظة:

$v = \frac{ds}{dt}$ تسمى أيضًا السرعة المتجهة ويمكن أن تكون موجبة أو سالبة أو صفر.

تذكر:

اقتصرت دراستنا على دوال قابلة للتركيب

مثال (4)

يتحرّك جسيم على محور السينات بحيث إن موضعه عند أيّ لحظة $t \geq 0$ يعطى بالدالّة: $S = \cos(t^2+1)$. أوجد السرعة اللحظية للجسيم كدالة في t.

الحل:

نعلم أن: $v = \frac{dS}{dt}$ (v هي السرعة اللحظية)

في هذه الحالة S دالّة مركّبة، حيث: $u = t^2+1$, $S = \cos(u)$

لدينا:

$S = \cos(u)$ $\qquad \frac{dS}{du} = -\sin(u)$

$u = t^2+1$ $\qquad \frac{du}{dt} = 2t$

باستخدام قاعدة السلسلة:

$$\frac{dS}{dt} = \frac{dS}{du} \cdot \frac{du}{dt}$$
$$= (-\sin(u)) \cdot 2t$$
$$= (-\sin(t^2+1)) \cdot 2t$$
$$= -2t\sin(t^2+1)$$

حاول أن تحل

4 أوجد مشتقة $y = \sin(x^2+x)$ بالنسبة إلى المتغيّر x.

من مثال (4) يمكن إيجاد المشتقة باستخدام القاعدة التالية:

$\frac{d}{dx}(\cos f(x)) = (-\sin f(x)) \cdot f'(x)$ ويمكن تعميمها على الدوال المثلثية الأخرى.

مثال (5)

أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \sin^3 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

الحل:

نفرض أن: $h(x) = x^3$, $g(x) = \sin x$

$$\therefore\ f(x) = (h \circ g)(x)$$
$$f'(x) = (h \circ g)'(x)$$
$$= h'(g(x)) \cdot g'(x)$$
$$= 3(g(x))^2 \cdot \cos x$$
$$= 3\sin^2 x \cos x$$

حاول أن تحل

5 أوجد مشتقة الدالة: $f(x) = \cos^5 x$ باستخدام قاعدة السلسلة.

قاعدة سلسلة القوى Chain Rule Powers

في كثير من الأحيان نحتاج إلى إيجاد مشتقة دالة ما على الصورة: $y = [f(x)]^n$ حيث n عدد نسبي.
لذلك نستخدم القاعدة التالية والمسماة بقاعدة سلسلة القوى:

قاعدة سلسلة القوى

إذا كانت $f(x)$ قابلة للاشتقاق على مجالها وكان n عددًا نسبيًّا فإن:

$$\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1} \cdot f'(x)$$

مثال (6)

لتكن: $y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$ ، أوجد: y'

الحل:

$\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$$y = \sqrt[5]{(x^2+3x+5)^3}$$
$$= (x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}}$$
$$y' = \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{\frac{3}{5}-1} \cdot (2x+3)$$
$$= \frac{3}{5}(x^2+3x+5)^{-\frac{2}{5}} \cdot (2x+3)$$
$$= \frac{3(2x+3)}{5\sqrt[5]{(x^2+3x+5)^2}}$$

حاول أن تحل

6 لتكن: $y = \sqrt[4]{(2x^4-3x^2+4)^3}$ ، أوجد: y'

مثال (7)

أوجد ميل مماس المنحنى $y = \sin^5 x$ عند $x = \frac{\pi}{3}$

الحل:

$$\frac{dy}{dx} = 5\sin^4 x\,(\sin x)' = 5\sin^4 x \cdot \cos x$$

ميل المماس هو:

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=\frac{\pi}{3}} = 5\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{45}{32}$$

حاول أن تحل

7 بيّن أن ميل أي مماس للمنحنى $y = \frac{1}{(-2x-1)^3}$ دائمًا يكون موجبًا حيث $x \neq -\frac{1}{2}$

2–6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives and Implicit Differentiation

سوف تتعلم
- المشتقات العليا.
- الاشتقاق الضمني.

المفردات والمصطلحات:
- مشتقة ذات رتبة عليا Higher Order Derivative
- اشتقاق ضمني Implicit Derivative

دعنا نفكر ونتناقش

لتكن: $f(x) = x^4 - 3x^2 + 5$

أكمل:

1 $f'(x) = \dots = g(x)$

2 $g'(x) = \dots$

هل $g'(x) = (f'(x))'$؟

أولًا: المشتقات ذات الرتب العليا Higher Order Derivatives

رمزنا سابقًا لمشتقة دالة على مجالها بالرمز $y' = \frac{dy}{dx}$ والآن سوف تسمى y' المشتقة من الرتبة الأولى للدالة y بدلالة المتغير x .

والمشتقة الأولى نفسها (y') يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابتها:

$$y'' = \frac{d(y')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d^2y}{dx^2}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثانية للدالة y بدلالة x .

والمشتقة الثانية نفسها يمكن أن تكون دالة قابلة للاشتقاق على مجالها بدلالة المتغير x وبالتالي يمكن كتابة:

$$y''' = \frac{d(y'')}{dx} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right) = \frac{d^3y}{dx^3}$$

وهذه تسمى المشتقة من الرتبة الثالثة للدالة y بدلالة المتغير x .

وبصورة عامة إذا كان n عددًا صحيحًا حيث $n > 1$ فإن مشتقة الدالة y من الرتبة n بدلالة x هي على الشكل التالي:

$$y^{(n)} = \frac{d}{dx}\left(y^{(n-1)}\right) = \frac{d^ny}{dx^n}$$

تذكر:

(a) $y = f(x)$

(b) $\frac{dy}{dx} = y'$

ملاحظة:
أحيانًا نستخدم قاعدة السلسلة مرتين أو أكثر لإيجاد مشتقة.

ملاحظة:
لا يجب الخلط بين رتبة مشتقة الدالة $y^{(n)}$ و y^n من قوى y.

مثال (1)

أوجد المشتقات حتى الرتبة الرابعة للدالة $y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$ بدلالة المتغير x.

الحل:

$$y = 2x^7 - 4x^2 + 3x - 5$$

المشتقة من الرتبة الأولى $y' = \frac{dy}{dx} = 14x^6 - 8x + 3$

المشتقة من الرتبة الثانية $y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = 84x^5 - 8$

المشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = \frac{d^3y}{dx^3} = 420x^4$

المشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \frac{d^4y}{dx^4} = 1680x^3$

حاول أن تحل

1 إذا كانت: $y = 4x^5 - 5x^3 + 7$

فأوجد المشتقات حتى الرتبة الثالثة.

مثال (2)

إذا كانت $y = \sin x$. بيّن أن $y^{(4)} = y$.

الحل:

y دالة معرفة لكل قيم x على $\mathbb{R}$ $y = \sin x$

مشتقة من الرتبة الأولى $y' = \cos x$

مشتقة من الرتبة الثانية $y'' = -\sin x$

مشتقة من الرتبة الثالثة $y''' = -\cos x$

مشتقة من الرتبة الرابعة $y^{(4)} = \sin x$

$$\therefore\ y^{(4)} = y$$

حاول أن تحل

2 لتكن الدالة: $y = \cos x$.

بيّن أن $y^{(4)} + y'' = 0$.

مثال (3)

أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\cos x}$

الحل:

$$y = \frac{1}{\cos x} = \sec x$$

$$y' = \sec x \tan x$$

$$y'' = \frac{d}{dx}(\sec x \tan x)$$

$$= \tan x \frac{d}{dx}\sec x + \sec x \frac{d}{dx}\tan x$$

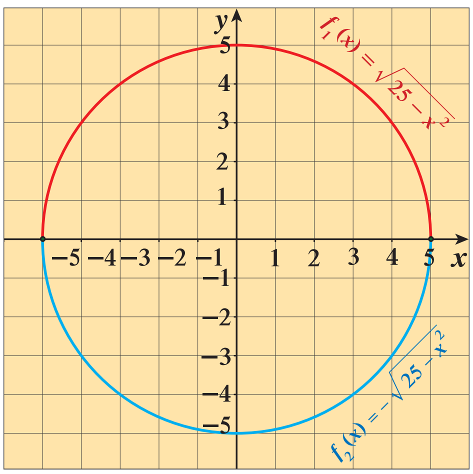
$$= \tan x \,.\, \sec x \,.\, \tan x + \sec x \,.\, \sec^2 x$$

$$= \sec x \bullet \tan^2 x + \sec^3 x$$

حاول أن تحل

3 أوجد y'' حيث $y = \dfrac{1}{\sin x}$

ثانيًا: الاشتقاق الضمنيّ Implicit Derivative



في دراستنا السابقة يمكننا إيجاد مشتقات بعض الدوال على الصورة $y = f(x)$ مثل:

$$y = 3x^2 - 2x + 1 \quad , \quad y = \sqrt{x^2 + 4} \ , \ \ldots$$

وبالنظر لمعادلة المنحنى $y - xy = x$

نلاحظ أنه يمكننا كتابتها **بالصورة الصريحة** $y = f(x)$ أي $y = \dfrac{x}{1 - x}$

ومنه يمكننا إيجاد مشتقة هذه الدالة أو ميل منحنى هذه الدالة حيث $x \neq 1$.

وبالنسبة لمنحنى $x^2 + y^2 = 25$ نجد أن ميل المنحنى معرّف عند جميع نقاطه باستثناء النقطتين $(5, 0)$ و $(-5, 0)$. لماذا؟

ونجد أن المنحنى هو اتحاد منحنيي الدالتين

$y_1 = f_1(x) = \sqrt{25 - x^2}$ ، $y_2 = f_2(x) = -\sqrt{25 - x^2}$ اللتين كلّ منهما قابلة للاشتقاق عند أيّ نقطة في مجالها عدا 5، -5.

ولكن، هل يمكننا إيجاد ميل المنحنى إذا كان من غير الممكن التوصل للصورة الصريحة للحصول على الدوالّ المكوّنة لها؟

الإجابة عن هذا السؤال تتمثّل في اعتبار y دالّة قابلة للاشتقاق في x ، واشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة إلى x باستخدام قواعد الاشتقاق التي سبق تعلّمها في هذه الوحدة.

وهذا يمكّننا من إيجاد صيغة $\dfrac{dy}{dx}$ بدلالة x, y نحسب منها ميل المنحنى عند أيّ نقطة (x, y) على المنحنى.

تسمّى عمليّة إيجاد المشتقّة $\dfrac{dy}{dx}$ بهذه الطريقة الاشتقاق الضمنيّ.

مثال توضيحي

أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y^3 + 5y^2 - x^3 = 0$

الحل:

نفرض أن $y = f(x)$ وبالتعويض في المعادلة:

$$(f(x))^3 + 5(f(x))^2 - x^3 = 0$$

وباستخدام قاعدة السلسلة نوجد المشتقة فتكون كالتالي:

$$3(f(x))^2 \cdot f'(x) + 10\, f(x) \cdot f'(x) - 3x^2 = 0$$

أي أن:

$$3y^2y' + 10yy' - 3x^2 = 0$$

ومنها نحصل على y' :

$$y'(3y^2 + 10y) = 3x^2$$

$$\therefore\ y' = \frac{3x^2}{3y^2 + 10y}$$

باستخدام نفس الخطوات المتبعة في المثال التوضيحي يمكننا التوصل إلى أن:

$$(y^2)' = 2yy'$$

$$(y^3)' = 3y^2y'$$

مثال (4)

أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$ في الحالات التالية:

a $y^2 + xy = 7x$

b $y = x + x^2y^5$

الحل:

a نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x باعتبار أن y دالّة في x قابلة للاشتقاق، وتطبيق قاعدة السلسلة هو:

$$\left[\frac{d}{dx}(f(x))^n = n(f(x))^{n-1}f'(x)\right]$$

$$2yy' + 1xy' + y = 7$$

$$y'(2y + x) = 7 - y$$

$$y' = \frac{7 - y}{2y + x}$$

b $y = x + x^2y^5$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{dx} + \frac{d(x^2y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + y^5\frac{d(x^2)}{dx} + x^2\frac{d(y^5)}{dx}$$

$$y' = 1 + 2xy^5 + 5x^2y^4y'$$

$$y' - 5x^2y^4y' = 1 + 2xy^5$$

$$y'(1 - 5x^2y^4) = 1 + 2xy^5$$

$$y' = \frac{1 + 2xy^5}{1 - 5x^2y^4}$$

حاول أن تحل

4 لتكن: $y^2 = x^2 - 2x$ ، أوجد $y' = \frac{dy}{dx}$.

وعمومًا، تتمّ عمليّة الاشتقاق الضمنيّ وفق الخطوات التالية على الترتيب:

1 اشتقاق طرفي المعادلة بالنسبة للمتغير x .

2 تجميع الحدود التي تحتوي $\frac{dy}{dx}$ أو y' في أحد طرفي المعادلة.

3 إخراج $\frac{dy}{dx}$ أو y' كعامل مشترك.

4 كتابة المعادلة على الصورة $\frac{dy}{dx}$ أو y' بدلالة x , y .

مثال (5)

أوجد ميل المماس للمنحنى (الدائرة) الذي معادلته $x^2 + y^2 = 25$ عند النقطة $(3 , -4)$.

الحل:

يمكننا إيجاد ميل المنحنى عند النقطة $(3 , -4)$ بسهولة باستخدام الاشتقاق الضمنيّ للمعادلة الأصليّة بالنسبة إلى x .

$$\frac{d}{dx}(x^2 + y^2) = \frac{d}{dx}(25)$$

$$\frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(y^2) = 0$$

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0 \rightarrow 2y\frac{dy}{dx} = -2x \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{-x}{y}$$

وبالتعويض بـ $(3 , -4)$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(3,-4)} = \frac{-3}{-4} = \frac{3}{4}$$

$\therefore$ ميل المماس $= \frac{3}{4}$

حاول أن تحل

5 أوجد ميل المماس للمنحنى الذي معادلته: $x^2 - y^2 + yx - 1 = 0$ عند $(1 , 1)$

مثال (6)

أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $2y = x^2 + \sin y$ عند النقطة $(2\sqrt{\pi}\ ,\ 2\pi)$

الحل:

نشتقّ طرفي المعادلة بالنسبة إلى x.

$$\frac{d}{dx}(2y) = \frac{d}{dx}(x^2 + \sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}(x^2) + \frac{d}{dx}(\sin y)$$

$$2\frac{dy}{dx} = 2x + (\cos y)\frac{dy}{dx}$$

$$2\frac{dy}{dx} - (\cos y)\frac{dy}{dx} = 2x$$

$$\frac{dy}{dx}(2 - \cos y) = 2x$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2 - \cos y}$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(2\sqrt{\pi}, 2\pi)} = \frac{2(2\sqrt{\pi})}{2 - \cos(2\pi)}$$

$$= \frac{4\sqrt{\pi}}{2 - 1} = 4\sqrt{\pi}$$

ميل المماس للمنحنى عند النقطة $(2\sqrt{\pi}\ , 2\pi)$ هو $4\sqrt{\pi}$

حاول أن تحل

6 أوجد ميل المماس $\left(\frac{dy}{dx}\right)$ للمنحنى الذي معادلته: $x^2 + y^2 - 2xy = 1$ حيث $x \neq y$ عند النقطة $(2, 1)$

مثال (7)

للمنحنى الذي معادلته $2\sqrt{y} + y = x$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(3\ ,\ 1)$

الحل:

الاشتقاق الضمني

$$2y^{\frac{1}{2}} + y = x$$

$$2 \cdot \frac{1}{2}(y)^{-\frac{1}{2}}y' + y' = 1$$

$$\frac{1}{y^{\frac{1}{2}}} \cdot y' + y' = 1$$

$$y'\left(\frac{1}{\sqrt{y}} + 1\right) = 1$$

$$\therefore\ y' = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{y}}+1}$$

$$y' = \frac{\sqrt{y}}{1+\sqrt{y}}$$

وبالتعويض بـ $(3\,,1)$

$$y' = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

∴ ميل المماس = $\frac{1}{2}$

حاول أن تحل

7 للمنحنى الذي معادلته: $y^2+\sqrt{y}+x^2=3$ أوجد y' ثم أوجد ميل المماس لهذا المنحنى عند النقطة $(1\,,1)$

مثال (8)

إذا كانت $y=\sqrt{1-2x}$ فأثبت أن: $yy''+(y')^2=0$

الحل:

لتكن $y=(g\circ h)(x)$ حيث $h(x)=1-2x$ ، $g(x)=\sqrt{x}$

$$g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\quad,\quad h'(x)=-2\quad,\quad g'(h(x))=\frac{1}{2\sqrt{1-2x}}$$

$$y' = g'(h(x))\cdot h'(x)$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{1-2x}}\times(-2)$$

$$=\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x)\cdot f'(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

$$y''=\frac{0\times\sqrt{1-2x}-(-1)\times\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$y''=\frac{\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}}{(\sqrt{1-2x})^2}$$

$$=\frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}$$

$$yy''+(y')^2=\sqrt{1-2x}\times\frac{-1}{(1-2x)\sqrt{1-2x}}+\left(\frac{-1}{\sqrt{1-2x}}\right)^2$$

$$=\frac{-1}{1-2x}+\frac{1}{1-2x}=0$$

حاول أن تحل

8 إذا كانت $y=x\sin x$

فأثبت أن $y'''+y'+2\sin x=0$

مثال (9)

لتكن $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ أثبت أن: $(1+x^2)\, f'''(x) + 6x\, f''(x) + 6\, f'(x) = 0$

الحل:

نوجد أولًا: $f'(x),\ f''(x)\ ,\ f'''(x)$

$$\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)' = \frac{v(x)\cdot u'(x) - u(x)\cdot v'(x)}{(v(x))^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x}{(1+x^2)^2}$$

$$f''(x) = \frac{(1+x^2)^2(-2) - (-2x)(2)(1+x^2)(2x)}{(1+x^2)^4}$$

بسّط

$$f''(x) = \frac{(\cancel{1+x^2})(6x^2-2)}{(1+x^2)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$= \frac{6x^2-2}{(1+x^2)^3}$$

$$f'''(x) = \frac{(1+x^2)^3(12x) - (6x^2-2)(3)(1+x^2)^2(2x)}{(1+x^2)^6}$$

$$= \frac{(\cancel{1+x^2})^2(-24x^3+24x)}{(1+x^2)^{\cancel{6}\,4}}$$

$$= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^4}$$

$$(1+x^2)\, f'''(x) + 6x\, f''(x) + 6\, f'(x)$$

$$= \frac{-24x^3+24x}{(1+x^2)^3} + \frac{36x^3-12x}{(1+x^2)^3} + \frac{-12x^3-12x}{(1+x^2)^3}$$

$$= 0$$

حاول أن تحل

9 لتكن $f(x) = \frac{1}{1-x}$ فأثبت أن : $f'''(x) = \frac{3!}{(1-x)^4}$

المرشد لحل المسائل

يتحرّك جسيم ويحدّد موقعه عند اللحظة $t \geq 0$ بالدّالة: $s(t) = 0.6t^3 - 1.5t - 0.9$ حيث s تقاس بالمتر (m) و t بالثواني (s).

a أوجد مسافة انتقال الجسيم في أوّل 5 s

b أوجد السرعة المتوسطة خلال 5 s

c أوجد السرعة اللحظية المتجهة عند اللحظة $t = 5$

الحل:

كيف فكّر أحمد لحل هذه المسألة:

a نوجد $s(5)$

$$s(5) = 0.6(5)^3 - 1.5(5) - 0.9 = 66.6\ \text{m}$$

المسافة التي انتقلها الجسم هي 66.6 m خلال 5 s

b لإيجاد السرعة المتوسطة خلال 5 s:

$$\frac{s(5) - s(0)}{5 - 0} = \frac{66.6 + 0.9}{5} = 13.5\ \text{m/s}$$

c نوجد دالة السرعة وهي مشتقة دالة الحركة:

$$s'(t) = \frac{ds}{dt} = 1.8t^2 - 1.5$$

من ثم نحسب $s'(5)$:

$$s'(5) = 1.8(5)^2 - 1.5 = 43.5\ \text{m/s}$$

مسألة إضافية

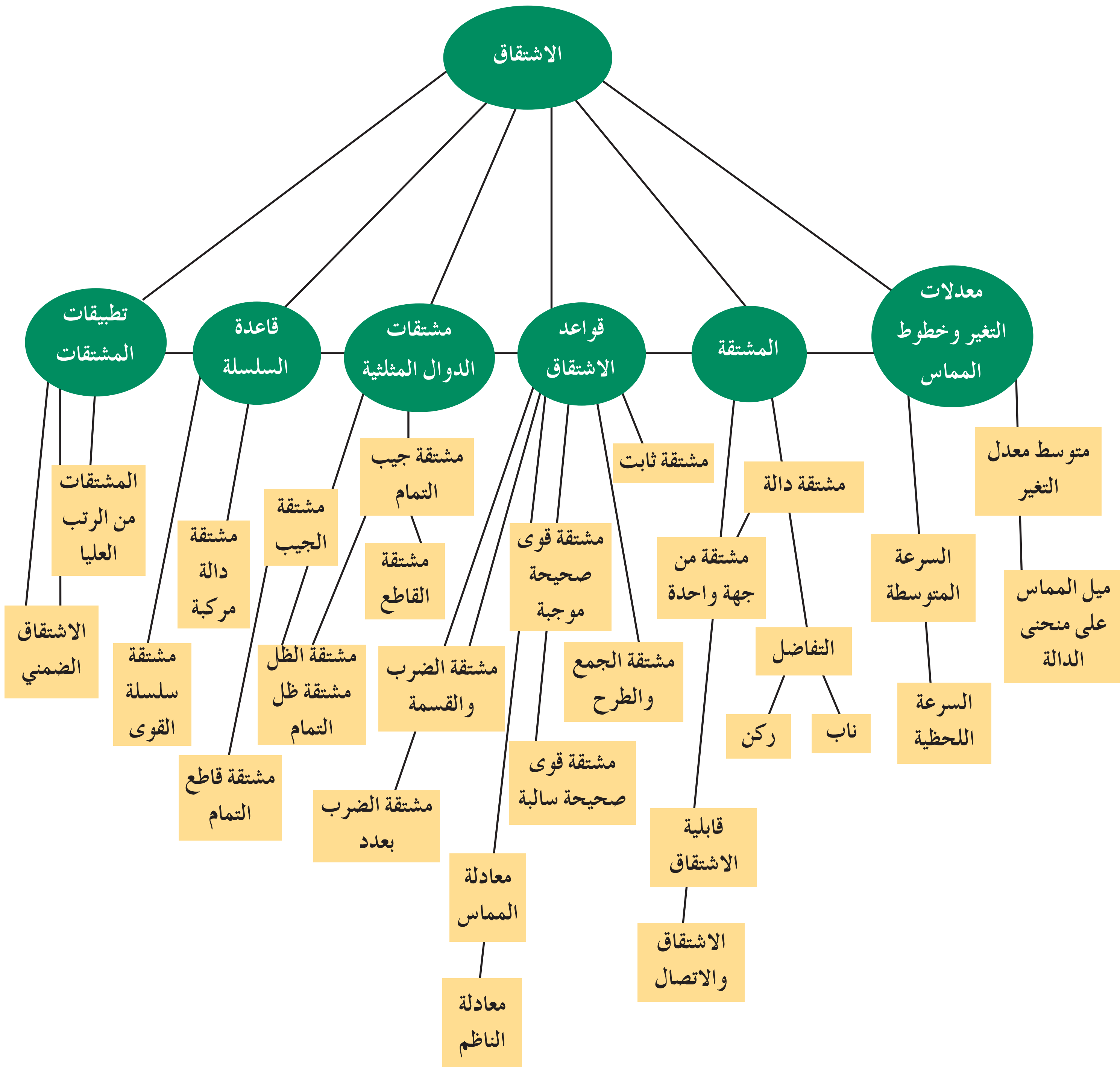
موقع جسم يتحرك مبيّن في الدالة: $s(t) = 9t^3 - 7t + 3$ وذلك بعد t ثانية حيث $t \geq 0$.

a أوجد المسافة التي قطعها الجسم بعد 3 s.

b أوجد الدالة التي تدل على سرعة الجسم بالنسبة إلى الزمن عند اللحظة t.

c أوجد السرعة المتوسطة والسرعة اللحظية المتجهة عند $t = 3$.

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- يعرف متوسط معدل التغير للدالة f على فترة مغلقة $[a\,,b]$ بالقاعدة $\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$
- السرعة المتوسطة بين مدتين من الزمن هي معدل التغير على هذه الفترة.
- السرعة اللحظية هي السرعة التي تعطى خلال لحظة من الزمن وتعطى بالقاعدة:

$$\frac{\Delta y}{\Delta t}=\lim_{h\to 0}\frac{f(t+h)-f(t)}{h}$$

حيث t هي اللحظة من الزمن لإيجاد السرعة اللحظية.

- معدل التغير لدالة f عند النقطة $P(a\,,f(a))$ إن وجد هو:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

- ميل المماس لمنحنى عند نقطة محددة يعطى بالقاعدة: $m=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ حيث إن a هي الإحداثي السيني للنقطة على منحنى الدالة f حيث إن y_0 , x_0 هما إحداثيا النقطة على المنحنى، m هي ميل المماس.
- معادلة الناظم على المماس عند نقطة على منحنى تعطى بالقاعدة: $y-f(a)=\dfrac{-1}{f'(a)}(x-a)$
- مشتقة الدالة f عند نقطة إحداثها السيني a تعطى بالقاعدة:

$f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ أو $f'(a)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ إذا وجدت.

- نحصل على ركن عندما تكون المشتقّتان من جهة اليمين ومن جهة اليسار عند التقاء الشعاعين غير متساويتين.
- نحصل على ناب عندما يكون ميل المماس للمنحنى عند نقطة تقاطع محددة يقترب من ∞ في إحدى الجهات ويقترب من $-\infty$ في الجهة الثانية ويوجد مماس رأسي عندها.
- نحصل على مماس رأسي عندما يكون المماسللمنحنى عند نقطة رأسيًا.
- إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة ، فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.
- معكوس النظرية ليس صحيحًا دائمًا، الدالة المتصلة قد يكون لها ركن أو ناب أو مماس عمودي ومن ثم لا تكون قابلة للاشتقاق عند نقطة معينة.
- إذا كان $f(x)=c$ فإن: $f'(x)=0$ حيث c قيمة ثابتة.
- إذا كانت $f(x)=x$ فإن $f'(x)=1$
- إذا كان $f(x)=x^n$ فإن: $f'(x)=nx^{n-1}$ حيث n عدد صحيح موجب أو سالب.
- $(kf(x))'=k\,f'(x)$
- $(f(x)\pm g(x))'=f'(x)\pm g'(x)$
- $(f(x)\cdot g(x))'=f(x)\cdot g'(x)+g(x)\cdot f'(x)$

- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{g(x) \cdot f'(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$
- إذا كان $f(x) = \sin x$ فإن: $f'(x) = \cos x$
- إذا كان $f(x) = \cos x$ فإن: $f'(x) = -\sin x$
- إذا كان $f(x) = \tan x$ فإن: $f'(x) = \sec^2 x$
- إذا كان $f(x) = \cot x$ فإن: $f'(x) = -\csc^2 x$
- إذا كان $f(x) = \sec x$ فإن: $f'(x) = \sec x \cdot \tan x$
- إذا كان $f(x) = \csc x$ فإن: $f'(x) = -\csc x \cdot \cot x$
- إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق عند $g(x)$، الدالة g قابلة للاشتقاق عند x، فإن الدالة المركبّة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ تكون قابلة للاشتقاق عند x ، ويكون: $(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$
- إذا $y = f(u)$ حيث إن $g = u(x)$ فإن: $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$
- $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{d^2x}$ ، $\frac{d^3y}{d^3x}$ ، ...... $\frac{d^ny}{d^nx}$ هي مشتقات الدالة y من الرتب العليا إذا وجدت في مجال تعريفها.
- في الاشتقاق الضمني نوجد مشتقة المتغير المستقل x ومشتقة المتغير التابع y ثم نوجد $\frac{dy}{dx}$.

تطبيقات على الاشتقاق

Applications on Differentiation

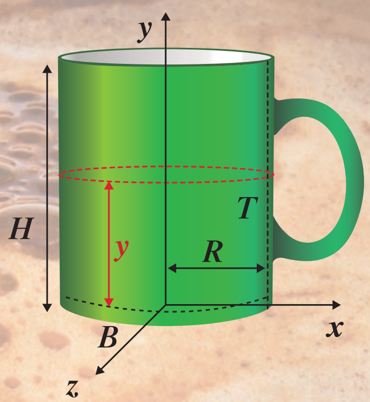
مشروع الوحدة:

1 **مقدمة المشروع:** فرضًا أنه لا يوجد مكان مخصص في إحدى السيارات لوضع كوب يحتوي على القهوة، وسوف يوضع بجانب مقعد السائق أثناء القيادة. أظهرت التجربة أن الكوب قابل للانسكاب عندما يكون مليئًا بالكامل. ويصبح أكثر ثباتًا كلما تناقصت منه القهوة.

2 **الهدف:** تحديد أقصى ارتفاع لكمية القهوة كي لا تنسكب من الكوب أثناء قيادة السيارة.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط.

4 **أسئلة حول التطبيق:**



يبيّن الرسم المقابل أن جزءًا من الكوب يحتوي على القهوة. سوف نفترض أن الكوب يكون أكثر ثباتًا عندما تكون نقطة الارتكاز المشتركة للكوب وكمية القهوة هي في أدنى ارتفاع. نقطة ارتكاز المجسم الأسطواني هي نقطته المركزية الهندسية حيث إن إحداثها الصادي $\overline{y}$ يمكن أن يعطى بالقاعدة:

$$\overline{y} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

إذا علمت أن: $m_1 = \pi\delta(R+T)^2 B$ (كتلة قاعدة الكوب) ، $y_1 = -\frac{B}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القاعدة).

$m_2 = \pi\delta(R+T)^2 H - \pi\delta R^2 H$ (كتلة جوانب الكوب) ، $y_2 = \frac{H}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز جوانب الكوب).

$m_3 = \pi\delta R^2 y$ (كتلة القهوة في الكوب) ، $y_3 = \frac{y}{2}$ (الإحداثي الصادي لنقطة ارتكاز القهوة).

a احسب قيم m_1 ، m_2 ، m_3 بدلالة B و y و H و T و R (إرشاد: $m = \delta V$ حيث δ كثافة مشتركة للقهوة والمادّة المصنوع منها الكوب).

b أوجد $\overline{y}$ بدلالة B و y و H و T و R.

c إذا كان: $H = 8\text{ cm}, R = 3\text{ cm}, T = 0.5\text{ cm}, B = 1\text{ cm}$

أثبت أن: $f(y) = \overline{y} = \frac{21.75 + y^2}{8.5 + 2y} \; ; \; 0 \leqslant y \leqslant 8$

d أثبت أنّ مشتقّة $f(y)$ هي: $f'(y) = \frac{2y^2 + 17y - 43.5}{(2y + 8.5)^2}$

y = ارتفاع مستوى القهوة في الكوب (cm)

H = ارتفاع الكوب (cm)

B = سماكة القاعدة (cm)

R = نصف قطر الدائرة الداخلية من الكوب (cm)

T = سماكة الجوانب (cm)

$R + T$ = نصف قطر الدائرة الخارجية من الكوب (cm)

5 ما القيمة المحلية الصغرى؟ فسّر.

6 **التقرير:** اكتب تقريرًا يبيّن نتائج بحثك. أشر إلى كيفية الاستفادة من مفاهيم التفاضل في عملك.

دعّم التقرير بالرسوم البيانية وبعرض على جهاز الإسقاط. طبّق ما توصلت إليه على كوبك المفضل في احتساء القهوة.

دروس الوحدة

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال	تزايد وتناقص الدوال	ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f	رسم بيان دوال كثيرات الحدود	تطبيقات على القيم القصوى
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

الوحدة الثالثة

أين أنت الآن؟ (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الدالة التربيعية: القيمة الصغرى والقيمة العظمى.
- تعرفت الرسوم البيانية لبعض الدوال الأسية واللوغاريتمية.
- مثلت النمو الأسيّ والتضاؤل الأسيّ.
- تعرفت الرسوم البيانية للدوال المثلثية.
- تعرفت الاشتقاق وقواعده.

ماذا سوف تتعلم؟

- إيجاد القيم القصوى المطلقة والقيم القصوى المحلية.
- تطبيق نظرية القيمة المتوسطة.
- تحديد تزايد وتناقص الدوال.
- اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة.
- تحديد نقاط الانعطاف.
- اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحلية.
- رسم بيان دوال كثيرات الحدود.
- تطبيقات على القيم القصوى.

المصطلحات الأساسية

قيم قصوى مطلقة – قيمة عظمى مطلقة – قيمة صغرى مطلقة – نقطة طرفية – نقطة داخلية – قيمة قصوى محلية – نقطة حرجة – نظرية القيمة المتوسطة – الدوال المتزايدة – الدوال المتناقصة – الدالة المطّردة – اختبار المشتقة الأولى – التقعر – نقاط الانعطاف – اختبار المشتقة الثانية – كثيرات الحدود.

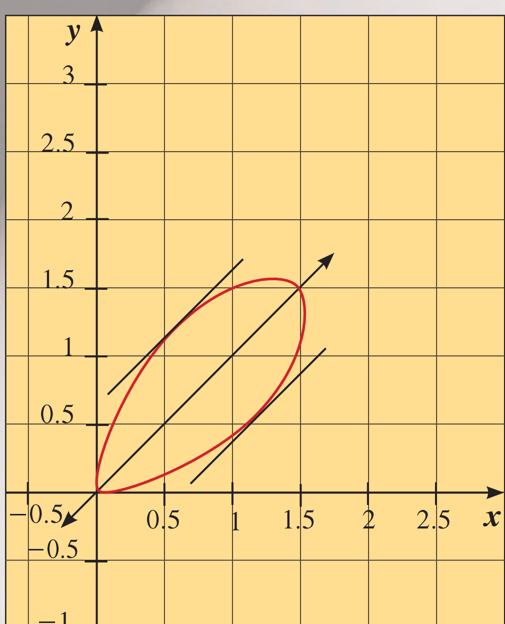
أضف إلى معلوماتك

«إذا كنت أجرؤ القول فإن مسألة تحديد خط المماس هي المسألة الأكثر فائدة وبالعموم هي أكثر ما أود معرفته».

ديكارت (1650 – 1596)

أدت الأبحاث التي قام بها العلماء في القرن السابع عشر في مختلف المجالات: علم الميكانيك والفلك والبصريات، إلى طرح مسائل المماس وحلها. منها: تحديد خط المماس في نقطة معينة، وتحديد النقطة على المنحنى حيث المماس مواز لمستقيم معين.

للشكل أدناه محور تناظر. طوّر ديكارت طريقة تسمح بتحديد النقاط حيث المماس مواز لهذا المحور.



3-1

القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

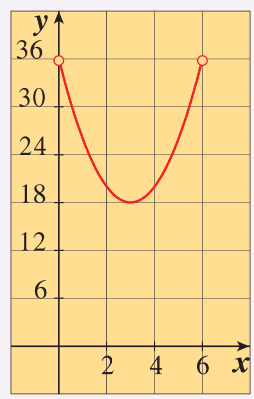
Extreme Values of Functions

سوف تتعلم

- القيم القصوى المطلقة.
- القيم القصوى المحلية.
- إيجاد القيم القصوى.

المفردات والمصطلحات

- قيمة قصوى
Extreme Value
- قيمة قصوى مطلقة
Absolute Extreme Value
- قيمة عظمى مطلقة
Absolute Maximum Value
- قيمة صغرى مطلقة
Absolute Minimum Value
- قيمة قصوى محلية
Local Extreme Value
- نقطة حرجة
Critical Point

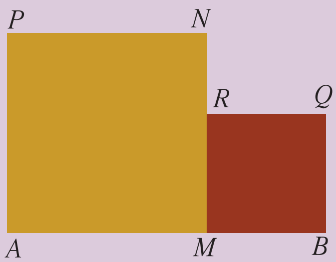


شكل (1)
بيان الدالة S

دعنا نفكر ونتناقش

في الشكل المقابل $MBQR$; $AMNP$ مربعان فيهما $AB = 6\,\text{cm}$ ، $M \in \overline{AB}$ ، $AM = x$.

نريد معرفة موقع M بحيث يكون مجموع مساحتي المربعين أصغر ما يمكن.



1. أوجد مساحة كلّ من المربعين.
2. a ماذا تمثل $S(x) = 2x^2 - 12x + 36$ ؟
   b أكمل الجدول:

x	0	1	2	3	4	5	6
$S(x)$							

   c لأي قيمة للمتغير x في الجدول تكون قيمة $S(x)$ الأصغر؟
3. a أثبت أن $S(x) - S(3) \geqslant 0$ لكل قيم x على الفترة $(0\ ,\ 6)$.
   b استنتج موقع M.

القيم القصوى Extreme Values

الشكل (1) يمثل بيان الدالة S من «دعنا نفكر ونتناقش».

ويتضح أن للدالة S قيمة صغرى عند $x = 3$ وتسمى أيضًا **قيمة قصوى** وفي هذه الحالة $S(x) \geq S(3)$ لكل x تنتمي إلى مجال S.

في هذا الدرس سنتعرف على القيم القصوى والتي يمكن أن تكون القيمة الأصغر أو القيمة الأكبر للدالة مستعينين بدراسة إشارة مشتقة الدالة.

تعريف (1): القيم القصوى المطلقة

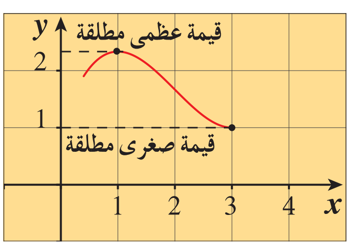
إذا كانت f دالّة مجالها D، $c \in D$، فإن $f(c)$ تسمى:

a قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \geqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$

b قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما:

$$f(c) \leqslant f(x) \quad , \quad \forall x \in D_f$$



شكل (2)

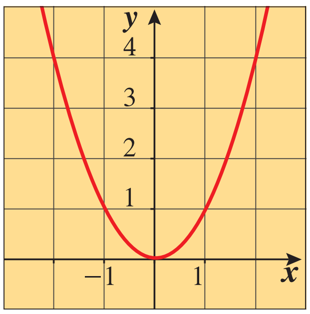
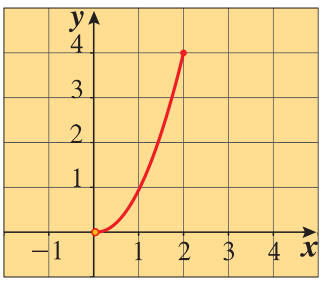
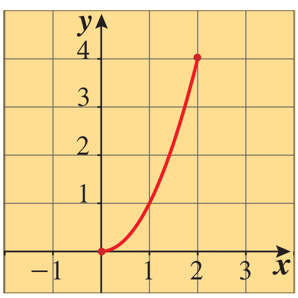
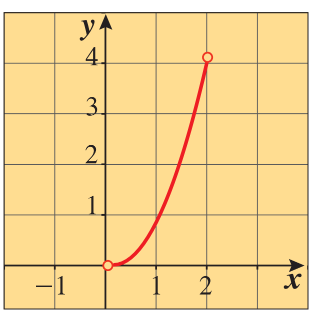
- القيم العظمى المطلقة والقيم الصغرى المطلقة تسمّى القيم **القصوى المطلقة**.
- تسمى القيم القصوى المطلقة **بالقيم القصوى** أي أننا نكتفي بالقول قيمة عظمى أو قيمة صغرى. قد يكون للدالة قيم قصوى مختلفة وذلك بحسب مجالها.

مثال (1)

لتكن الدالة: $f: D \longrightarrow \mathbb{R}$ حيث $f(x) = x^2$ ، أوجد إن أمكن القيم القصوى للدالة f مع رسم بيانها عندما:

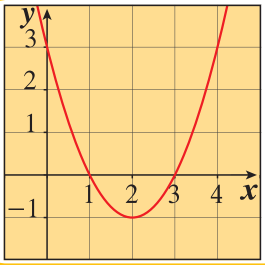
a $D = (-\infty, \infty)$ **b** $D = (0, 2]$ **c** $D = [0, 2]$ **d** $D = (0, 2)$

الحل:

	القيم القصوى المطلقة للدالة f على D	المجال D	بيان الدالة: $f(x) = x^2$
a	لا توجد قيمة عظمى مطلقة. توجد قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$	$(-\infty, \infty)$	$y = x^2$ 
b	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ لا توجد قيمة صغرى مطلقة.	$(0, 2]$	$y = x^2$ 
c	توجد قيمة عظمى مطلقة تساوي 4 عند $x = 2$ قيمة صغرى مطلقة تساوي 0 عند $x = 0$	$[0, 2]$	$y = x^2$ 
d	لا توجد قيم قصوى مطلقة.	$(0, 2)$	$y = x^2$ 

حاول أن تحل

1 الشكل يمثّل بيان $y = x^2 - 4x + 3$. أوجد القيم القصوى للدالة على المجالات التالية:



a $(-\infty, \infty)$ **b** $[2, 3]$ **c** $(1, 3)$ **d** $[3, 4)$

يتّضح مما سبق أنّ الدالّة قد لا تكون لها قيمة عظمى أو قيمة صغرى. وهذا لا يحدث مع الدوالّ المتصلة على فترات مغلقة.

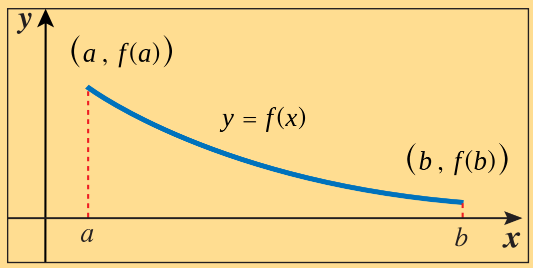
نظريّة (1): نظرية القيمة القصوى

إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a, b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

ملاحظة: لتكن الدالة f معرفة على $[a, b]$ ، $c \in (a, b)$ فإننا نسمي:

1. $(b, f(b))$ ، $(a, f(a))$ **نقاط طرفية.**
2. $(c, f(c))$ **نقطة داخلية.**

الأشكال التالية تمثّل بعض الحالات لقيم عظمى وقيم صغرى لدوال متّصلة على فترات مغلقة $[a, b]$:

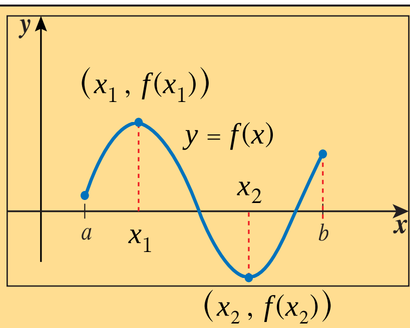


شكل (4)

للدالة قيمة عظمى $f(a)$ عند $x = a$

وللدالة قيمة صغرى $f(b)$ عند $x = b$

وهذه القيم عند نقاط طرفية

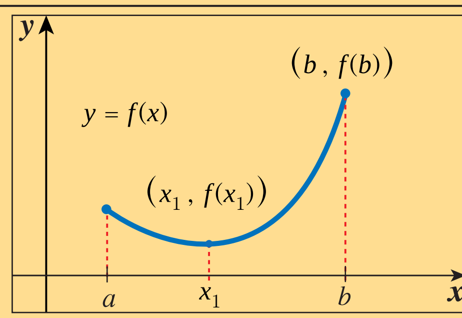


شكل (3)

للدالة قيمة عظمى $f(x_1)$ عند $x = x_1$

وللدالة قيمة صغرى $f(x_2)$ عند $x = x_2$

وهذه القيم عند نقاط داخلية



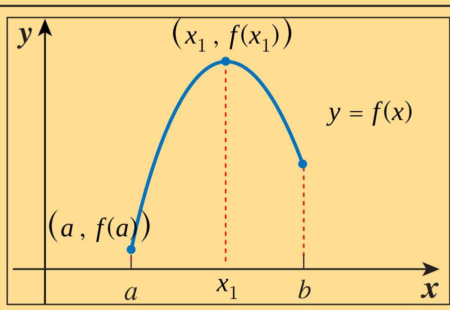
شكل (6)

للدالة قيمة عظمى $f(b)$ عند $x = b$

وللدالة قيمة صغرى $f(x_1)$ عند $x = x_1$

القيمة العظمى عند نقطة طرفية

والقيمة الصغرى عند نقطة داخلية.



شكل (5)

للدالة قيمة عظمى $f(x_1)$ عند $x = x_1$

وللدالة قيمة صغرى $f(a)$ عند $x = a$

القيمة العظمى عند نقطة داخلية

والقيمة الصغرى عند نقطة طرفية.

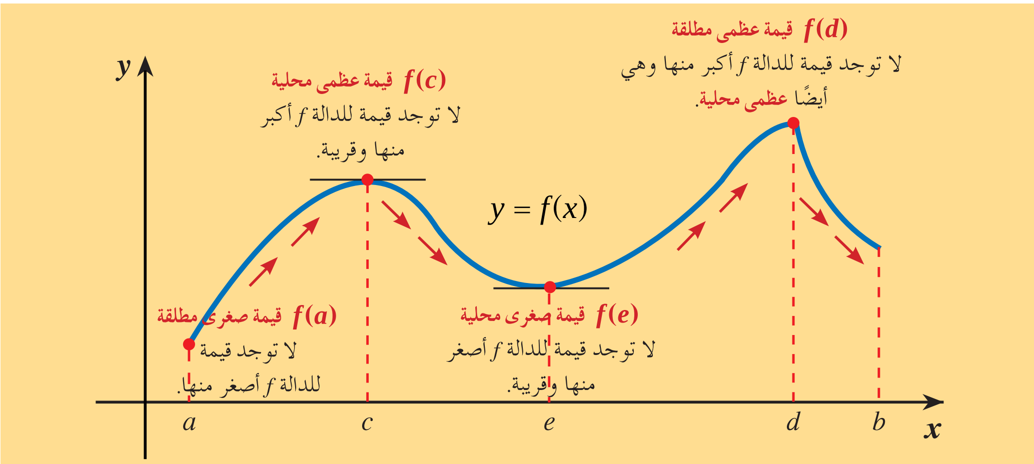
القيم القصوى المحلية Local Extreme Values

تعريف (2): القيم القصوى المحليّة

لتكن $(c\,,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c، تكون $f(c)$:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D \quad , \quad f(c) \leqslant f(x)$



شكل (7)

يبيّن الشكل (7) رسمًا بيانيًّا له أربع نقاط حيث الدالّة عندها **قيم قصوى** على مجالها $[a\,,b]$.
تقع **القيمة الصغرى المطلقة** للدالّة عند a وهي $f(a)$، في حين أنّ قيمة الدالّة عند e أصغر من أي قيمة قريبة منها سواء من جهة اليمين أو اليسار ولذلك تسمى **قيمة صغرى محلية**.
يرتفع المنحنى ناحية اليسار وينخفض ناحية اليمين حول النقطة c، محدثًا **قيمة عظمى محليّة** قدرها $f(c)$ في حين أن الدالّة لها **قيمة عظمى مطلقة** عند d.
نقاط المجال الداخليّة التي تكون المشتقة عندها تساوي الصفر أو المشتقة عندها ليست موجودة. سنطلق عليها تسمية خاصة كما في التعريف التالي:

معلومة:
الدالة الثابتة على الفترة $[a\,,b]$ لها قيمة قصوى مطلقة واحدة فقط.
أي أن القيمة العظمى تساوي القيمة الصغرى.

تعريف (3): النقطة الحرجة Critical Point

النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\,,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

ملاحظة: يسمى العدد c العدد الحرج.

تذكر:
تكون $f'(c)$ غير موجودة إذا كان للدالة f عند c ركن أو ناب أو مماس رأسي.

مثال (2)

أوجد النقاط الحرجة لكلّ من الدوال المتصلة التالية:

a $g(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

b $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x<1 \\ 3x-1 & , \quad x \geqslant 1 \end{cases}$

الحل:

a g دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$.

$$g'(x) = 3x^2 - 6x$$

نضع $g'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x-2) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = 2$$

$$g(0) = 5 \quad , \quad g(2) = (2)^3 - 3(2)^2 + 5 = 1$$

$\therefore$ النقطتان $(2\,,1)$, $(0\,,5)$ نقطتان حرجتان للدالة g على مجالها

b

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & : \quad x < 1 \\ \text{تبحث} & : \quad x = 1 \\ 3 & : \quad x > 1 \end{cases}$$

$$f(1) = 3(1) - 1 = 2$$

نبحث الاشتقاق عند $x = 1$

إن وجدت

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'_-(1) = \lim_{h \to 0^-} \frac{(1+h)^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{1 + 2h + h^2 + 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} \frac{\cancel{h}^{1}(2+h)}{\cancel{h}_{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0^-} (2+h) = 2$$

$$\therefore \quad f'_-(1) = 2$$

إن وجدت

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h}$$

$$f'_+(1) = \lim_{h \to 0^+} \frac{3(1+h) - 1 - 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3 + 3h - 3}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} \frac{3\cancel{h}^{1}}{\cancel{h}_{1}}$$

$$= \lim_{h \to 0^+} 3 = 3$$

$$\therefore \quad f'_+(1) = 3$$

$$\because \quad f'_-(1) \neq f'_+(1)$$

$\therefore$ $f'(1)$ ليست موجودة.

$\therefore$ النقطة $(1,2)$ نقطة حرجة.

$$f'(x) = 3 \quad , \quad x > 1$$

$$\therefore \forall x \in (1 , \infty) \Longrightarrow f'(x) \neq 0$$

$\therefore$ لا توجد نقاط حرجة على هذه الفترة.

$$f'(x) = 2x \quad : \quad x < 1$$

$$2x = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad \in (-\infty , 1)$$

للدالة نقطة حرجة عند $x = 0$

$$f(0) = (0)^2 + 1 = 1$$

$\therefore$ النقطة $(0,1)$ نقطة حرجة.

حاول أن تحل

2 أوجد النقاط الحرجة لكل من الدوال المتصلة التالية:

a $f(x) = x^4 - 4x^3 - 8x^2 + 10$

b $f(x) = |x - 5|$

تذكر:
إذا كانت الدالة f لها مشتقة عند نقطة فإنها تكون متصلة عند هذه النقطة.

وبالعودة إلى الشكل (7) السابق نجد أن النقاط الحرجة تكون عند $x = e$, $x = c$ لأن المشتقة عند كل منهما تساوي الصفر (لماذا؟)

وكذلك توجد نقطة حرجة عند $x = d$ لأن المشتقة عندها ليست موجودة (لماذا؟)

نظرية (2): القيم القصوى المحلية (Fermat's Theorem)

إذا كانت للدالة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محلية عند $x = c$ فإنّ $(c , f(c))$ نقطة حرجة.

إذا كانت $(c , f(c))$ نقطة حرجة للدالة f فليس بالضرورة أن تكون $f(c)$ قيمة قصوى محلية

فمثلًا الدالة $f(x) = x^3$ لها نقطة حرجة عند $x = 0$ ولكن $f(0)$ ليست قيمة قصوى محلية.

خطوات إيجاد القيم القصوى المطلقة للدالة f المتصلة على الفترة $[a , b]$

تعلمت كيفية إيجاد النقاط القصوى المطلقة للدالة f من خلال التمثيل البياني لها وتطبيق تعريف (1) عليها.

والآن سنعرض خطوات إيجادها جبريًّا على $[a , b]$:

1 إيجاد قيم الدالة عند النقاط الطرفية: $x = b$, $x = a$

2 إيجاد النقاط الحرجة للدالة f في الفترة (a , b) إن وجدت.

3 أكبر قيمة للدالة في الخطوتين 2 , 1 هي قيمة عظمى مطلقة في $[a , b]$ وأصغر قيمة للدالة هي قيمة صغرى مطلقة في $[a , b]$.

مثال (3)

أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة المتصلة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[0, 3]$.

الحل:

$\because$ الدالة f متصلة على $[0, 3]$.

$\therefore$ الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة في الفترة $[0, 3]$.

نوجد قيم الدالة عند النقاط الطرفية $x = 3$ ، $x = 0$

$f(0) = (0)^3 - 3(0) + 1 = 1$

$f(3) = (3)^3 - 3(3) + 1 = 19$

$f(x) = x^3 - 3x + 1$

$f'(x) = 3x^2 - 3$

نضع $f'(x) = 0$

$3x^2 - 3 = 0 \Rightarrow 3x^2 = 3$

$x^2 = 1$

$\therefore\ x = 1 \quad , \quad 1 \in (0, 3)$

$x = -1 \quad , \quad -1 \notin (0, 3)$

$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 1 = 1 - 3 + 1 = -1$

$\therefore$ $(1\ ,\ -1)$ نقطة حرجة.

x	0	1	3
$f(x)$	1	-1	19

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي 19

$\therefore$ 19 قيمة عظمى مطلقة.

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[0, 3]$ هي -1

$\therefore$ -1 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

3 أوجد القيم القصوى المطلقة للدالّة f : $f(x) = x^3 - 3x + 1$ في الفترة $[-2, 1]$.

مثال (4)

أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة المتصلة f : $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ في الفترة $[-2, 3]$

الحل:

∵ الدالة f متصلة على $[-2, 3]$.

∴ الدالة f لها قيمة عظمى مطلقة ولها قيمة صغرى مطلقة على الفترة $[-2, 3]$.

نوجد قيم الدالة عند $x = 3$, $x = -2$

$$f(-2) = (-2)^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{(-2)^2} = \sqrt[3]{4}$$

$$\approx 1.587$$

$$f(3) = 3^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{3^2} = \sqrt[3]{9}$$

$$\approx 2.08$$

$$f'(x) = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}$$

لاحظ أن $f'(x) \neq 0$ ولكن

عند $x = 0$ المشتقة ليست موجودة، $f(0) = 0$

∴ $(0, 0)$ نقطة حرجة.

x	-2	0	3
$f(x)$	1.587	0	2.08

من الجدول:

أكبر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي $3^{\frac{2}{3}}$

∴ $3^{\frac{2}{3}}$ قيمة عظمى مطلقة.

أصغر قيمة للدالة f في الفترة $[-2, 3]$ هي 0

∴ 0 قيمة صغرى مطلقة.

حاول أن تحل

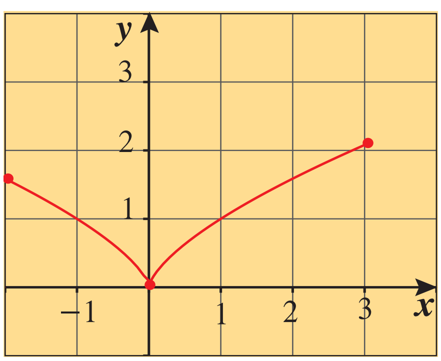
4 أوجد القيم العظمى والصغرى المطلقة للدالة: $f(x) = \frac{1}{x^2}$ في الفترة $[1, 3]$

الشكل (8) يوضّح التمثيل البياني للدالة f في مثال (4).

نلاحظ أن:

f لها قيمة عظمى مطلقة 2.08 تقريبًا عند $x = 3$

ولها قيمة صغرى مطلقة هي صفر عند $x = 0$



شكل (8)

مثال (5)

لتكن f : $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + 5 \quad , \quad a \, , b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كلّ من: $x = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \, , b$

الحل: $\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f متصلة وقابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 3x^2 + 2ax + b$$

$\because$ للدالة قيم قصوى محلية عند $x = \frac{1}{3} \quad , \quad x = 1$

$\therefore$ توجد نقاط حرجة للدالة عندهما وبالتالي:

$$f'(1) = 0 \quad , \quad f'\left(\frac{1}{3}\right) = 0$$

نحصل على المعادلتين الآتيتين:

$$\begin{cases} 3(1)^2 + 2a(1) + b = 0 \\ 3\left(\frac{1}{3}\right)^2 + 2a\left(\frac{1}{3}\right) + b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2a + b = -3 \\ \frac{2}{3}a + b = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

استخدم الآلة الحاسبة العلمية لإيجاد الحل

$$a = -2 \quad , \quad b = 1$$

حاول أن تحل

5 لتكن f : $f(x) = 2x^3 + ax^2 + bx + 1 \quad , \quad a , b \in \mathbb{R}$

وكان للدالة قيمة قصوى محلية عند كل من: $x = 2 \quad , \quad x = -1$

أوجد قيمة كل من الثابتين $a \, , b$

الربط بالتكنولوجيا:

خطوات الحل المستخدمة لحل معادلتين آنيتين بمتغيرين بالحاسبة.

اضغط المفتاح Mode يظهر على الشاشة 8 خيارات لبرامج مستخدمة،

اختر البرنامج: 5:EQN

فيظهر على الشاشة 4 صيغ لمعادلات:

اختر الصيغة:

$1: a_n x + b_n y = c_n$

فيظهر على الشاشة المصفوفة:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \end{array}\begin{bmatrix} a\square & b\square & c\square \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

اكتب كلًّا من المعادلتين على الشكل التالي:

$ax + by = c$

املأ المربعات في السطر الأول بمعامل x يليه = ثم معامل y يليه = ثم قيمة c يليه = .

كرر العملية في السطر الثاني.

اضغط الآن على المفتاح = تظهر قيمة x (المجهول الأول)

اضغط ثانية على المفتاح = تظهر قيمة y (المجهول الثاني)

ملاحظة:

يمكنك كذلك حل المعادلتين الآنيتين باستخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض.

3–2

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

سوف تتعلم

- نظرية القيمة المتوسطة.
- تزايد وتناقص الدوال.
- الدوال المطردة.
- الدالة الثابتة.

المفردات والمصطلحات

- نظرية القيمة المتوسطة
Mean Value Theorem
- الدوال المتزايدة
Increasing Functions
- الدوال المتناقصة
Decreasing Functions
- الدالة المطرّدة
Monotonic Function

معلومة:

إن تسارع سيارة من سكون لتقطع مسافة $120\ m$ يستغرق $8\ s$ يبلغ معدل سرعة السيارة خلال هذه الفترة الزمنية

$\frac{120}{8} = 15\ m/s$

أي $54\ km/h$

تفيد نظرية القيمة المتوسطة أنه خلال انطلاق السيارة وفي نقطة ما محددة على المسار يجب أن يشير عداد السرعة إلى $54\ km/h$

دعنا نفكر ونتناقش

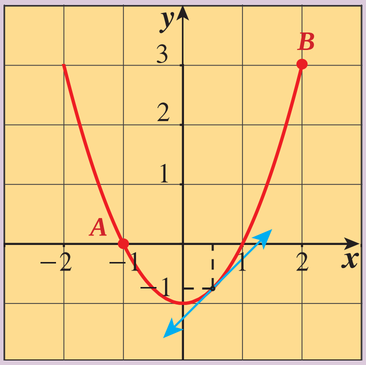
إذا كانت $f(x) = x^2 - 1$ فأجب عمّا يلي:

1 ارسم المستقيم المار بالنقطتين $A(-1, f(-1))$, $B(2, f(2))$ ثم أوجد الميل $m(\overleftrightarrow{AB})$.

2 هل الدالة f متصلة على $[-1, 2]$؟
وهل f قابلة للاشتقاق على الفترة $(-1, 2)$؟

3 أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x = \frac{1}{2}$
$\left(\text{لاحظ أن } \frac{1}{2} \in (-1, 2)\right)$

4 استنتج العلاقة بين **3** , **1** .



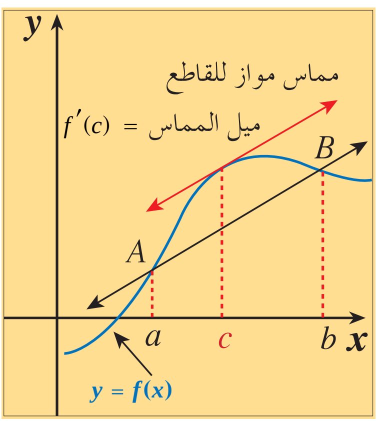
نظريّة القيمة المتوسّطة Mean Value Theorem

تربط نظريّة القيمة المتوسّطة بين متوسّط معدل تغيّر دالّة على فترة ما، ومعدّل التغيّر للدالّة عند نقطة تنتمي إلى هذه الفترة.

تكمن نتائجها القويّة في صميم بعض التطبيقات الكثيرة الأهميّة في علم حساب التفاضل والتكامل.

تقول النظريّة إنّه في مكان ما بين نقطتين A , B على منحنى دالة قابلة للاشتقاق، يوجد **على الأقل** خطّ مماسّ واحد يوازي قاطع المنحنى $\overleftrightarrow{AB}$ (كما في الشكل (1)).

$$m(\overleftrightarrow{AB}) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$



شكل (1)

نظريّة (3): نظريّة القيمة المتوسّطة

إذا كانت f دالّة:

1 متّصلة على الفترة $[a , b]$

2 قابلة للاشتقاق على الفترة (a , b)

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a , b)$ بحيث $f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$

شروط نظرية القيمة المتوسطة كافية وليست لازمة، أي أنه إذا توفرت الشروط فبالتأكيد يوجد c الذي تنبئ به النظرية وعدم تحقق أحد الشرطين لا يعني بالضرورة عدم وجود c والملاحظات التالية توضح ذلك.

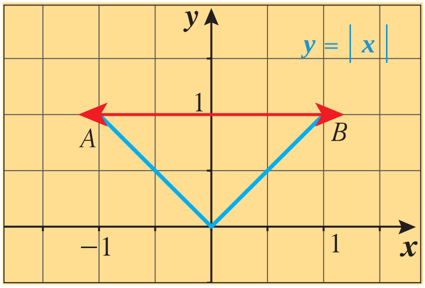
ملاحظات:

1 إذا لم يتحقق أحد شرطي النظرية (3) فإنه **قد لا يكون** لبيان الدالة مماسّ موازٍ للقاطع $\overleftrightarrow{AB}$.

فمثلًا، $f(x) = |x|$ دالة متصلة على الفترة $[-1\ ,\ 1]$

وقابلة للاشتقاق عند كل x تنتمي إلى $(-1,1)$ باستثناء عند $x = 0$.

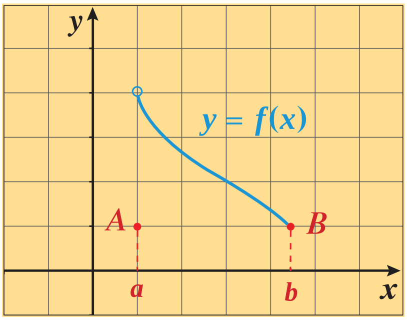
بيان الدالة ليس له مماسّ يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ (شكل 2).



شكل (2)

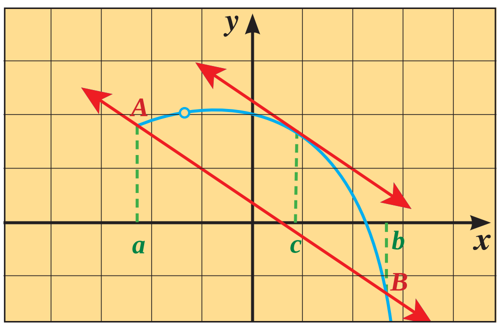
2 يبيّن شكل (3) بيان دالّة f قابلة للاشتقاق عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$ ومتّصلة على الفترة $[a\ ,b)$.

ولكن لا يوجد مماس يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.



شكل (3)

3 بيان الدالة في الشكل (4) يبيّن نقطة انفصال وبالرغم من عدم توفر شرط من شروط نظرية القيمة المتوسطة إلّا أنه يوجد مماس للمنحنى عند c يوازي $\overleftrightarrow{AB}$.



شكل (4)

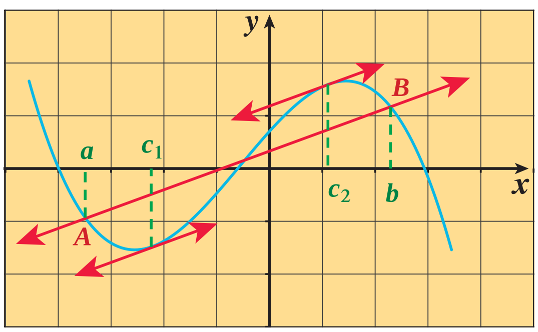
4 يمكن إيجاد أكثر من نقطة واحدة بحيث

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a} \quad , \quad c \in (a\ ,b)$$

أي أن المماس عند كل من النقاط

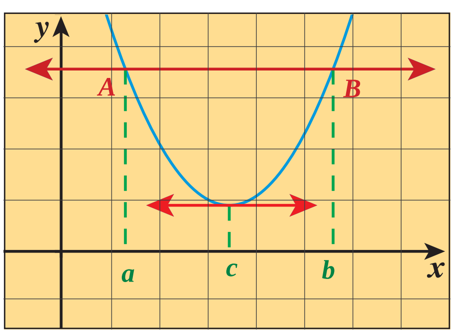
$$(c_1\ ,\ f(c_1))\ ,\ (c_2\ ,\ f(c_2))$$

يوازي $\overleftrightarrow{AB}$ كما في الشكل (5).



شكل (5)

5 في نظرية القيمة المتوسطة إذا كان $f(a) = f(b)$ فإن $f'(c) = 0$ أي أن المماس للمنحنى عند c يوازي القاطع ويوازي محور السينات أي أن المماس أفقي كما في الشكل (6).



شكل (6)

مثال (1)

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 2]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدّالة f : $f(x) = x^2$ دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متصلة على الفترة $[0, 2]$، وقابلة للاشتقاق على $(0, 2)$.

$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[0, 2]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (0 , 2)$ بحيث:

نظرية القيمة المتوسطة

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$\because \quad f(0) = (0)^2 = 0 \quad , \quad f(2) = 2^2 = 4$$

$$f'(x) = 2x \quad , \quad f'(c) = 2c$$

$$\therefore \; 2c = \frac{f(2) - f(0)}{2 - 0}$$

$$2c = \frac{4 - 0}{2 - 0}$$

$$2c = 2$$

$$c = 1 \in (0 , 2)$$

التفسير:

يوجد مماس لمنحنى الدالّة f عند $x = 1$ يوازي القاطع المار بالنقطتين $(2 , 4)$, $(0 , 0)$

حاول أن تحل

1 بيّن أن الدالّة $f(x) = x^2 + 2x$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسّطة على الفترة $[-3 , 1]$، ثم أوجد قيمة c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

مثال (2)

بيّن أن الدالّة f : $f(x) = x^3 + 1$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[-3 , 3]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

الحل:

الدالّة f دالة كثيرة حدود متصلة على $\mathbb{R}$ فهي متّصلة على الفترة $[-3 , 3]$ وقابلة للاشتقاق على الفترة $(-3 , 3)$.

$\therefore$ شروط نظريّة القيمة المتوسّطة محققة على الفترة $[-3 , 3]$.

$\therefore$ يوجد على الأقل $c \in (-3 , 3)$ بحيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

$$= \frac{f(3) - f(-3)}{3 - (-3)}$$

$$\because \quad f(-3) = (-3)^3 + 1 = -26 \quad , \quad f(3) = 3^3 + 1 = 28$$

$$f'(x) = 3x^2 \quad , \quad f'(c) = 3c^2$$

$$\therefore \ 3c^2 = \frac{f(3) - f(-3)}{3-(-3)}$$

$$3c^2 = \frac{28-(-26)}{3+3} = \frac{54}{6} = 9$$

$$c^2 = \frac{9}{3} = 3$$

$$c = \sqrt{3} \ \in (-3, 3) \quad , \quad c = -\sqrt{3} \ \in (-3, 3)$$

التفسير:

يوجد مماسان لمنحنى الدالة f عند: $x = -\sqrt{3} \quad , \quad x = \sqrt{3}$

والمماسان يوازيان القاطع المار بالنقطتين: $(-3\ ,\ -26) \quad , \quad (3\ ,\ 28)$

حاول أن تحل

2 بيّن أن الدالّة f: $f(x) = x^3 - 3x + 2$ تحقّق شروط نظرية القيمة المتوسطة على الفترة $[0, 4]$، ثم أوجد c الذي تنبئ به النظرية وفسّر إجابتك.

تزايد وتناقص الدوال Increasing and Decreasing Functions

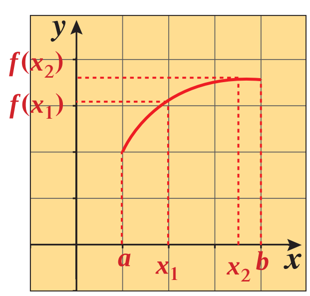
تعريف (4): تزايد وتناقص الدوال

لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:

1 f دالّة متزايدة على I إذا كان: $\forall x_1 \ , \ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

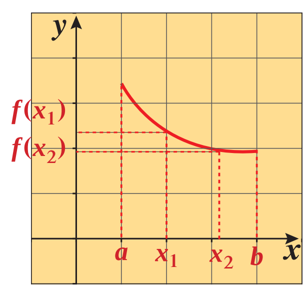
2 f دالّة متناقصة على I إذا كان: $\forall x_1 \ , \ x_2 \in I \quad , \quad x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$

ملاحظة: تكون الدالة f ثابتة على الفترة I عندما: $\forall x_1 \ , \ x_2 \in I \ , \ f(x_1) = f(x_2)$



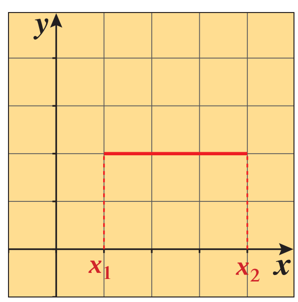
شكل (7)

دالة متزايدة



شكل (8)

دالة متناقصة



شكل (9)

دالة ثابتة

الدالّة المطّردة Monotonic Function

الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

تمكّننا نظرية القيمة المتوسطة من تحديد أين تتزايد الدوال وأين تتناقص بالضبط.
الدوالّ التي مشتقّاتها موجبة تكون دوالّ متزايدة، والدوالّ التي مشتقّاتها سالبة تكون دوالّ متناقصة.
ويتضح ذلك من خلال النظرية التالية:

نظرية (4): الدوالّ المتزايدة والدوالّ المتناقصة والدوال الثابتة

لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على (a , b).

1. **إذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتزايد على (a , b).**
2. **إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ f تتناقص على (a , b).**
3. **إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة (a , b)، فإنّ الدالة f ثابتة على (a , b).**

مثال (3)

أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = x^2 - 5x + 6$

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد مشتقة الدالة f : $f'(x) = 2x - 5$

نضع $f'(x) = 0$

$$2x - 5 = 0 \Longrightarrow x = \frac{5}{2}$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

$-\infty$ ، $\frac{5}{2}$ ، ∞

الفترات	$\left(-\infty , \frac{5}{2}\right)$	$\left(\frac{5}{2} , \infty\right)$
إشارة f'	$--$	$++$
سلوك الدالة f	↘↘	↗↗

من الجدول:

f متناقصة على الفترة $\left(-\infty , \frac{5}{2}\right)$

f متزايدة على الفترة $\left(\frac{5}{2} , \infty\right)$

حاول أن تحل

3. أوجد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = -x^2 + 4x - 3$

مثال (4)

لتكن f: $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x + 1$

حدّد الفترات حيث تكون f متزايدة والفترات حيث تكون f متناقصة.

الحل:

الدالة f كثيرة حدود فهي متصلة على $\mathbb{R}$

نوجد أولًا مشتقة الدالة:

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 9$$

نضع $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 6x - 9 = 0$$

$$3(x+1)(x-3) = 0$$

$$x = -1 \quad , \quad x = 3$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

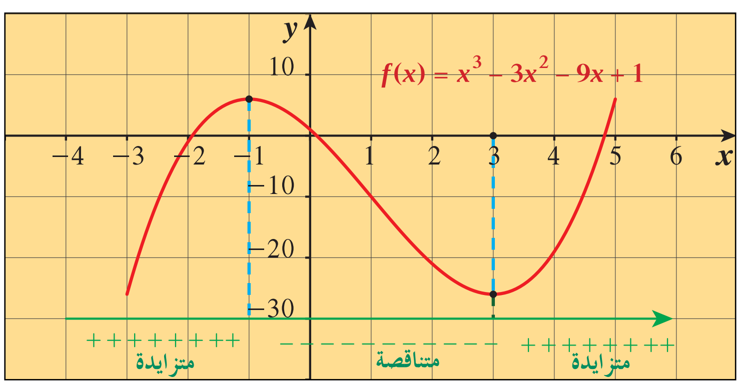
	$-\infty$	-1	3 ∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	$++$	$--$	$++$
سلوك الدالة f	↗	↘	↗

من الجدول: الدالة f متزايدة على كلّ من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(3, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1, 3)$

حاول أن تحل

4 إذا كانت f : $f(x) = x^3 - 6x$. حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

الشكل (10) يمثّل بيان الدالة f في مثال (4) السابق.



شكل (10)

بيان الدالة يوضّح فترات التزايد وفترات التناقص.

مثال (5)

إذا كانت f الدالة: $f(x) = \dfrac{x^2}{x-1}$.

حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.

الحل:

الدالة f حدودية نسبية فهي متصلة لكل x حيث $x \in \mathbb{R} - \{1\}$

نوجد مشتقة الدالة

$$f'(x) = \frac{2x(x-1) - 1(x)^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{2x^2 - 2x - x^2}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x(x-2)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{x(x-2)}{(x-1)^2} = 0$$

$$\Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 2$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'

الفترات	$(-\infty , 0)$	$(0 , 1)$	$(1 , 2)$	$(2 , \infty)$
إشارة f'	+	−	−	+
سلوك الدالة f	↗	↘	↘	↗

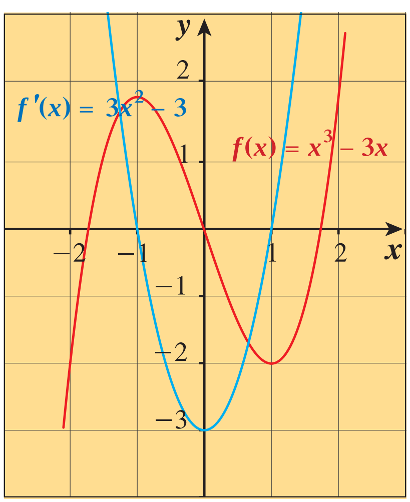
غير معرفة

من الجدول f متزايدة على كل من الفترة $(-\infty , 0)$ والفترة $(2 , \infty)$ ومتناقصة على كل من الفترة $(0 , 1)$ والفترة $(1 , 2)$

حاول أن تحل

5 حدّد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة f : $f(x) = \dfrac{x^2}{2x-1}$

نشاط



الشكل المقابل يوضّح بيان الدالة f وبيان مشتقتها f'

أكمل ما يلي:

في الفترة $(-\infty , -1)$ الدالة f متزايدة ومنحنى الدالة f' يقع أعلى محور السينات أي أن $f'(x)$ موجبة $\forall x \in (-\infty , -1)$

في الفترة $(-1 , 1)$ الدالة f .... ومنحنى f' يقع ....

أي أن ....

في الفترة $(1 , \infty)$ الدالة f .... ومنحنى الدالة f' يقع ....

أي أن ....

ربط المشتقة الأولى f' والمشتقة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

سوف تتعلم

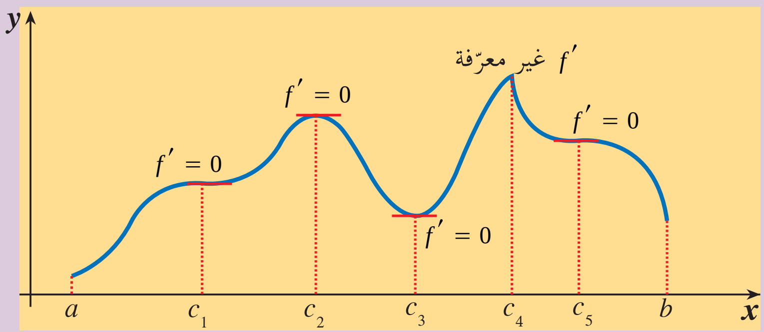
- اختبار المشتقة الأولى لتحديد القيم القصوى المحلية.
- تحديد تقعر منحنى الدالة باستخدام المشتقة الثانية أو الرسم البياني.
- تحديد نقاط الانعطاف بدراسة المشتقة الثانية.
- اختبار المشتقة الثانية لتحديد القيم القصوى المحلية.

المفردات والمصطلحات

- قيمة قصوى محلية Local Extrema
- اختبار المشتقة الأولى First Derivative Test
- نقطة طرفية End Point
- التقعر Concavity
- نقاط الانعطاف Points of Inflection
- اختبار المشتقة الثانية Second Derivative Test

دعنا نفكر ونتناقش

انظر إلى بيان الدالة في الشكل أدناه، ثمّ ضع علامة (✓) لكل فقرة مناسبة في الجدول أدناه:



الفترة (المجال)	قيمة صغرى مطلقة	قيمة عظمى مطلقة	قيمة صغرى محلية	قيمة عظمى محلية	تزايد في فترة	تناقص في فترة
$[a, c_2]$						
$[c_1, c_3)$						
$[c_2, c_3)$						
$[c_3, c_5)$						
$[c_1, c_4]$						
$[c_5, b]$						

ملاحظة:

- $f' > 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ موجبة لكل قيم x
- $f' < 0$ تعني أن قيم $f'(x)$ سالبة لكل قيم x

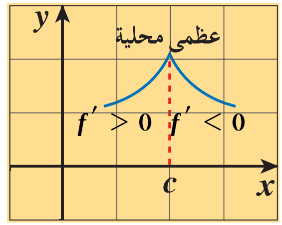
نظريّة (5): اختبار المشتقة الأولى للقيم القصوى المحليّة

لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c, f(c))$ نقطة حرجة.

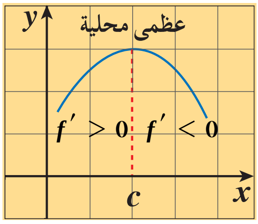
1. إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.
2. إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x = c$ ، فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.
3. إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ ، فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.

الأشكال التالية توضح بيان دالة f وتوضح نظرية (5) من خلالها.

1

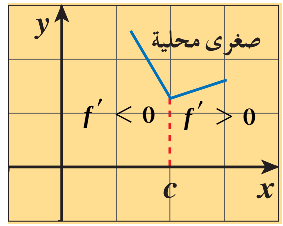


b $f'(c)$ غير موجودة

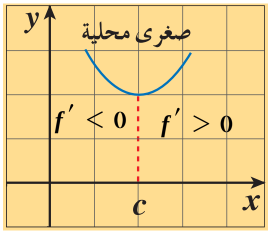


a $f'(c) = 0$

2

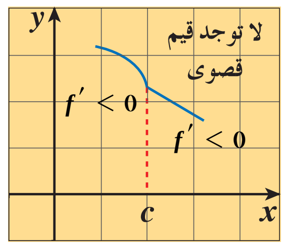


b $f'(c)$ غير موجودة

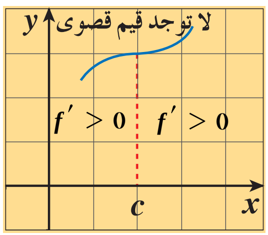


a $f'(c) = 0$

3



b $f'(c)$ غير موجودة



a $f'(c) = 0$

شكل (1)

هنا نبيّن كيف نطبّق اختبار المشتقّة الأولى لإيجاد القيم القصوى المحليّة لدالّة.
والأعداد الحرجة لدالّة f تجزّئ محور السينات إلى فترات تكون فيها f' موجبة أو سالبة. نحدّد إشارة f' على كلّ فترة بإيجاد قيمة f' لقيمة واحدة x على الفترة، ثم نطبّق نظريّة (5) كما في المثالين (1) و(2) التاليين:

مثال (1)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x^3 - 12x - 5$

أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون الدالّة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

الحل:

a ∵ f دالة كثيرة حدود.

∴ f متّصلة وقابلة للاشتقاق عند كل x : $x \in \mathbb{R}$،

توجد النقاط الحرجة فقط عند أصفار مشتقّة الدالّة f'.

$f'(x) = 3x^2 - 12$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3x^2 - 12 = 0 \Longrightarrow 3(x-2)(x+2) = 0$$

$$x = -2 \quad , \quad x = 2$$

∴ النقاط الحرجة هي:

$$(-2\,,\,f(-2)) = (-2\,,11)$$

$$(2\,,\,f(2)) = (2\,,-21)$$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

الفترات	$(-\infty\,,-2)$	$(-2\,,2)$	$(2\,,\infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$
سلوك الدالّة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗

نلاحظ من الجدول: الدالّة متزايدة على الفترة $(-\infty\,,-2)$ والفترة $(2\,,\infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-2\,,2)$.

c نستطيع أن نلاحظ من الجدول أنّه توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$، وقيمة صغرى محليّة عند $x = 2$.

القيمة العظمى المحليّة هي $f(-2) = 11$ ، والقيمة الصغرى المحليّة هي $f(2) = -21$.

حاول أن تحل

1 لتكن الدالّة f : $f(x) = -x^3 + 3x^2 - 4$. أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالة.

b الفترات التي تكون الدالة f متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحلية.

مثال (2)

لتكن الدالّة f : $f(x) = x - 3 + \dfrac{4}{x-1}$

فأوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة للدالّة.

b الفترات التي تكون عليها الدالّة f متزايدة وتلك التي تكون عليها متناقصة.

c القيم القصوى المحليّة.

الحل:

a ∵ f مجموع دالتين إحداهما كثيرة حدود والأخرى حدودية نسبية

∴ مجال الدالة f هو $\mathbb{R} - \{1\}$

∴ f متصلة وقابلة للاشتقاق على كل من الفترتين من مجالها $(-\infty\,,1) \cup (1\,,\infty)$

$$f'(x) = 1 - \frac{4}{(x-1)^2} = \frac{(x-1)^2 - 4}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-1-2)(x-1+2)}{(x-1)^2}$$
$$= \frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2}$$

نضع $f'(x) = 0$

$$\frac{(x-3)(x+1)}{(x-1)^2} = 0$$
$$(x-3)(x+1) = 0$$
$$x = 3 \quad , \quad x = -1$$

∴ النقاط الحرجة هي
$$(3, f(3)) = (3, 2)$$
$$(-1, f(-1)) = (-1, -6)$$

b نكوّن الجدول لدراسة إشارة f' :

$-\infty$ ، -1 ، 1 ، 3 ، ∞

الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, 3)$	$(3, \infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$---$	$+++$
سلوك الدالّة f	متزايدة ↗	متناقصة ↘ غير معرّفة	متناقصة ↘	متزايدة ↗

نلاحظ من الجدول أنّ الدالّة متزايدة على كل من الفترتين $(3, \infty)$ ، $(-\infty, -1)$

ومتناقصة على كل من الفترتين $(1, 3)$ ، $(-1, 1)$

c توجد قيمة عظمى محليّة عند $x = -1$ وقيمة صغرى محليّة عند $x = 3$

القيمة العظمى المحليّة هي: $f(-1) = -6$ والقيمة الصغرى المحليّة هي: $f(3) = 2$

حاول أن تحل

2 لتكن الدالّة g: $g(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$

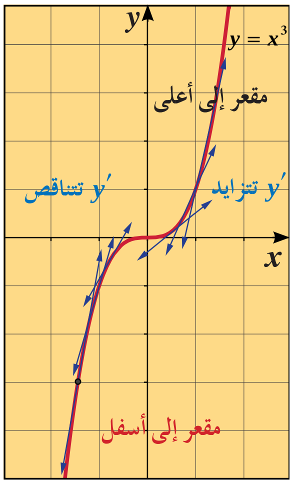
أوجد كلًّا مما يلي:

a النقاط الحرجة.

b الفترات التي تكون الدالّة g متزايدة أو متناقصة عليها.

c القيم القصوى المحليّة.

التقعر Concavity



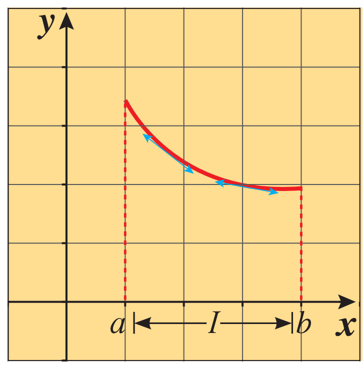
يبيّن الشكل المقابل أن الدالّة $f : f(x) = x^3$ تتزايد مع تزايد قيم x،
ولكن جزئي المنحنى المعرّفين على كل من الفترتين $(-\infty, 0)$، $(0, \infty)$
ينعطفان بشكل مختلف.
إذا أمعنا النظر في المنحنى والمماسّات وتفحصناها بدقة من اليسار إلى اليمين
نلاحظ أن المنحنى يقع أسفل المماسات على الفترة $(-\infty, 0)$
ويقع أعلى المماسات على الفترة $(0, \infty)$.
يمكننا القول إن منحنى الدالة f **مقعّر للأسفل** على الفترة $(-\infty, 0)$
و**مقعر للأعلى** على الفترة $(0, \infty)$.

تعريف (5): التقعّر

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I.

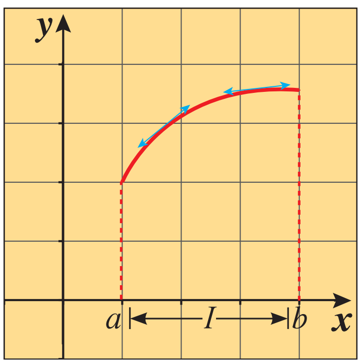
وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I.

الشكلان التاليان يوضّحان التقعر:



شكل (1)

في الفترة (a, b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أعلى المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأعلى**.



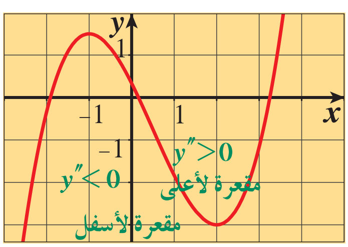
شكل (2)

في الفترة (a, b) نلاحظ أن:
جميع نقاط المنحنى (ما عدا نقاط التماس)
تقع أسفل المماسات.
لذلك نقول **المنحنى مقعر لأسفل**.

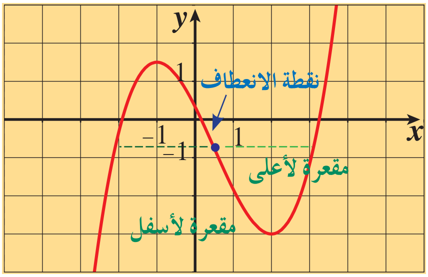
اختبار التقعّر

a إذا كانت $\forall x \in I$ ، $f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I.

b إذا كانت $\forall x \in I$ ، $f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I.



نقطة الانعطاف — Point of Inflection



تعريف (6): نقطة الانعطاف

تسمّى النقطة $(c\,,\,f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

إذا كانت $(c\,,\,f(c))$ نقطة انعطاف لبيان الدالة f فإن $f''(c) = 0$ أو $f''(c)$ غير موجودة.

مثال (3)

أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 1$

الحل:

$\because$ f دالة كثيرة حدود

$\therefore$ f قابلة للاشتقاق على $\mathbb{R}$

$$f'(x) = 6x^2 + 6x$$

$$f''(x) = 12x + 6$$

نضع

$$f''(x) = 0$$

$$12x + 6 = 0 \Longrightarrow x = -\frac{1}{2}$$

نكوّن الجدول لدراسة إشارة f'' :

$-\infty \qquad -\frac{1}{2} \qquad \infty$

الفترات	$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$	$\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$
إشارة f''	$- -$	$+ +$
بيان الدالة f	$\cap$ مقعّر لأسفل	$\cup$ مقعّر لأعلى

نلاحظ من الجدول أنّ: بيان الدالّة f مقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$

بيان الدالّة f مقعّر لأعلى على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$

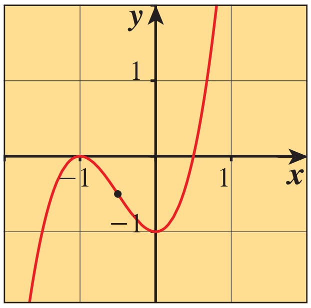
لإيجاد نقطة الانعطاف:

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = 2\left(-\frac{1}{2}\right)^3 + 3\left(-\frac{1}{2}\right)^2 - 1 = -\frac{1}{4} + \frac{3}{4} - 1 = -\frac{1}{2}$$

النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف لمنحنى f

حاول أن تحل

3 أوجد فترات التقعّر ونقطة الانعطاف لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 - 2x^2 + 1$



نلاحظ في الشكل المقابل أن بيان الدالة f في مثال (3) **مقعّر للأسفل** على الفترة $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$ و**مقعر للأعلى** على الفترة $\left(-\frac{1}{2}, \infty\right)$ وأن النقطة $\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ هي نقطة انعطاف.

لدراسة حركة جسيم يتحرّك على خطّ مستقيم غالبًا ما تحتاج إلى وصف هذه الحركة من خلال دالّة الموقع (الإزاحة) ومشتقّتها (السرعة) ومشتقّتها الثانية (العجلة) في أيّ لحظة على مساره.

مثال إثرائي

يتحرّك جسيم على خطّ مستقيم أفقيّ حيث دالّة موقعه $t \geq 0$, $s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$

أوجد السرعة اللحظيّة للجسيم وعجلته ثم صف حركته.

الحل:

$$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$$

السرعة اللحظيّة هي:

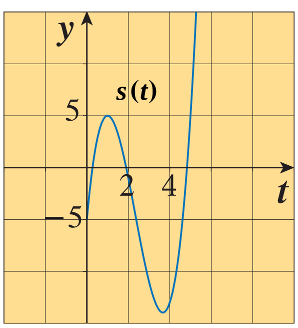
$$v(t) = s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$$
$$= 2(t-1)(3t-11)$$

والعجلة هي:

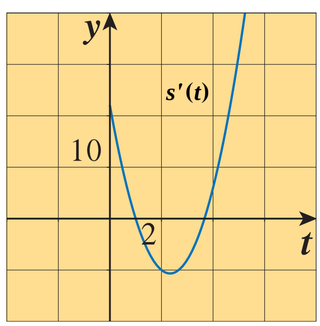
$$a(t) = v'(t) = s''(t)$$
$$= 12t - 28 = 4(3t - 7)$$

عندما تتزايد الدالّة $s(t)$ يتحرّك الجسيم إلى اليمين، وعندما تتناقص $s(t)$ يتحرّك الجسيم إلى اليسار.

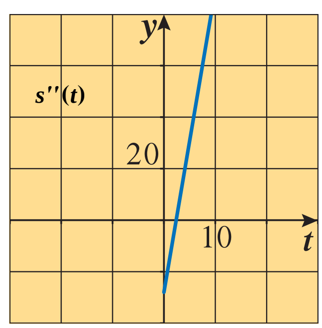
يبيّن الشكل أدناه الرسوم البيانيّة للموقع (المسافة) والسرعة اللحظيّة والعجلة للجسيم.



$s(t) = 2t^3 - 14t^2 + 22t - 5$
$t \geq 0$



$s'(t) = 6t^2 - 28t + 22$



$s''(t) = 12t - 28$

لاحظ أن المشتقة الأولى $(v = s')$ تساوي 0 عند $t = 1$ ، $t = \frac{11}{3}$

	0	1	$\frac{11}{3}$ ∞
الفترات	$(0,1)$	$\left(1, \frac{11}{3}\right)$	$\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$
$v = s'$	$++$	$--$	$++$
سلوك s	متزايدة ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗
حركة الجسيم	يمين	يسار	يمين

يتحرّك الجسيم إلى اليمين على الفترة الزمنيّة $[0,1)$ والفترة الزمنيّة $\left(\frac{11}{3}, \infty\right)$، ويتحرّك إلى اليسار على الفترة $\left(1, \frac{11}{3}\right)$

العجلة: $a(t) = s''(t) = 12t - 28 = 4(3t - 7)$

تساوي 0 عند $t = \frac{7}{3}$

	0	$\frac{7}{3}$ ∞
الفترات	$\left(0, \frac{7}{3}\right)$	$\left(\frac{7}{3}, \infty\right)$
إشارة $a = s''$	$--$	$++$
بيان الدالة s	$\frown$ مقعّر لأسفل	$\smile$ مقعّر لأعلى

اتّجاه العجلة ناحية اليسار (العجلة سالبة) أثناء الفترة الزمنية $\left(0, \frac{7}{3}\right)$، وتكون في لحظة تساوي صفرًا عند $t = \frac{7}{3}$ واتّجاهها ناحية اليمين (العجلة موجبة بعد ذلك).

تدريب إثرائي

يتحرّك جسم معيّن على خط مستقيم أفقي حيث دالة موقعه: $f(t) = t^3 - 3t^2 + 5 \quad ; \quad t \geqslant 0$

أوجد السرعة اللحظية للجسيم وعجلته، ثم صف حركته.

اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة Second Derivative Test for Local Extrema

بدلًا من النظر إلى إشارة التغيّر في y' عند نقاط حرجة، يمكننا أن نستخدم أحيانًا الاختبار الآتي لتحديد وجود قيم قصوى محليّة.

نظرية (6): اختبار المشتقة الثانية للقيم القصوى المحليّة

1. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$
2. إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$

يتطلّب منا هذا الاختبار أن نعرف f'' فقط عند العدد c نفسه وليس على فترة تشمل c.

وهذا يجعل الاختبار سهلًا للتطبيق.

الاختبار لا يصلح (يفشل) إذا كانت $f'' = 0$ أو لا يكون لها وجود.

فمثلًا: الدالة f : $f(x) = x^4$ ، مشتقتها الأولى هي: $f'(x) = 4x^3$

ومشتقتها الثانية $f''(x) = 12x^2$

عندما $x = 0 \Longrightarrow f'(x) = 0$

ومنها $f''(0) = 0$

عندما يحدث ذلك نعود إلى اختبار المشتقّة الأولى للبحث عن القيم القصوى المحليّة.

في مثال (4) نطبّق اختبار المشتقّة الثانية للدالّة الموجودة في مثال (1).

مثال (4)

أوجد القيم القصوى المحليّة للدالّة: $f(x) = x^3 - 12x - 5$

الحل:

$$f'(x) = 3x^2 - 12$$
$$= 3(x^2 - 4)$$
$$= 3(x-2)(x+2)$$

نضع: $f'(x) = 0$

ومنها $x = -2 \quad , \quad x = 2$

$$f''(x) = 6x$$

باختبار الأعداد الحرجة $x = \pm 2$ ، نجد أن:

$$f''(-2) = -12 \quad , \quad -12 < 0$$

فيكون للدالة f قيمة عظمى محليّة عند $x = -2$ وهي $f(-2) = 11$

$$f''(2) = 12 \quad , \quad 12 > 0$$

فيكون للدالة f قيمة صغرى محليّة عند $x = 2$ وهي $f(2) = -21$

حاول أن تحل

4 استخدم اختبار المشتقة الثانية لتجد القيم القصوى المحلية للدالة f: $f(x) = 4x^3 - 12x^2$

3-4

رسم بيان دوال كثيرات الحدود

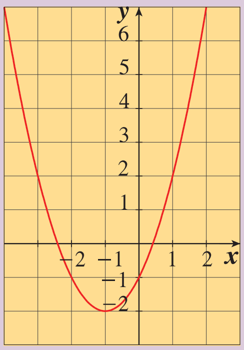
Graph of Polynomial Functions

سوف تتعلم

- ربط بيان f' و f .
- خطوات رسم بيان دوال كثيرات الحدود.

المفردات والمصطلحات

- بيان دوال كثيرات الحدود Graph of Polynomial Functions



دعنا نفكر ونتناقش

يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة f : $f(x) = x^2 + 2x - 1$

1 أوجد إن أمكن:

a $f'(x)$ محدّدًا كلًّا من النقاط الحرجة وفترات التزايد وفترات التناقص للدالة f.

b $f''(x)$ محدّدًا كلًّا من نقاط الانعطاف وفترات التقعر.

2 قارن نتائج الحل في **1** مع المنحنى المرسوم.

تعلمت فيما سبق كيفية رسم منحنى تقريبي لبيان دالة كثيرة حدود معتمدًا على سلوك نهاية الدالة، وفي البنود السابقة تعلمت تحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة وتحديد النقاط الحرجة والقيم العظمى أو الصغرى، وتمّ تحديد نقاط الانعطاف والفترات التي يكون فيها منحنى الدالة مقعرًا لأعلى أو لأسفل. وسنستفيد من كل هذه المعلومات لرسم بيان دالة كثيرة الحدود رسمًا أكثر دقة.

الخطوات اللازم اتباعها في دراسة تغير الدالة كثيرة الحدود ورسم بيانها

Steps to be Followed in Drawing the Graph of a Polynomial Function

1 **عيّن مجال الدالة f.**

مجال دالة كثيرة الحدود هو $\mathbb{R}$ ولكنه يقتصر أحيانًا على فترة من $\mathbb{R}$ خاصة في المسائل الحياتية.

2 **أوجد النهايات عند الحدود المفتوحة لمجال الدالة f.**

3 **عيّن النقاط الحرجة للدالة f.**

4 **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' وتحديد فترات التزايد وفترات التناقص للدالة والقيم القصوى المحلية.**

5 **كوّن جدولًا لدراسة إشارة f'' وتحديد فترات التقعر لمنحنى الدالة ثم نقاط الانعطاف إن وجدت.**

6 **أوجد نقاطًا إضافية.**

تساعد هذه النقاط على رسم بيان الدالة بدقة وأهم هذه النقاط، نقاط التقاطع مع أحد المحورين إن أمكن.

7 **ارسم بيان الدالة f.** استخدم نتائج الخطوات السابقة في الرسم.

مثال (1)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x + 4$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (x^3) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x^2 - 1) = 3(x-1)(x+1)$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$3(x-1)(x+1) = 0$$

$$x = 1 \quad , \quad x = -1$$

$$f(1) = (1)^3 - 3(1) + 4 = 2 \quad , \quad f(-1) = (-1)^3 - 3(-1) + 4 = 6$$

$\therefore$ $(1, 2), (-1, 6)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

	$-\infty$ -1	-1 1	1 ∞
الفترات	$(-\infty, -1)$	$(-1, 1)$	$(1, \infty)$
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$
سلوك الدالّة f	متزايدة $-\infty$ ↗	متناقصة ↘	متزايدة ↗ ∞

الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty, -1)$ والفترة $(1, \infty)$ ومتناقصة على الفترة $(-1, 1)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'':

$$f''(x) = 6x$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$6x = 0 \quad , \quad x = 0$$

$$f(0) = 4$$

	$-\infty$ 0	0 ∞
الفترات	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
إشارة f''	$--$	$++$
التقعّر	$\cap$	$\cup$

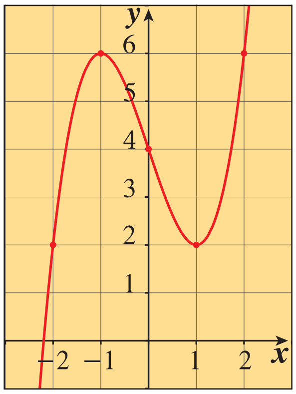
منحنى الدالة مقعّر لأسفل على الفترة $(-\infty, 0)$ ومقعّر لأعلى على الفترة $(0, \infty)$

$(0, 4)$ نقطة انعطاف.

نقاط إضافية

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$	-14	2	6	4	2	6	22
	نقطة إضافية	نقطة إضافية	نقطة عظمى محلية	نقطة انعطاف	نقطة صغرى محلية	نقطة إضافية	نقطة إضافية

بيان الدالة f:



حاول أن تحل

1 ادرس تغير الدالة $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 4$ وارسم بيانها.

مثال (2)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 1 - x^3$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (-x^3) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (-x^3) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة حيث f دالة قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = -3x^2$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$-3x^2 = 0 \implies x = 0$$

$$f(0) = 1 - (0)^3 = 1$$

$\therefore$ $(0,1)$ نقطة حرجة.

نكوّن جدول التغيّر لدراسة إشارة f' :

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

x	$-\infty$ ... 0	0 ... ∞
إشارة f'	$---$	$---$
سلوك الدالة f	∞ متناقصة ↘	متناقصة ↘ $-\infty$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -6x$$

$$-6x = 0 \implies x = 0$$

منحنى الدالة مقعّر لأعلى على الفترة $(-\infty, 0)$

ومقعّر لأسفل على الفترة $(0, \infty)$

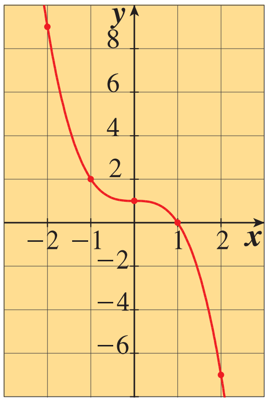
$(0,1)$ نقطة انعطاف.

x	$-\infty$ ... 0	0 ... ∞
إشارة f''	$++$	$--$
التقعّر	∪ تقعّر لأعلى	∩ تقعّر لأسفل

نقاط إضافية

x	-2	-1	0	1	2
$f(x)$	9	2	1	0	-7

بيان الدالة f:



حاول أن تحل

2 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x - 2x^3$ وارسم بيانها.

مثال (3)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = 3x^4 + 4x^3 + 2$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = \lim_{x \to -\infty} (3x^4) = \infty$$

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \lim_{x \to \infty} (3x^4) = \infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = 12x^3 + 12x^2$$

نضع: $f'(x) = 0$

$$12x^3 + 12x^2 = 0$$

$$12x^2(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = -1$$

$$f(0) = 2 \quad , \quad f(-1) = 3 - 4 + 2 = 1$$

$(-1,1), (0,2)$ نقطتان حرجتان.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

x	$-\infty$ إلى -1	-1 إلى 0	0 إلى ∞
إشارة f'	$- - -$	$+ + +$	$+ + +$
سلوك الدالّة f	∞ متناقصة $\searrow$	متزايدة $\nearrow$	متزايدة $\nearrow$ ∞

الدالة متناقصة على الفترة $(-\infty, -1)$ ومتزايدة على الفترة $(-1, 0)$ والفترة $(0, \infty)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = 36x^2 + 24x$$

نضع: $f''(x) = 0$

$$12x(3x+2) = 0$$

$$x = 0 \quad , \quad x = -\frac{2}{3}$$

$$f(0) = 2 \;,\; f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{38}{27}$$

x	$-\infty$ … $-\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$ … 0	0 … ∞
إشارة f''	$++$	$--$	$++$
التقعّر	$\cup$ تقعّر لأعلى	$\cap$ تقعّر لأسفل	$\cup$ تقعّر لأعلى

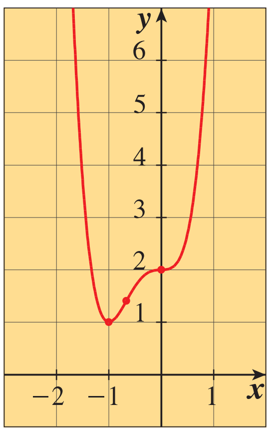
منحنى الدالة مقعّر لأعلى على كل من الفترتين $(0\,,\infty)$ ، $\left(-\infty\,,-\frac{2}{3}\right)$ ومقعّر لأسفل على الفترة $\left(-\frac{2}{3}\,,0\right)$

النقطتان $(0\,,2)$ ، $\left(-\frac{2}{3}\,,\frac{38}{27}\right)$ هما نقطتا انعطاف.

نقاط إضافية

x	-2	-1	$-\frac{2}{3}$	0	1
$f(x)$	18	1	$\frac{38}{27}$	2	9

بيان الدالة f:



حاول أن تحل

3 ادرس تغير الدالة f : $f(x) = x^4 - 2x^2$ وارسم بيانها.

مثال (4)

ادرس تغير الدالة f : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + 1$ وارسم بيانها.

الحل:

f دالة كثيرة الحدود مجالها $\mathbb{R}$.

نوجد النهايات عند الحدود المفتوحة.

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} (-x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^4) = -\infty$$

نوجد النقاط الحرجة للدالة f

f دالة كثيرة الحدود قابلة للاشتقاق على مجالها.

$$f'(x) = -4x^3 + 4x$$

نضع:

$$f'(x) = 0$$

$$-4x^3 + 4x = 0$$

$$-4x(x^2 - 1) = 0$$

$$-4x(x-1)(x+1) = 0 \Longrightarrow x = 0 \quad , \quad x = 1 \quad , \quad x = -1$$

$$f(0) = 1$$

$$f(1) = -(1)^4 + 2(1)^2 + 1 = 2$$

$$f(-1) = -(-1)^4 + 2(-1)^2 + 1 = 2$$

$\therefore$ $(0,1)$, $(1,2)$, $(-1,2)$ نقاط حرجة.

نكوّن جدول لدراسة إشارة f'

x	$-\infty$ إلى -1	-1 إلى 0	0 إلى 1	1 إلى ∞
إشارة f'	$+++$	$---$	$+++$	$---$
سلوك الدالّة f	متزايدة ($-\infty$)	متناقصة	متزايدة	متناقصة ($-\infty$)

$\therefore$ الدالة متزايدة على كل من الفترة $(-\infty,-1)$ والفترة $(0,1)$ والدالة متناقصة على كل من الفترة $(-1,0)$ والفترة $(1,\infty)$

نكوّن جدول لدراسة إشارة f''

$$f''(x) = -12x^2 + 4$$

نضع:

$$f''(x) = 0$$

$$-12x^2 + 4 = 0$$

$$-12\left(x^2 - \frac{1}{3}\right) = 0$$

$$-12\left(x - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(x + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 0$$

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad , \quad x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

x	$-\infty$ إلى $-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$ إلى $\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$ إلى ∞
إشارة f''	$--$	$++$	$--$
التقعّر	$\cap$ تقعّر لأسفل	$\cup$ تقعّر لأعلى	$\cap$ تقعّر لأسفل

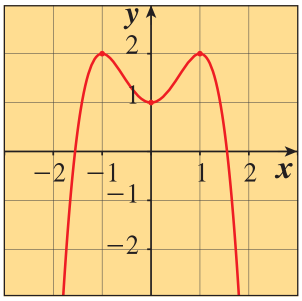
منحنى الدالة مقعّر لأسفل على كل من الفترتين $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\infty\right)$ ، $\left(-\infty,\frac{-1}{\sqrt{3}}\right)$ ومقعّر لأعلى على الفترة $\left(\frac{-1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

نقاط الانعطاف هي: $\left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{14}{9}\right)$ ، $\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{14}{9}\right)$

- نقاط إضافية

x	-2	-1	$\frac{-1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	2
$f(x)$	-7	2	$\frac{14}{9}$	1	$\frac{14}{9}$	2	7

بيان الدالة f:

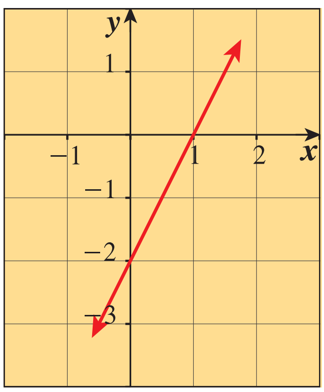


حاول أن تحل

4 ادرس تغير الدالة: $f(x) = x^4 - 8x^2 + 7$ وارسم بيانها.

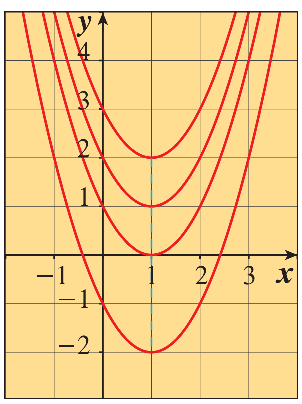
العلاقات بين بيان الدالة f' و f Relations Between the Graphs of f' and f

إن معرفة النقاط الحرجة وإشارة الدالة المشتقة f'
تسمحان بمعرفة سلوك الدالة f.
يمكن قراءة بيانات f' من رسمها البياني واستنتاج سلوك f.
فمثلًا يمثّل الشكل (1) المقابل بيان الدالة f'.



شكل (1)
بيان الدالة f'

- $(1, f(1))$ نقطة حرجة
- إشارة f' سالبة على الفترة $(-\infty, 1)$
- إشارة f' موجبة على الفترة $(1, \infty)$



نستنتج أن f متناقصة على الفترة $(-\infty, 1)$
ومتزايدة على الفترة $(1, \infty)$
ولها قيمة صغرى $f(1)$.
لكن هذا لا يسمح برسم بيان f بدقة إذ يلزمنا بعض النقاط الإضافية.
يمثّل الشكل المقابل بيانات بعض الدوال التي يمكن أن تكون بيانات f.

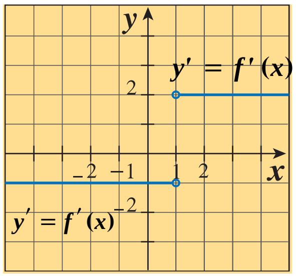
مثال (5) الرسم البياني للدالة f من f' (إثرائي)

ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالّة f التي لها الخواص التالية:

a $f(0) = 0$

b الرسم البيانيّ للدالّة f' (مشتقّة الدالّة f) موضّح في الشكل المقابل.

c f دالّة متّصلة لكلّ x



الرسم البياني للمشتقة

الحل:

لتحقيق الخاصّيّة a نبدأ بنقطة الأصل.

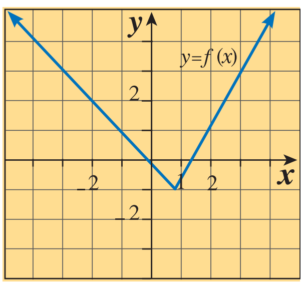
لتحقيق الخاصّيّة b نأخذ بعين الاعتبار ما يوضّحه الرسم البيانيّ للمشتقّة بالنسبة إلى الميول.

إلى يسار $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره -1، لذلك نرسم مستقيمًا ميله -1 إلى يسار $x = 1$ مع التأكّد من أنّه يمرّ بنقطة الأصل.

إلى يمين $x = 1$ الرسم البيانيّ للدالّة f له ميل ثابت قدره 2، لذلك ينبغي أن يكون مستقيمًا ميله 2.

هناك عدد لا نهائيّ من مثل تلك المستقيمات، ولكنّ واحدًا فقط، المستقيم الذي يقابل الجانب الأيسر من الرسم البيانيّ عند النقطة $(1 , -1)$ سوف يحقّق شرط الاتصال.

يبيّن الشكل أعلاه الرسم البيانيّ الناتج.



الرسم البياني للدالة f منشأ عن الرسم البياني للمشتقة f' وشرطين آخرين.

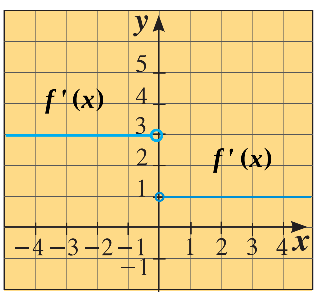
حاول أن تحل

5 ارسم صورة تقريبيّة للرسم البيانيّ للدالّة f التي لها الخواصّ التالية:

a $f(0) = 1$

b الرسم البيانيّ للدالّة f' موضّح في الشكل المقابل.

c f دالّة متّصلة لكلّ x.



3–5

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

سوف تتعلم

- تطبيقات على الهندسة والصناعة.
- تطبيقات على الاقتصاد.

المفردات والمصطلحات

- القيم العظمى والقيم الصغرى Max–Min Values

عمل تعاوني

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة f:

$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$ ، حيث x تمثل سعر الحذاء بالدينار.

a ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟

b ما قيمة أعلى ربح؟

من «العمل التعاوني» وجدت أكبر قيمة للدالة من خلال تطبيق خواص القطع المكافئ للدالة التربيعية، وفي هذا البند يمكنك إيجاد القيم نفسها باستخدام خواص القيم القصوى التي درستها حيث إن الاشتقاق يقدم لنا الطريقة الناجحة لإيجاد أكبر القيم وأصغرها للدوال ويمكن أن تساعدنا الخطوات التالية على ذلك:

1. **افهم المسألة:** اقرأ المسألة بعناية، حدّد المعلومات التي تحتاج إليها لحل المسألة.
2. **كوّن نموذجًا رياضيًّا للمسألة:** ارسم أشكالًا وضع علامات على الأجزاء المهمّة في المسألة. ضع متغيّرًا واحدًا يمثّل الكميّة المطلوب الحصول على قيمتها العظمى أو قيمتها الصغرى. ثم اكتب دالة باستخدام المتغيّر بحيث تعطي قيمتها القصوى المعلومات التي نبحث عنها.
3. أوجد مجال الدالة. وحدّد قيم المتغيّر التي تكون معقولة في المسألة.
4. حدّد **النقاط الحرجة** ويمكن إيجاد **النقاط الطرفيّة**.
   أوجد أين تكون المشتقّة صفريّة أو أين لا يكون لها وجود.
5. **حل النموذج الرياضي:** إذا لم تكن واثقًا من النتيجة دعّم أو أكّد صحّة حلك بطريقة أخرى.
6. **فسّر الحل:** ترجم نتيجتك الرياضية إلى الموقف في المسألة، ثمّ قرّر ما إذا كانت النتيجة معقولة.

مثال (1)

عددان موجبان مجموعهما 100 ومجموع مربعيهما أصغر ما يمكن، ما العددان؟

الحل:

نمذج:

بفرض أن أحد العددين x حيث $0 < x < 100$

$\therefore$ العدد الآخر هو $100 - x$

مجموع مربعيهما هو: $g(x) = x^2 + (100 - x)^2$

$g'(x) = 2x + 2(100 - x)(-1)$

$g'(x) = 2x - 200 + 2x$

$= 4x - 200$

نضع $g'(x) = 0$

$4x - 200 = 0 \Rightarrow x = 50$

$\therefore$ توجد نقطة حرجة $(50\ ,\ g(50))$

$g''(x) = 4 \quad , \quad 4 > 0$

$\therefore$ $g(50)$ قيمة صغرى مطلقة عند $x = 50$

$\therefore$ العدد الأول هو: $x = 50$

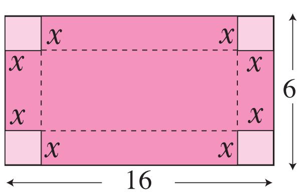
العدد الثاني هو: $100 - x = 100 - 50 = 50$

$\therefore$ العددان هما 50 ، 50

حاول أن تحل

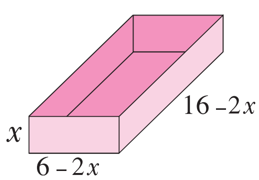
1 أوجد عددين مجموعهما 14 وناتج ضربهما أكبر ما يمكن.

مثال (2) صنع صندوق



يراد صنع صندوق بدون غطاء بقصّ مربّعات متطابقة طول ضلع كلّ منها x من أركان طبقة صفيح أبعادها 16 cm , 6 cm وثني جوانبها إلى أعلى (انظر الشكل المقابل).

أوجد قيمة x بحيث يكون حجم الصندوق أكبر ما يمكن. وما هو حجم أكبر صندوق يمكن صنعه بهذه الطريقة؟



الحل:

نمذج:

ارتفاع الصندوق x، والبعدان الآخران هما $(6 - 2x)$, $(16 - 2x)$

$2x$ لا يمكن أن تزيد على 6، $0 < 2x < 6$

أي أنّ $0 < x < 3$

∴ حجم الصندوق هو: $V(x) = x(6-2x)(16-2x)$

بفك الأقواس نحصل على: $V(x) = 4x^3 - 44x^2 + 96x$

المشتقّة الأولى للحجم V هي: $V'(x) = 12x^2 - 88x + 96$

نضع $V'(x) = 0$

$$12x^2 - 88x + 96 = 0$$
$$4(3x^2 - 22x + 24) = 0$$
$$4(x-6)(3x-4) = 0$$

حلّا المعادلة التربيعيّة هما: $x = 6 \quad , \quad x = \frac{4}{3}$

وحيث إن $6 \notin (0, 3)$ فيتم استبعادها

المشتقة الثانية: $V''(x) = 24x - 88$

$$V''\left(\frac{4}{3}\right) = 24 \times \frac{4}{3} - 88 = -56 \quad , \quad -56 < 0$$

لذلك يكون الصندوق أكبر ما يمكن عند $x = \frac{4}{3}$

حجم أكبر صندوق: $V\left(\frac{4}{3}\right) = 4\left(\frac{4}{3}\right)^3 - 44\left(\frac{4}{3}\right)^2 + 96\left(\frac{4}{3}\right)$

$$= \frac{1600}{27} \text{ cm}^3$$

فسّر

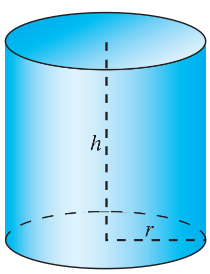
طول ضلع كل مربّع يقطع من أركان طبقة صفيح $\frac{4}{3}$ cm ليعطي أكبر سعة للصندوق.

ويكون أكبر حجم $\frac{1600}{27}$ cm^3

حاول أن تحل

2 في مثال (2)، ما أكبر حجم للصندوق إذا كانت أبعاد طبقة الصفيح 15 cm ، 8 cm؟

مثال (3) تصميم علبة



طلب إليك تصميم علبة زيت تسع لترًا واحدًا تكون على شكل أسطوانة دائريّة قائمة (كما في الشكل المقابل). ما أبعادها لتكون كمية المعدن المستخدم لصنعها أقل ما يمكن؟

الحل:

نفرض أن طول نصف قطر قاعدة العلبة هو r وارتفاعها h . لكي تكون كمية المعدن المستخدمة أقل ما يمكن، يجب أن تكون المساحة السطحية (الكلية) أقل ما يمكن وفي الوقت نفسه تحقق شرط الحجم

المساحة السطحية للعلبة = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

$$A = 2\pi rh + 2\pi r^2 \qquad (1)$$

وحيث إن حجم العلبة معلوم $1L = 1000 \text{ cm}^3$

$$\therefore \quad V = \pi r^2 h = 1000$$

$$h = \frac{1000}{\pi r^2} \qquad (2)$$

وبالتعويض عن h في المعادلة (1) نحصل على

$$A = 2\pi r \times \frac{1000}{\pi r^2} + 2\pi r^2$$

$$A = \frac{2\,000}{r} + 2\pi r^2$$

$$\frac{dA}{dr} = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

نضع

$$\frac{dA}{dr} = 0$$

$$\therefore\ 0 = \frac{-2\,000}{r^2} + 4\pi r$$

$$4\pi r = \frac{2\,000}{r^2}$$

$$\therefore\ 4\pi r^3 = 2\,000$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$$

$$r \approx 5.42$$

وهذه هي القيمة الحرجة الوحيدة حيث $r \neq 0$

وللتأكّد من أن هذه القيمة تعطي أقل مساحة سطحية نوجد المشتقة الثانية:

المشتقة الثانية: $$\frac{d^2A}{dr^2} = \frac{4\,000}{r^3} + 4\pi$$

وهي موجبة على كل مجال A.

لذلك فإن منحنى الدالة A مقعرًا لأعلى وقيمة A عند $r = \sqrt[3]{\frac{500}{\pi}}$ هي قيمة صغرى مطلقة.

$$h = \frac{1\,000}{\pi r^2} = 2\sqrt[3]{\frac{500}{\pi}} = 2r \quad ، \quad h \approx 10.84$$

فسّر:

علبة اللتر الواحد التي تستخدم أقل معدن ممكن لتصنيعها يكون ارتفاعها مساويًا للقطر، حيث:

$$r \approx 5.42\ \text{cm} \quad , \quad h \approx 10.84\ \text{cm}$$

حاول أن تحل

3 تعطي الدالة $V(h) = 2\pi(-h^3 + 36h)$ حجم أسطوانة بدلالة ارتفاعها h.

a أوجد الارتفاع $h(\text{cm})$ للحصول على أكبر حجم للأسطوانة.

b ما قيمة هذا الحجم؟

مثال (4)

أوجد أقصر مسافة بين النقطة $P(x \ , \ y)$ على المنحنى الذي معادلته $y^2 - x^2 = 16$ والنقطة $Q(6 \ , \ 0)$

الحل:

$$y^2 - x^2 = 16 \quad \Rightarrow \quad y^2 = x^2 + 16$$

نوجد المسافة بين النقطتين $P \ , \ Q$

$$PQ = \sqrt{(x_Q - x_P)^2 + (y_Q - y_P)^2}$$
$$= \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$

نفرض أن دالة المسافة هي:

$$S(x) = \sqrt{(x-6)^2 + (y-0)^2}$$
$$= \sqrt{x^2 - 12x + 36 + y^2} = \sqrt{x^2 - 12x + 36 + x^2 + 16}$$
$$= \sqrt{2x^2 - 12x + 52}$$

$$S'(x) = \frac{1}{2}(4x - 12)(2x^2 - 12x + 52)^{\frac{-1}{2}}$$
$$= \frac{2x - 5}{\sqrt{2x^2 - 12x + 52}}$$
$$S'(x) = 0 \ \Rightarrow \ 2x - 6 = 0 \ \Rightarrow \ x = 3$$

نوجد أصفار المقام بوضع

$$2x^2 - 12x + 52 = 0$$
$$x^2 - 6x + 26 = 0$$

المميز:

$$\Delta = (-6)^2 - 4 \times 1 \times 26$$
$$= 36 - 104 = -68 \quad , \quad -68 < 0$$

$\therefore$ لا يوجد أصفار للمقام

نكوّن جدول التغيّر

x	$-\infty$	3	∞
$S'(x)$	$--$		$++$
$S(x)$	↘		↗

$\therefore$ أقصر مسافة بين النقطتين $P \ , \ Q$ هي عند $x = 3$

$$S(3) = \sqrt{2(3)^2 - 12(3) + 52}$$
$$= \sqrt{34}$$

أقصر مسافة هي $\sqrt{34}$ وحدة طول.

حاول أن تحل

4 أوجد أقصر مسافة بين النقطة $A(x , y)$ على المنحنى الذي معادلته $y = \sqrt{x}$ والنقطة $B(3 , 0)$

مثال (5)

تنتج إحدى شركات الأدوات الكهربائية خلال فترة زمنية محددة كمية x من الخلاطات الكهربائية..

يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة (بالدينار) بالعلاقة $C(x) = x - 20 + \frac{400}{x}$

1. أوجد كمية عدد القطع المنتجة خلال الفترة لتحقيق أقل كلفة ممكنة.
2. تباع كل قطعة منتجة بمبلغ 100 دينار.
   - a. عبّر عن ربح الشركة بمعلومية x.
   - b. أوجد قيمة x التي تحقق أكبر ربح، وما قيمته؟

الحل:

يمثّل المتغير x عدد القطع المنتجة $\therefore$ x عدد صحيح موجب.

1. ندرس تغير الدالة c على الفترة $(0, \infty)$ لحساب قيمة x التي تعطي قيمة صغرى.

$$C'(x) = 1 - \frac{400}{x^2} = \frac{x^2 - 400}{x^2} = \frac{(x-20)(x+20)}{x^2}$$

$\because$ $x^2 > 0$, $x + 20 > 0$ (x عدد صحيح موجب)

$\therefore$ C' ، $x - 20$ لهما نفس الإشارة

جدول التغير

x	0	20	∞
إشارة f'	$- -$		$+ +$
سلوك f	↘		↗

من جدول التغير نستنتج أن إنتاج 20 قطعة يحقق أقل كلفة ممكنة.

2. a. الربح = سعر مبيع الكمية − كلفة الكمية المباعة

سعر الكمية المباعة: $100x$

كلفة الكمية المباعة: $\left(x - 20 + \frac{400}{x}\right) . x = x^2 - 20x + 400$

الربح:

$$P(x) = 100x - (x^2 - 20x + 400)$$
$$= 100x - x^2 + 20x - 400$$
$$= -x^2 + 120x - 400$$

b. لحساب قيمة x التي تحقق أكبر ربح ندرس تغيّر الدالة P على الفترة $(0, \infty)$ ونوجد قيمة x التي تحقق قيمة قصوى.

$$P'(x) = -2x + 120$$

نضع $P'(x) = 0$

$$-2x + 120 = 0$$
$$x = 60$$

تغير الدالة P :

x	0		60		∞
إشارة P'		$++$		$--$	
سلوك P		↗		↘	

من جدول التغير نستنتج أن قيمة x التي تحقق قيمة عظمى للدالة P هي 60 أي أن مبيع 60 قطعة يحقق أكبر ربح للشركة.

أكبر قيمة للربح:

$$\begin{aligned} P(60) &= -(60)^2 + 120(60) - 400 \\ &= -4\,000 + 7\,200 \\ &= 3\,200 \end{aligned}$$

أكبر قيمة للربح 3 200 دينار.

حاول أن تحل

5 تصنع إحدى الشركات يوميًّا x (بالآلاف) من المكثفات الكهربائية.

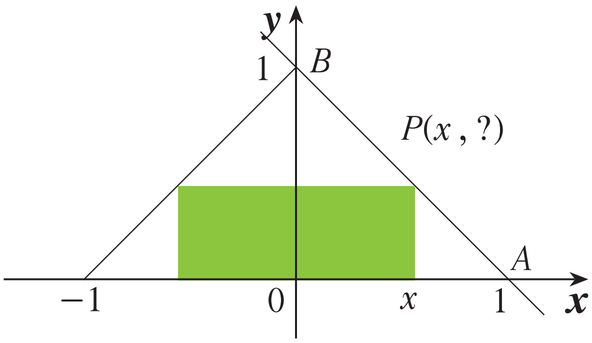
يعطى معدل كلفة إنتاج كل قطعة بالعلاقة: $C(x) = x - 2 + \frac{25}{x}$

a أوجد كمية عدد المكثفات المنتجة يوميًّا لتحقيق أقل كلفة ممكنة.

b تباع كل ألف قطعة بسعر 10 دنانير.

أوجد كمية المكثفات المنتجة لتحقيق أكبر ربح.

مستطيلات داخل أشكال: يبيّن الشكل مستطيلًا داخل مثلث قائم الزاوية متطابق الضلعين، طول وتره وحدتي طول:



1 عبّر عن الإحداثيّ الصاديّ للنقطة P بدلالة x.

[**إرشاد:** اكتب معادلة $\overleftrightarrow{AB}$.]

2 عبّر عن مساحة المستطيل بدلالة x.

3 ما أكبر مساحة يأخذها المستطيل؟ وما أبعاده حينها؟

الحل:

1 يجب إيجاد معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: لدينا $A(1,0)$, $B(0,1)$

ميل $\overleftrightarrow{AB} = -1$ $\therefore$ معادلة $\overleftrightarrow{AB}$: $y = -x + 1$

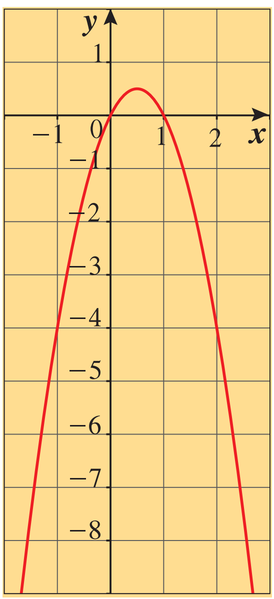
$\because$ النقطة P موجودة على $\overleftrightarrow{AB}$ $\therefore P(x, -x+1)$

2 مساحة المستطيل = الطول × العرض

الطول $= 2 \times x_P = 2x$

العرض $= y_P = -x + 1$

$\therefore$ مساحة المستطيل $= 2x(-x+1) = -2x^2 + 2x$



3 نرسم على الآلة الحاسبة البيانية الدالة f: $f(x) = -2x^2 + 2x$

نجد بيانيًّا أن $f(x)$ لها قيمة قصوى تساوي 0.5 عندما $x = 0.5$

$\therefore$ أقصى مساحة يأخذها المستطيل هي 0.5 وحدة مربعة.

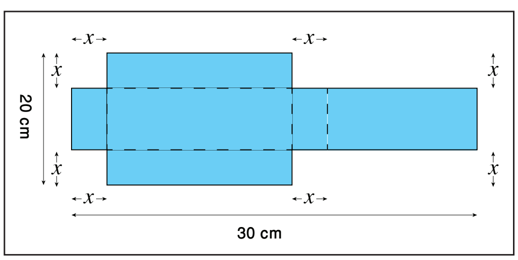
قياسات المستطيل:

الطول: $2 \times 0.5 = 1$ units

العرض: $-0.5 + 1 = 0.5$ units

مسألة إضافية

لتصميم صندوق له غطاء، أُخذت قطعة من الورق المقوى على شكل مستطيل أبعادها 30 cm × 20 cm، قطع مربعان متطابقان من أركانها طول ضلع كل منهما x cm، وقطع مستطيلان متطابقان من الجهة الأخرى بحيث أصبح بالإمكان طيّ الأجزاء البارزة لتكوّن متوازي مستطيلات له غطاء.



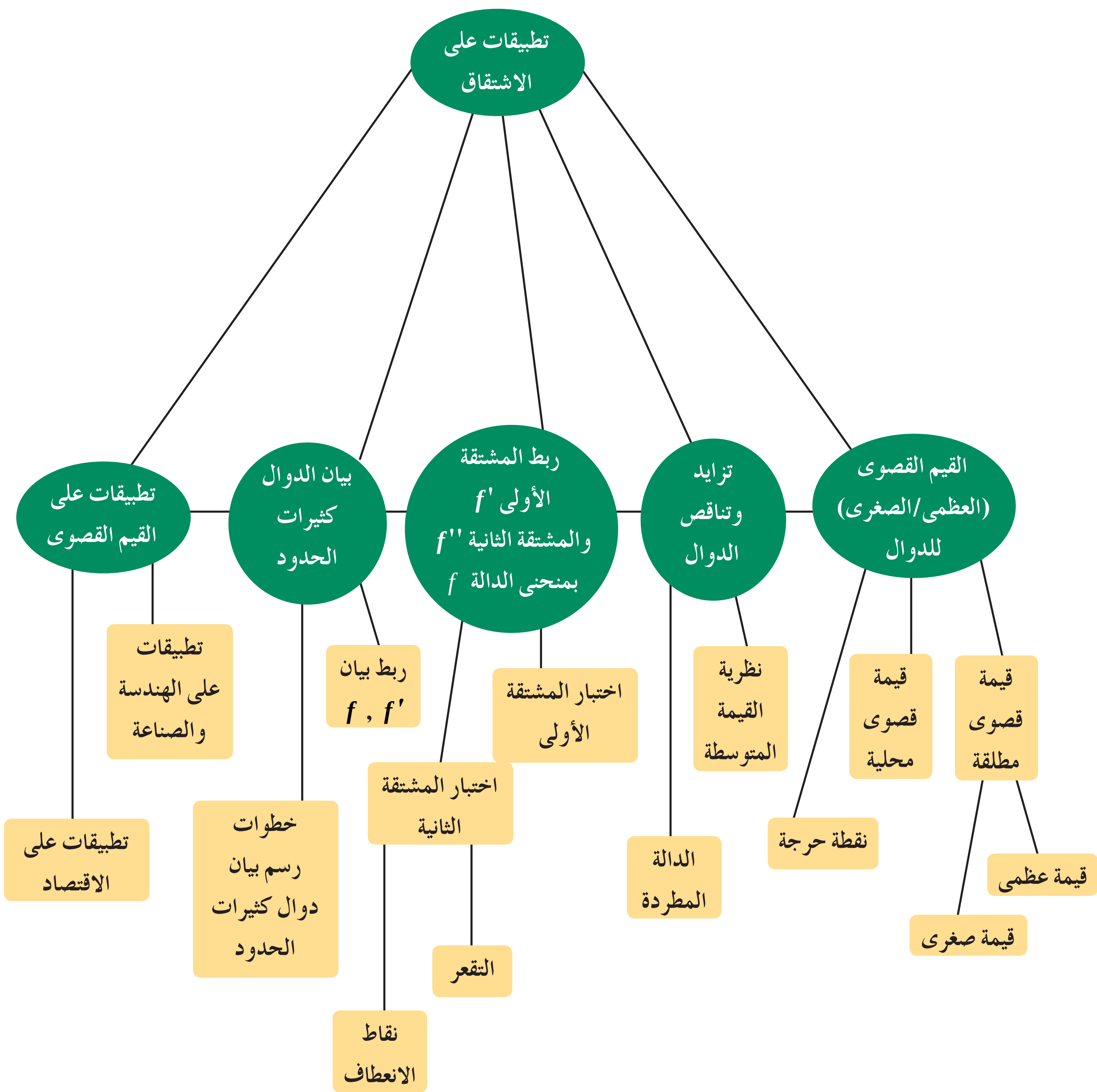
a اكتب صيغة تعبّر عن $V(x)$ حجم الصندوق.

b أوجد مجال V للمسألة واستخدمْ رسمًا بيانيًّا يمثّل V في ذلك المجال.

c استخدم الطريقة البيانيّة لإيجاد أكبر حجم ممكن للصندوق وقيمة x التي تعطي ذلك الحجم.

d دعّم النتائج التي حصلت عليها تحليليًّا.

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

• إذا كانت f دالة مجالها D، $c \in D$ فإن $f(c)$ تسمى:

– قيمة عظمى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \geqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

– قيمة صغرى مطلقة للدالة f على D عندما: $f(c) \leqslant f(x)\ ,\ \forall x \in D_f$

• إذا كانت f دالّة متصلة على فترة مغلقة $[a\ ,\ b]$ فإن f تكون لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة.

• لتكن $(c\ ,f(c))$ نقطة داخلية للدالة f، D فترة مفتوحة تحوي c ، $f(c)$ تكون:

a قيمة عظمى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\quad f(c) \geqslant f(x)$

b قيمة صغرى محليّة عند c عندما: $\forall x \in D$ $\quad f(c) \leqslant f(x)$

• النقطة الداخليّة للدالّة f $(c\ ,f(c))$ تسمى نقطة حرجة عندما $f'(c)=0$ أو $f'(c)$ غير موجودة.

• إذا كانت للدالّة f قيمة قصوى (عظمى أو صغرى) محليّة عند $x=c$ فإنّ $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.

• إذا كانت f دالة:

– متّصلة على الفترة $[a\ ,\ b]$

– قابلة للاشتقاق على الفترة $(a\ ,\ b)$

فإنّه يوجد على الأقل $c \in (a\ ,b)$ بحيث $f'(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$

• لتكن f دالّة معرّفة على الفترة I . نقول إن:

1 f دالّة متزايدة على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)\quad ,\quad \forall x_1\ ,\ x_2 \in I$

2 f دالّة متناقصة على I إذا كان: $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)\quad ,\quad \forall x_1\ ,\ x_2 \in I$

• الدالّة التي تكون دائمًا متزايدة على فترة أو دائمًا متناقصة على فترة، يقال عنها إنّها دالّة مطّردة على هذه الفترة.

• لتكن f دالّة قابلة للاشتقاق على $(a\ ,\ b)$.

– ذا كانت $f'(x) > 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتزايد على $(a\ ,\ b)$.

– إذا كانت $f'(x) < 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ f تتناقص على $(a\ ,\ b)$.

– إذا كانت $f'(x) = 0$ عند كلّ x تنتمي إلى الفترة $(a\ ,\ b)$، فإنّ الدالة f ثابتة على $(a\ ,\ b)$.

• لتكن f دالّة متّصلة على مجالها وكانت $(c\ ,f(c))$ نقطة حرجة.

– إذا كانت إشارة المشتقّة f' تتغيّر من الموجب إلى السالب عند $x=c$ فإن f يكون لها قيمة عظمى محلية عند c.

– إذا تغيرت إشارة f' من السالب إلى الموجب عند $x=c$ فإن f يكون لها قيمة صغرى محلّية عند c.

- إذا لم تتغيّر إشارة f' عند $x = c$ فإن f لا يكون لها قيمة قصوى محلّية عند c.
- تعريف: التقعّر

إذا وقع منحنى الدالة أعلى جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأعلى على I .

وإذا وقع منحنى الدالة أسفل جميع مماساته على فترة I فإنه يكون مقعّرًا لأسفل على I .

- اختبار التقعّر:

a إذا كانت $\forall x \in I \;,\; f''(x) > 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأعلى على I .

b إذا كانت $\forall x \in I \;,\; f''(x) < 0$ فإن منحنى الدالة f مقعّرًا لأسفل على I .

- نقطة الانعطاف:

تسمّى النقطة $(c\,,\,f(c))$ نقطة انعطاف لمنحنى الدالة f إذا كانت f دالّة متّصلة عند c، ومنحنى الدالة f يغيّر تقعّره عند هذه النقطة من أعلى إلى أسفل أو من أسفل إلى أعلى.

- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) < 0$ ، فإن f تكون لها قيمة عظمى محليّة عند $x = c$.
- إذا كانت $f'(c) = 0$ ، $f''(c) > 0$ ، فإن f تكون لها قيمة صغرى محليّة عند $x = c$.

الإحصاء

Statistics

مشروع الوحدة: ما هي أفضل طريقة لإيجاد وظيفة؟

1. مقدمة المشروع: بعد التخرج يواجه الحاصلون على الإجازات والشهادات الجامعيّة تحدّ جديد هو الانخراط في سوق العمل.
2. الهدف: هو البحث عن فرص عمل من خلال القيام بعدة خطوات ومحاولات متنوعة واستخدام العديد من الوسائل.
3. اللوازم: حاسوب — شبكة الإنترنت.
4. أسئلة حول التطبيق:
   - a كيف ستختار عينة عشوائية من الموظفين للاستفسار عن الوسيلة التي استخدموها في إيجاد وظيفتهم؟
   - b ما الخيارات التي اكتشفتها؟ نظّمها في استمارة.

   (إرشاد):

   - من خلال الأصدقاء والمعارف.
   - من خلال الإعلانات في الصحف والمجلات.
   - من خلال الوكالات المختصة في الربط بين سوق العمل وطالبي الوظائف.
   - من خلال البحث عبر شبكة الإنترنت.
   - من خلال التقدم مباشرة لطلب وظيفة من الشركة المختصة أو اعتماد وسيلة أخرى (اذكرها ...).

   - c حدّد النسب المئوية لكل خيار ممّا سبق.
5. التقرير: اكتب تقريرًا مفصلًا يحدّد النسب التي حصلت عليها من خلال العينة العشوائيّة التي اعتمدتها مكوّنًا جدولًا بالنسب المئوية عن كل وسيلة تمّ استخدامها لإيجاد وظيفة.

القرار: ضمّن تقريرك بعض الاقتراحات والنصائح والاستنتاجات التي نتجت عن تلك الدراسة.

دروس الوحدة

الارتباط والانحدار	اختبارات الفروض الإحصائية	التقدير
4–3	4–2	4–1

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت مقاييس النزعة المركزية: المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال.
- تعلمت المجتمع الإحصائي.
- تعلمت العينة العشوائية وأنواعها واستخداماتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- يُعرّف المعلمة والإحصاءة.
- إيجاد التقدير بنقطة.
- إيجاد التقدير بفترة ثقة.
- استكشاف الفروض الإحصائية.
- يُعرّف الاختبارات الإحصائية ويجريها.
- اتخاذ القرار المناسب.
- يتعرف الارتباط والانحدار.
- يوجد مُعامل ارتباط بيرسون.
- يكتب معادلة خط الانحدار ويتنبأ.

أضف إلى معلوماتك

في الوسائل الإعلامية المرئية والمسموعة والمكتوبة تطالعك نتائج إحصائية تتحدث عن توقعات أحداث معينة تتناول انتخابات نيابية أو رئاسية أو مبيعات أو مباريات... وأكثر ما يستوقفك هو نسبة مئوية معينة مع هامش خطأ محدد والسؤال المهم هو: كيف يتم التقدير وكيف يحتسب هامش الخطأ؟ توفر دروس هذه الوحدة فرصة أمام الطلاب للتعرّف على التقدير وهامش الخطأ والفروض الإحصائية وكيفية احتسابها.

كما يتعرف الطلاب على مفهوم الارتباط والانحدار ويحتسبوا معامل ارتباط بيرسون ثم يكتبوا معادلة خط الانحدار ويتنبؤا نتائج معينة.

المصطلحات الأساسية

المعلمة – الإحصاءة – التقدير – التقدير بنقطة – فترة الثقة – التقدير بفترة الثقة – درجة الثقة – التوزيع الطبيعي – القيمة الحرجة – هامش الخطأ – الخطأ المعياري – خواص التوزيع t – الفروض الإحصائية – المقياس الإحصائي – فرض العدم – الفرض البديل – القرار – الانحدار – المخطط الانتشاري – الارتباط – مُعامل الارتباط الخطي – خواص مُعامل الارتباط – مُعامل ارتباط بيرسون – التنبؤ.

التقدير

Estimation

سوف تتعلم

- التقدير بنقطة.
- التقدير بفترة الثقة.
- هامش الخطأ.

المفردات والمصطلحات:

- المعلمة Parameter
- الإحصاءة Statistic Function
- تقدير المعلمة Parameter Estimate
- تقدير Estimation
- تقدير بنقطة Point Estimate
- تقدير بفترة الثقة Confidence Interval Estimation
- درجة الثقة (مستوى الثقة) (Level of Confidence) Degree of Confidence
- نسبة الخطأ (مستوى المعنوية) Percentage of error (Significance Level)
- القيمة الحرجة Critical Value
- هامش الخطأ Margin of Error
- درجات الحرية Degree of Freedom

تذكر:

الاقتران هو قيمة تربط مفردات معينة وتنتج منها.

دعنا نفكر ونتناقش

متوسط عدد الرحلات الجويّة المغادرة يوميًّا خلال شهر يونيو من أحد المطارات هو 75 رحلة.

هل يمكن استخدام هذه العيّنة لتقدير متوسّط عدد الرحلات μ خلال أشهر السنة؟ لماذا؟

وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

سبق لنا في الصف الحادي عشر تعريف المجتمع الإحصائي والعينة العشوائية والأسباب التي تؤدي إلى أخذ العينات لدراسة المجتمع بدلًا من الحصر الشامل، وذلك لتقدير المتوسط (الوسط) الحسابي للمجتمع μ أو الانحراف المعياري له σ.

ويعتبر الوسط الحسابي للمجتمع μ والانحراف المعياري للمجتمع σ من معالم المجتمع، وعادة ما تكون هذه المعالم مجهولة.

ولتقدير هذه المعالم نلجأ إلى سحب عينة عشوائية منه، ثم نحسب المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S والذي يعتمد على قيم العينة ولا يعتمد على معالم المجتمع.

المعلمة (Parameter): هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

الإحصاءة (Statistic Function): هو اقتران تتعين قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري S.

تقدير المعلمة (Parameter Estimate): هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككلّ وتوزيعه.

في هذا الدرس سوف تتعرف طريقتين تساعدان على إيجاد قيم تقديرية لبعض معالم مجتمع معين:

- **طريقة أولى:** التقدير بنقطة.
- **طريقة ثانية:** التقدير بفترة الثقة.

التقدير بنقطة Point Estimate

التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.

فمثلًا المتوسط الحسابي للعينة العشوائية $\overline{x}$ يستخدم كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي للمجتمع μ، وكذلك الانحراف المعياري للعينة S يستخدم كتقدير بنقطة للانحراف المعياري للمجتمع σ.

التقدير بفترة الثقة Confidence Interval Estimation

علمنا مما سبق أن لكل مجتمع معالم منها المتوسط الحسابي μ والانحراف المعياري σ، ودرسنا كيفية إيجاد التقدير بنقطة لتلك المعالم. وعلمنا أن التقدير بنقطة لإحدى معالم المجتمع هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة، ولذلك فإن احتمال الخطأ في التقدير بنقطة يكون كبيرًا. وبناء عليه فإنه من الأفضل إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو باحتمال معين. إن مثل هذه الفترة تسمى فترة الثقة.

فترة الثقة Confidence Interval

هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).

> **التقدير بفترة الثقة**
>
> **هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معيّن.**

درجة الثقة (مستوى الثقة)
Degree of Confidence (Level of Confidence)

إن درجة الثقة أو مستوى الثقة هو احتمال $(1 - \alpha)$ أن تكون فترة الثقة تحوي القيمة الحقيقية لمعلمة المجتمع قيد الدراسة، وعادة يعبّر عنها كنسبة مئوية.

أما α فهي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى **مستوى المعنوية** أو مستوى الدلالة.

فمثلًا:

- إذا كانت $\alpha = 0.05$ حينها تكون درجة الثقة $1 - \alpha = 0.95$ أي 95%
- إذا كان مستوى الثقة 90% فإن مستوى المعنوية $\alpha = 10\%$
- أيضًا إذا كان مستوى الثقة 99% فإن مستوى المعنوية $\alpha = 1\%$

ومن هذه الخيارات الثلاثة، يعتبر مستوى الثقة 95% هو الأكثر انتشارًا لأنه يؤمن التوازن الأنسب بين الدقة الموضحة من خلال طول فترة الثقة والدقة الموضحة من خلال مستوى الثقة.

تذكر:

المتوسط الحسابي لعينة = $\dfrac{\text{مجموع قيم البيانات}}{\text{عدد البيانات}}$

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

الانحراف المعياري لعينة:

$$s = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}{n}}$$

تذكر:

المتوسط الحسابي للمجتمع

$$\mu = \frac{\Sigma x_i}{N}$$

الانحراف المعياري للمجتمع:

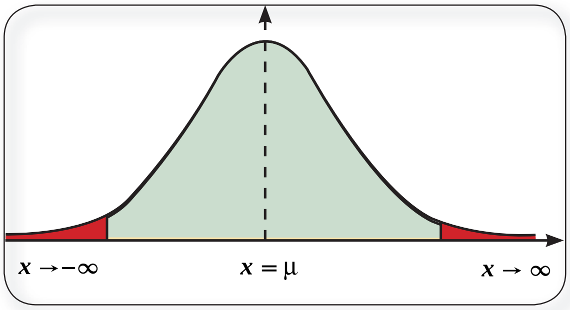
$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(x_i - \overline{x})^2}{N}}$$

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعرفنا فيما سبق على بيان منحنى التوزيع الطبيعي، وعلمنا من خواص التوزيع الطبيعي ما يلي:

- المتوسط الحسابي = الوسيط = المنوال.
- يكون بيان المنحنى على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول محوره $(x = \mu)$.
- يمتد المنحنى من طرفيه إلى ∞ وإلى $-\infty$ (لا يقطع المحور الأفقي).
- المساحة تحت المنحنى تساوي الواحد الصحيح (وحدة مساحة).

المستقيم الرأسي $x = \mu$ يقسم المساحة تحت المنحنى إلى منطقتين متماثلتين مساحة كل منهما تساوي نصف (وحدة مساحة) كما في الشكل (1).



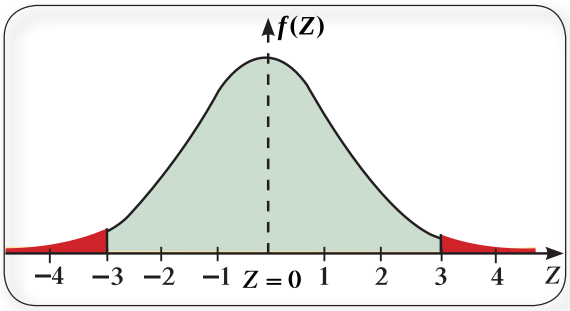
شكل (1)

منحنى التوزيع الطبيعي المعياري:

إذا كان المتوسط الحسابي للتوزيع الطبيعي $\mu = 0$ والانحراف المعياري $\sigma = 1$ يسمى التوزيع الطبيعي **بالتوزيع الطبيعي المعياري**.

الشكل المرسوم يمثّل بيان منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

المستقيم $Z = 0$ هو محور التماثل للمنحنى. تأخذ Z قيمًا موجبة وتزداد جهة اليمين بينما تأخذ Z قيمًا سالبة وتنقص جهة اليسار.

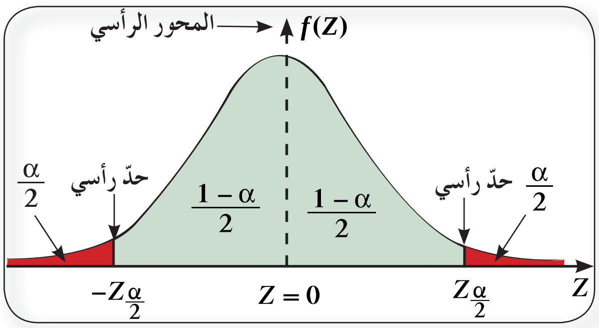


شكل (2)

القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ Critical Value

الشكل (3) المرسوم يبيّن منحنى التوزيع الطبيعي المعياري.

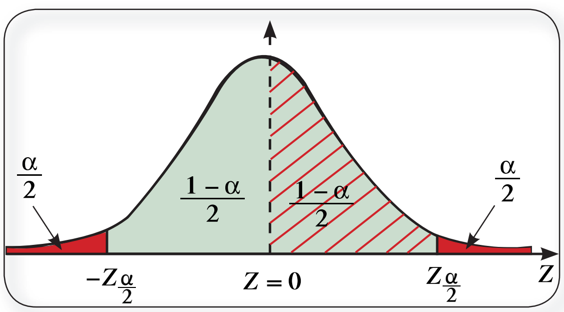
- نعلم أن مساحة المنطقة تحت منحنى التوزيع الطبيعي المعياري تساوي الواحد (وحدة مساحة) والمحور الرأسي يقسم المنطقة تحت المنحنى الى قسمين متطابقين مساحة كل منهما تساوي $\frac{1}{2}$ وحدة مساحة. ومجموع مساحتي الجزئين باللون الأحمر معًا تساوي α وتكون مساحة كل جزء منهما تساوي $\frac{\alpha}{2}$ وعليه تكون مساحة كل من الجزئين باللون الأخضر على جانبي المحور الرأسي $\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{2}$ أي $\frac{1-\alpha}{2}$



شكل (3)

- نعبّر عن الحدين الرأسيين بالرمز $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ وبالرمز $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ حيث $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ يفصل المنطقة التي مساحتها $\frac{\alpha}{2}$ من ذيل الطرف الأيمن عن المنطقة التي مساحتها $\frac{1-\alpha}{2}$ من المستقيم $Z = 0$، بينما $-Z_{\frac{\alpha}{2}}$ يفصل المنطقة التي مساحتها $\frac{\alpha}{2}$ من ذيل الطرف الأيسر عن المنطقة التي مساحتها $\frac{1-\alpha}{2}$ من المستقيم $Z = 0$.

ملاحظة: $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$ ، $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$



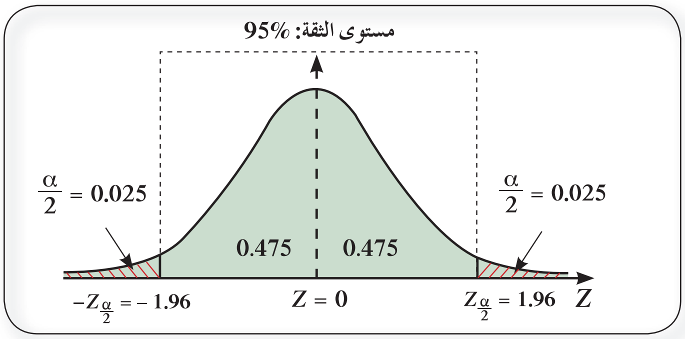
شكل (4)

إيجاد القيمة الحرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

لإيجاد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة للمساحة تحت المنحنى نحسب المساحة $\frac{1-\alpha}{2}$ التي تقع على يسار $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ ويمين الصفر أي في الفترة $[0, Z_{\frac{\alpha}{2}}]$ ثم نكشف عنها في الجدول المرفق في نهاية الوحدة صفحة 194 حيث العمود الأول قيم Z ابتداءً من 0.0 وحتى 3.1 وأكثر. والصف الأول يمثل الأجزاء من المئة لقيم Z، ومنه يمكن تحديد قيمة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ وذلك بجمع قيمتي الصف والعمود لـ Z.

مثال (1)

أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 95% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817

الحل:

$\because$ مستوى الثقة هو 95%

$\therefore\ 1 - \alpha = 0.95 \quad \therefore\ \frac{1-\alpha}{2} = \frac{0.95}{2} = 0.475$

نأخذ جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z) صفحة 194

نبحث في الجدول عن 0.4750 فنجدها على التقاطع الأفقي/العمودي للعددين على الترتيب: 1.9 ، 0.06

وبالتالي القيمة الحرجة هي:

$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.9 + 0.06$

$\therefore\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

حاول أن تحل

1 أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لمستوى ثقة 97% باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري.

هامش الخطأ Margin of Error

أوّلًا: الخطأ بالتقدير بنقطة Point Estimation Error

علمنا فيما سبق أنه يمكن استخدام المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ كتقدير بنقطة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

ومن المتوقع أن تكون قيمة المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$ غير مساوية لقيمة المتوسط الحسابي μ للمجتمع.

تسمى القيمة المطلقة للفرق بين القيمتين السابقتين بالخطأ المعياري وتساوي $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ حيث σ الانحراف المعياري للمجتمع، n عدد قيم العينة (أو حجم العينة).

ثانيًا: الخطأ بالتقدير بفترة Interval Estimation Error

والآن نتعرض للخطأ بالتقدير بفترة فعندما نستخدم عينة لتقدير المتوسط الحسابي μ لمجتمع، يكون الخطأ في التقدير هو القيمة المطلقة للفرق بين المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x}$، والمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

هامش الخطأ E

عند استخدام بيانات عيّنة لتقدير المتوسط الحسابي μ لمجتمع، يكون هامش الخطأ، يرمز إليه بـ E، القيمة العظمى الأكثر ترجيحًا عند درجة ثقة $(1 - \alpha)$ للفرق بين المتوسط الحسابي $\overline{x}$ للعيّنة والمتوسط الحسابي μ للمجتمع.

يسمى أيضًا هامش الخطأ الأكبر في التقدير، ويمكن إيجاده بأخذ ناتج ضرب القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ والخطأ المعياري $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$.

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$ عند درجة ثقة $(1 - \alpha)$.

وحتى يكون الخطأ في التقدير أقل ما يمكن يجب أن تتحقق المتباينة:

$$|\overline{x} - \mu| < E$$

أي أن: $|\mu - \overline{x}| < E$

$$-E < \mu - \overline{x} < E$$

$$\overline{x} - E < \mu < \overline{x} + E$$

وعليه تكون فترة الثقة هي: $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$

التقدير بفترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي

Confidence Interval Estimation for the Mean Value μ of Statistical Population

أوّلًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع معلوم

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي $(\mu \ , \ \sigma^2)$ حيث تباينه σ^2 معلوم وحجم العينة $n > 30$ أو $n \leq 30$ فإن تقدير فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ هو:

$(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$ عند درجة ثقة $(1 - \alpha)$

حيث $\overline{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

وتسمى القيمتان $\overline{x} + E \ , \ \overline{x} - E$ **طرفي فترة الثقة.**

ملاحظة: عند إيجاد فترة الثقة سنكتفي بدرجة الثقة 95% والتي تناظرها القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
(من جدول التوزيع الطبيعي المعياري).

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

إذا كانت σ^2 معلومة و $n > 30$ أو $n \leq 30$.

1. نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96
2. نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$، حيث σ هي الانحراف المعياري للمجتمع.
3. نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

تفسير فترة الثقة

عند اختيار عينات عشوائية مختلفة متساوية في الحجم (n) وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقع أن 95% من فترات الثقة هذه تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع (μ).

فمثلًا عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه (n) وفي كل مرة نحسب $\overline{x}$ وفترة الثقة فإننا نتوقع أن 95 فترة تحوي μ الحقيقية و5 فترات لا تحويها.

مثال (2)

أجريت دراسة لعينة من الإناث حول معدل النبض لديهن فإذا كان حجم عينة الإناث $n = 40$ والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 12.5$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 76.3$. باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

الحل:

1 $\because$ مستوى الثقة 95%

$\therefore$ القيمة الحرجة: $Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$

نلاحظ أن σ معلومة $\qquad \therefore\ E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

$\overline{x} = 76.3 \quad , \quad \sigma = 12.5 \quad , \quad \because\ n = 40$

هامش الخطأ:

$$E = 1.96 \times \frac{12.5}{\sqrt{40}}$$

$$E \approx 3.87379$$

$\therefore$ هامش الخطأ ≈ 3.8738

2 فترة الثقة هي:

$$(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$$

$$= (76.3 - 3.8738 \ , \ 76.3 + 3.8738)$$

$$= (72.4262 \ , \ 80.1738)$$

3 عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 40)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

2 من المثال (2) إذا أجريت الدراسة على عينة أخرى من الإناث حجمها 25 والانحراف المعياري لمجتمع الإناث $\sigma = 3.6$ والمتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 18.4$

باستخدام مستوى ثقة 95%

1 أوجد هامش الخطأ.

2 أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

3 فسّر فترة الثقة.

ثانيًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n > 30$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ

1 نوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% وهي 1.96

2 نوجد هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$ ، حيث S هي الانحراف المعياري للعينة.

3 نوجد فترة الثقة $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

مثال (3)

عينة عشوائية حجمها 36، فإذا كان المتوسط الحسابي للعينة 60 وتباينها 16، باستخدام مستوى ثقة 95%:

1. أوجد هامش الخطأ.
2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
3. فسّر فترة الثقة.

الحل:

حجم العينة: $n = 36$, المتوسط الحسابي: $\overline{x} = 60$

التباين: $S^2 = 16$ ، الانحراف المعياري: $S = 4$

1. $\because$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore \ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

$$\because \ \sigma^2 \text{ غير معلوم ، } n > 30$$

$$E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

$$= 1.96 \times \frac{4}{\sqrt{36}}$$

$$= 1.3066$$

$\therefore$ هامش الخطأ ≈ 1.3067

2. فترة الثقة هي:

$$(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$$

$$= (60 - 1.3067 \ , \ 60 + 1.3067)$$

$$= (58.6933 \ , \ 61.3067)$$

3. عند اختيار 100 عينة عشوائية ذات الحجم نفسه $(n = 36)$ وحساب حدود فترة الثقة لكل عينة فإننا نتوقّع أن 95 فترة تحوي القيمة الحقيقية للمتوسط الحسابي للمجتمع μ.

حاول أن تحل

3. أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 81$ ومتوسطها الحسابي $\overline{x} = 50$، وانحرافها المعياري $S = 9$، باستخدام مستوى ثقة 95%.
   1. أوجد هامش الخطأ.
   2. أوجد فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.
   3. فسّر فترة الثقة.

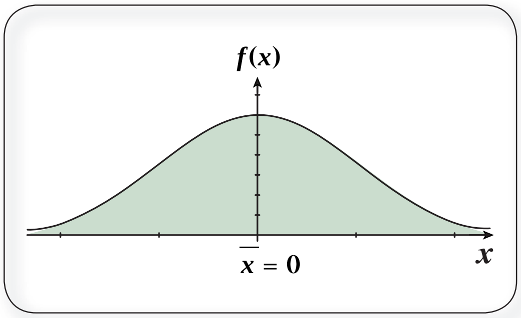
ثالثًا: إذا كان التباين σ^2 للمجتمع غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$

إذا أخذت عينة عشوائية حجمها n من مجتمع طبيعي تباينه σ^2 غير معلوم وحجم العينة $n \leqslant 30$ فإن توزيع العينة لا يؤول إلى التوزيع الطبيعي وفي هذه الحالة يلزمنا استخدام توزيع آخر هو توزيع t **للعينات الصغيرة** التي حجمها $n \leqslant 30$ ويكون تقدير فترة الثقة $(1 - \alpha)$ للمتوسط الحسابي μ هو $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.

حيث $\overline{x}$ المتوسط الحسابي للعينة، E هامش الخطأ.

خواص التوزيع t Properties of t Distribution

1 توزيع متماثل حول متوسطه الحسابي والذي يساوي صفرًا، ويمتد إلى ∞ من جهة اليمين وإلى $-\infty$ من جهة اليسار ويزداد قربًا من الصفر في الجهتين.



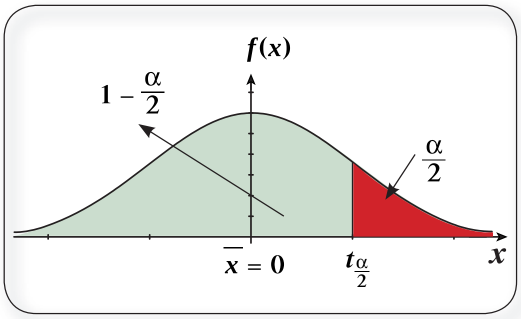
2 انحرافه المعياري أكبر من الواحد.

3 يعتمد هذا التوزيع على درجات الحرية والتي تساوي (حجم العينة $-$ 1) أي $(n-1)$.

4 التوزيع t يشبه التوزيع الطبيعي إلّا أن قمته أكثر انخفاضًا من التوزيع الطبيعي.

5 كلما زادت درجات الحرية اقترب هذا التوزيع من التوزيع الطبيعي ويقترب انحرافه المعياري إلى الواحد الصحيح.

إيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع t



لإيجاد القيمة الحرجة من جدول توزيع t حيث يبيّن العمود الأول قيم درجات الحرية $(n-1)$ وتبدأ من 1 إلى 30 وأكثر والصف الأول يمثّل قيم $\frac{\alpha}{2}$ ومنه يمكن تحديد $t_{\frac{\alpha}{2}}$. لاحظ أن:

$$t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$$

هامش الخطأ للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \le 30$)

Margin of Error for Mean Value of Statistical Population where σ^2 is not known and $n \le 30$

$$E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$$

حيث S الانحراف المعياري للعينة

فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي (في حالة σ^2 غير معلوم، $n \le 30$)

Confidence Interval for Mean Value of Statistical Population where σ^2 is not known and and $n \le 30$

$$(\bar{x}-E \ , \ \bar{x}+E)$$

الخطوات المتبعة لإيجاد فترة الثقة للمتوسط الحساب μ إذا كانت σ^2 غير معلومة، $n \le 30$:

1 نوجد درجات الحرية $(n-1)$.

2 نوجد القيمة الحرجة $t_{\frac{\alpha}{2}}$ المناظرة لدرجة ثقة 95% من جدول توزيع t.

3 نوجد هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

4 نوجد فترة الثقة $(\bar{x}-E \ , \ \bar{x}+E)$.

مثال (4)

أخذت عينة عشوائية من مجتمع طبيعي حجمها $n = 25$، فإذا كان الانحراف المعياري للعينة (S) يساوي 10 ومتوسطها الحسابي $(\overline{x})$ يساوي 15، استخدم مستوى ثقة 95% لإيجاد:

1 هامش الخطأ.

2 فترة الثقة للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ.

الحل:

1 $\because$ σ^2 غير معلوم ، $n \leq 30$

$\therefore$ نستخدم توزيع t.

$$\because \quad n = 25$$

$\therefore$ درجات الحرية: $n - 1 = 25 - 1 = 24$

$\because$ مستوى الثقة: $1 - \alpha = 95\%$

$$\therefore \quad 1 - \alpha = 0.95 \Longrightarrow \alpha = 0.050$$

$$\therefore \quad \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع t تكون قيمة $t_{0.025} = t_{\frac{\alpha}{2}}$ مناظرة للعدد 2.064

هامش الخطأ $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

$$= 2.064 \times \frac{10}{\sqrt{25}}$$

$\therefore$ هامش الخطأ $= 4.128$

2 فترة الثقة: $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$

$$= (15 - 4.128 \ , \ 15 + 4.128)$$

$$= (10.872 \ , \ 19.128)$$

حاول أن تحل

4 أوجد فترة ثقة 95% للمتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي μ علمًا أن العينة أخذت من مجتمع طبيعي.

إذا كان لدينا $n = 13$, $S = 0.3$, $\overline{x} = 8.4$

4-2

اختبارات الفروض الإحصائية

Statistical Hypotheses Testing

سوف تتعلم

- القيمة الحرجة.
- مستوى المعنوية.
- درجة المعنوية.
- الفروض.
- اختبار الفروض.
- فرض العدم.
- الفرض البديل.

المفردات والمصطلحات:

- الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis
- المقياس الإحصائي Statistical Scale
- اختبارات الفروض الإحصائية Statistical Hypotheses Testing
- فرض العدم Null Hypothesis
- الفرض البديل Alternative Hypothesis

دعنا نفكر ونتناقش

ينتج مصنع نوعًا معينًا من المعلبات مسجّل على العلبة أن الوزن الصافي 200 g.
فإذا تمّ أخذ عينة حجمها 100 علبة وتمّ حساب المتوسط الحسابي لأوزان هذه العينة فوجد أنه 197.3 g، فهل يمكن الحكم على هذا المصنع بأنه يقوم بغش تجاري؟
ما هي حيثيات هذا الحكم؟

نحن نعلم أنه في كثير من الأحيان وفي مواقف معينة نحتاج إلى اتخاذ قرار بناء على معلومات محددة وحيثيات معقولة لها مبررها، لذلك دعت الضرورة إلى دراسة ما يسمى بالفرض الإحصائي واختبارات الفروض الإحصائية.

تعريف: الفرض الإحصائي Statistic Hypothesis

هو ادعاء معيّن مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.

تعريف: المقياس الإحصائي

هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.

تعريف: اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية)

هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.

ملاحظة: سنكتفي في هذا الموضوع بدراسة معلمة واحدة من معالم المجتمع وهي المتوسط الحسابي μ.

إليك بعض الأمثلة عن الفروض التي يمكن اختبارها من خلال الطرق التي سنطوّرها في هذا الدرس. على سبيل المثال:

- **في إدارة الأعمال:** تدّعي إحدى الصحف في مقال لها أنّ معظم الموظّفين يجدون عملًا عن طريق وكالات التوظيف.
- **في الطب:** يدّعي باحثون في الطبّ أنّ متوسّط درجة حرارة جسم أي بالغ معافى ليست $37^{\circ}C$.

- **في سلامة الطيران المدنيّ:** تدّعي إدارة الطيران المدني في الكويت أن متوسط وزن المسافر (مع حقائبه) يتعدّى الوزن المسموح منذ عشرين سنة والبالغ 84 kg

فرض العدم والفرض البديل Null and Alternative Hypothesis

- فرض العدم (H_0): يفيد بأنّ قيمة معلمة المجتمع (مثل المتوسّط الحسابي μ) تساوي قيمة مزعومة.
نختبر فرض العدم مباشرة أي نفترض بأنّه صحيح ونتوصّل إلى خلاصة برفض أو عدم رفض H_0.
- الفرض البديل (H_1): يفيد بأن للمعلمة قيمة تختلف نوعًا ما عن فرض العدم (H_0).
- يضم الشكل الرمزي للفرض البديل أحد هذه الرموز: $>$ أو $<$ أو $\neq$
وستقتصر دراستنا على الحالة $(\neq)$. فمثلًا: $H_1 : \mu \neq 98.6$ ، $H_0 : \mu = 98.6$

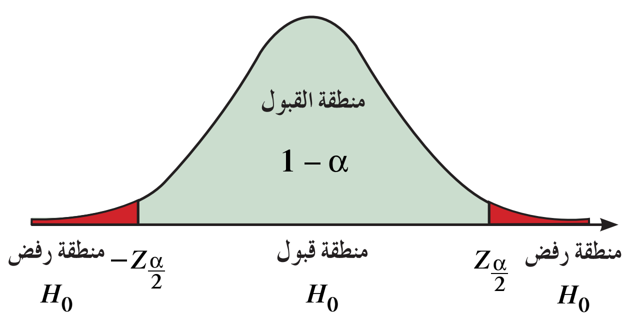
الخطوات المتبعة لإجراء اختبار الفروض الإحصائية:

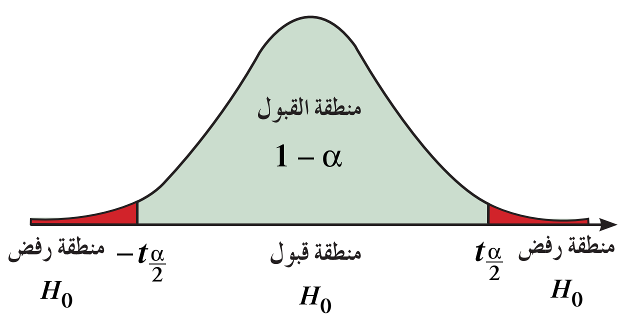
1. صياغة الفروض الإحصائية (فرض العدم H_0 والفرض البديل H_1).
2. التحقق من الانحراف المعياري σ للمجتمع (معلوم أم غير معلوم) وتحديد حجم العينة (n) ومن ثم إيجاد المقياس الإحصائي للاختبار (Z أو t)، (مسترشدًا بالجدول التالي):

الانحراف المعياري (σ)	المقياس الإحصائي (Z أو t)	حجم العينة (n)
معلوم	$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$	لا يشترط حجم معين للعينة
غير معلوم	$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n > 30$
	$t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$	$n \leq 30$

3. تحديد مستوى المعنوية α وحساب القيمة الجدولية $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول التوزيع الطبيعي المعياري أو القيمة الجدولية $t_{\frac{\alpha}{2}}$ من جدول t ذي درجات حرية.
4. تحديد منطقة القبول: $(-Z_{\frac{\alpha}{2}} , Z_{\frac{\alpha}{2}})$ أو $(-t_{\frac{\alpha}{2}} , t_{\frac{\alpha}{2}})$ كما هو موضّح بالشكل.
5. اتخاذ القرار الإحصائي (قبول فرض العدم) أو (رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل).

ملاحظة: ستقتصر دراستنا على مستوى ثقة 95%.





إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع معلوم

مثال (1)

تزعم شركة أن متوسط رواتب موظفيها يساوي 4 000 دينار كويتي. إذا أخذت عينة من 25 موظفًا، ووجد أن متوسط رواتب العينة هو 3 950 دينارًا كويتيًّا فإذا علمت أن الانحراف المعياري للمجتمع (دينارًا) $\sigma = 125$

وضّح كيفية إجراء الاختبار الإحصائي بمستوى ثقة 95%

الحل:

1 صياغة الفروض

$H_0 : \mu = 4\,000$ مقابل $H_1 : \mu \neq 4\,000$

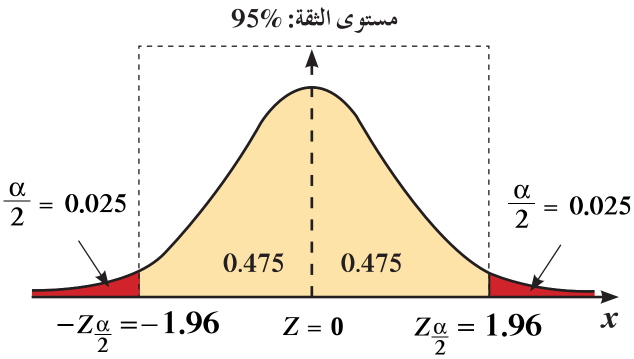
2 $\because$ $\sigma = 125$ (معلومة)

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z $\qquad Z = \dfrac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

$\overline{x} = 3\,950 \quad , \quad n = 25 \quad \because$

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

$$\therefore\ Z = \frac{3\,950 - 4\,000}{\frac{125}{\sqrt{25}}} = -2$$



3 $\because$ مستوى الثقة 95%

$$\therefore\ \alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

$$\therefore\ Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$$

4 منطقة القبول هي $(-1.96\ ,\ 1.96)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي: $-2 \notin (-1.96\ ,\ 1.96)$ $\because$

$\therefore$ القرار: نرفض فرض العدم $\mu = 4\,000$ ونقبل الفرض البديل $\mu \neq 4\,000$

حاول أن تحل

1 بيّنت الدراسة أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل أسلاك معدنية هو

$\mu = 1\,800$ kg مع انحراف معياري $\sigma = 150$ kg

ويؤكد الأخصائيون في المصنع المنتج لهذه الاسلاك أن بإمكانهم زيادة قوة تحمل هذه الأسلاك، وتأكيدًا على ذلك تمّ اختبار عينة من 40 سلكًا فتبيّن أن متوسط قوة تحمل هذه الأسلاك يساوي 1 840 kg

هل يمكن قبول مثل هذا الفرض بمستوى معنوية $\alpha = 0.05$؟

إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع غير معلوم، $n > 30$

مثال (2)

إذا كانت $S = 1.79$, $\overline{x} = 37.2$, $n = 80$

اختبر الفرض بأن $\mu = 37$ عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

الحل:

$S = 1.79$, $\overline{x} = 37.2$, $n = 80$

1 صياغة الفروض:

$H_0: \mu = 37$ مقابل $H_1: \mu \neq 37$

2 $\because$ σ غير معلومة، $n > 30$

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي Z:

$$Z = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$Z = \frac{37.2 - 37}{\frac{1.79}{\sqrt{80}}} = 0.999$$

3 تحديد مستوى المعنوية α:

$\because \alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$

$\therefore Z_{0.025} = 1.96$

4 منطقة القبول هي $(-1.96 \ , \ 1.96)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي:

$\because \ 0.999 \in (-1.96 \ , \ 1.96)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 37$

حاول أن تحل

2 متوسط العمر بالساعات لعينة من 100 مصباح كهربائي مصنعة في أحد المصانع $\overline{x} = 1\,570$ بانحراف معياري $S = 120$.

يقول صاحب المصنع إنّ متوسط العمر بالساعات $\mu = 1\,600$ للمصابيح المصنعة في المصنع.

اختبر صحة الفرض $\mu = 1\,600$ مقابل الفرض $\mu \neq 1\,600$ وباختيار مستوى معنوية $\alpha = 0.05$

إذا كان الانحراف المعياري σ لمجتمع غير معلوم، $n \le 30$

مثال (3)

يعتقد مدير شركة دراسات إحصائية أن متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة يساوي 290 دينارًا كويتيًا.

فإذا أخذت عينة عشوائية من 10 منازل تبيّن أن متوسطها الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 283$ وانحرافها المعياري (دينارًا) $S = 32$.

فهل يمكن الاعتماد على هذه العينة لتأكيد ما افترضه؟

استخدم مستوى ثقة 95% (علمًا بأن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًا).

الحل:

$n = 10 \quad , \quad \overline{x} = 283 \quad , \quad S = 32$

1 صياغة الفروض

$H_0 : \mu = 290$ مقابل $H_1 : \mu \neq 290$

2 σ غير معلومة، $10 < 30 \quad , \quad n = 10$

$\therefore$ نستخدم المقياس الإحصائي t :

$$t = \frac{\overline{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$$

$$t = \frac{283 - 290}{\frac{32}{\sqrt{10}}}$$

$$t \approx -0.6917$$

3 $n = 10 \quad \because$ درجات الحرية: $n - 1 = 10 - 1 = 9$

مستوى الثقة 95% $\quad 1 - \alpha = 0.95$

$$\alpha = 0.05 \longrightarrow \frac{\alpha}{2} = 0.025$$

من جدول توزيع t $\quad \therefore \; t_{0.025} = 2.262$

4 منطقة القبول هي $(-2.262 \; , \; 2.262)$

5 اتخاذ القرار الإحصائي: $\because \; -0.6917 \in (-2.262 \; , \; 2.262)$

$\therefore$ القرار بقبول فرض العدم $\mu = 290$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا أجريت دراسة إحصائية أخرى على المدينة ذاتها وتبيّن من خلالها أن $S = 5 \; , \; \overline{x} = 296$ لعينة من 10 منازل مع استخدام درجة الثقة نفسها.

فهل يبقى افتراض المدير عند الشركة صحيحًا أم لا؟ وضّح إجابتك.

4-3

الارتباط والانحدار

Correlation and Regression

سوف تتعلم

- مفهوم الارتباط وأنواعه.
- رسم مخطط الانتشار.
- إيجاد مُعامل الارتباط الخطي.
- خواص مُعامل الارتباط.
- إيجاد مُعامل ارتباط بيرسون.
- مفهوم الانحدار.
- إيجاد معادلة خط الانحدار.
- تنبؤ قيمة أحد المتغيرين.
- التقدير باستخدام معادلة خط الانحدار.
- التنبؤ.
- إيجاد مقدار الخطأ.

المفردات والمصطلحات:

- الارتباط Correlation
- ارتباط طردي Positive Correlation
- ارتباط عكسي Negative Correlation
- مُعامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient
- الانحدار Regression
- معادلة خط الانحدار Regression Line Equation
- التنبؤ Prediction
- مقدار الخطأ Error Value

دعنا نفكر ونتناقش

هل تساءلت يومًا: كيف تحسب العلاقة بين الطول والوزن؟

ما الذي يربط بين التدخين والإصابة بمرض السرطان؟

كيف نجد رابطًا بين وزن سيارة واستهلاكها للوقود؟

كيف يتغيّر سعر الذهب مع تغير قيمة الدولار الأمريكي؟

وما هي أفضل وسيلة للتقدير لنقترب من الحقيقة؟

أوّلًا: الارتباط Correlation

من دراستنا السابقة تمّ عرض بعض المقاييس الإحصائية مثل مقاييس النزعة المركزية (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال) ومقاييس التشتت (المدى – التباين – الانحراف المعياري).

نلاحظ أن هذه المقاييس كانت تصف شكل البيانات التي تمّ جمعها من ظاهرة إحصائية واحدة أي من متغير واحد والذي يمكن الحصول عليه من العينة. بينما يقابلنا في حياتنا العملية مواقف كثيرة تتضمن متغيرين (ظاهرتين) أو أكثر ويكون تساؤلنا: هل هناك علاقة بين هذه المتغيرات؟ وما هو شكل هذه العلاقة؟ وأيضًا كيف يمكن التنبؤ بقيمة أحد هذين المتغيرين إذا علم قيمة المتغير الآخر؟ وكثيرًا ما يرى الباحثون ضرورة دراسة العلاقة بين متغيرين (ظاهرتين) كما يتضح من الأمثلة التالية:

- الطول والوزن.
- التدخين والإصابة بمرض السرطان.
- وزن سيارة واستهلاكها للوقود.
- الإنفاق والدخل.
- سعر السلعة والكمية المعروضة منها.
- العمر وضغط الدم.

والأمثلة في هذا المجال كثيرة ومتعددة ولدراسة العلاقة بين هذه الظواهر ندرس ما يسمى الارتباط.

تعريف

الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.

سنرمز للمتغير الأول بالرمز « x » وهو المتغير الذي يتم تحديده من قبل الباحث القائم بالدراسة ويسمى «**بالمتغير المستقل**».

ونرمز للمتغير الثاني بالرمز « y » وهذا المتغير غير مستقل بذاته لأن نتيجته مرتبطة بالمتغير المستقل ولذلك يسمى «**بالمتغير التابع**».

أنواع الارتباط

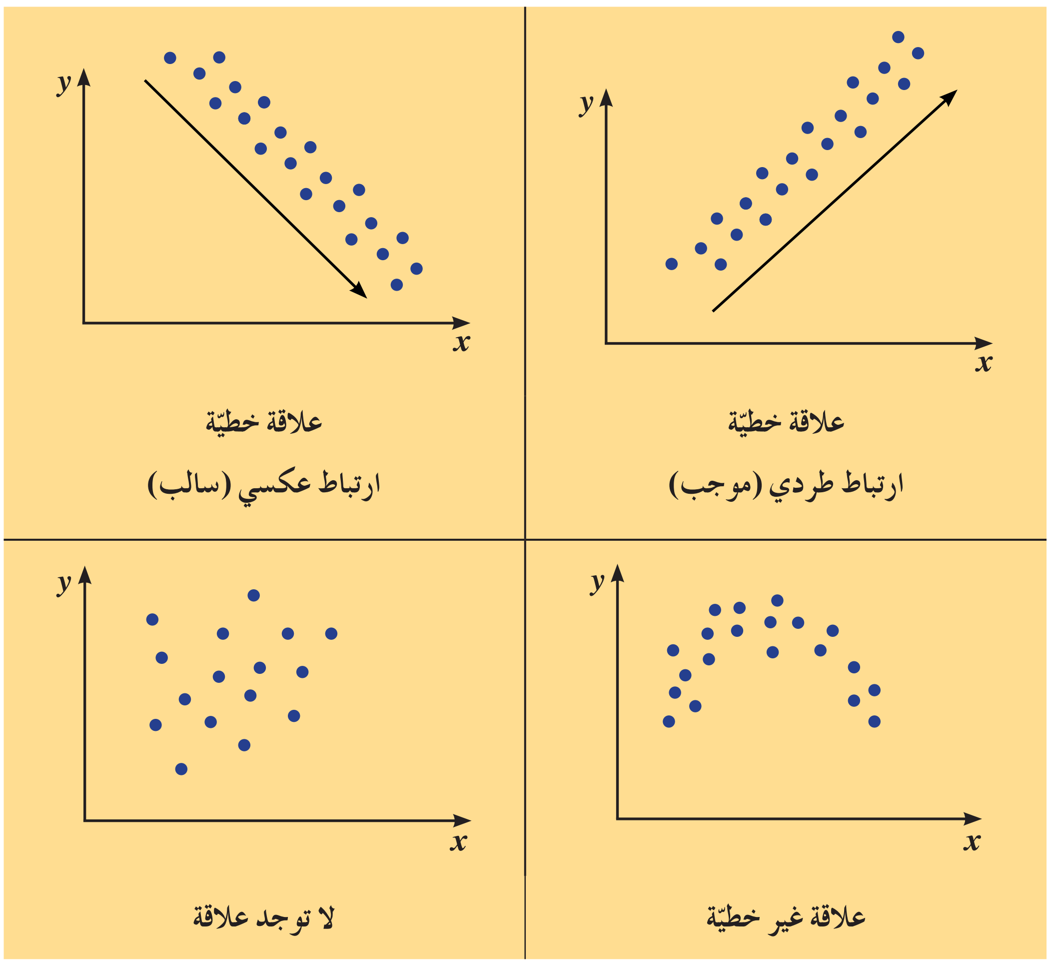
1 ارتباط طردي (موجب)

هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في نفس الاتجاه.

2 ارتباط عكسي (سالب)

هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في الاتجاه المضاد.

بعض مخططات الانتشار التي توضّح أنواع الارتباط



تذكر:

مخطط الانتشار هو تمثيل بياني لعدد من الأزواج المرتبة (x , y) يستخدم لوصف العلاقة بين المتغيرين.

مثال (1)

البيانات التالية تبيّن العلاقة بين عمر الشخص وعدد ساعات التمرينات الرياضية التي يقوم بها:

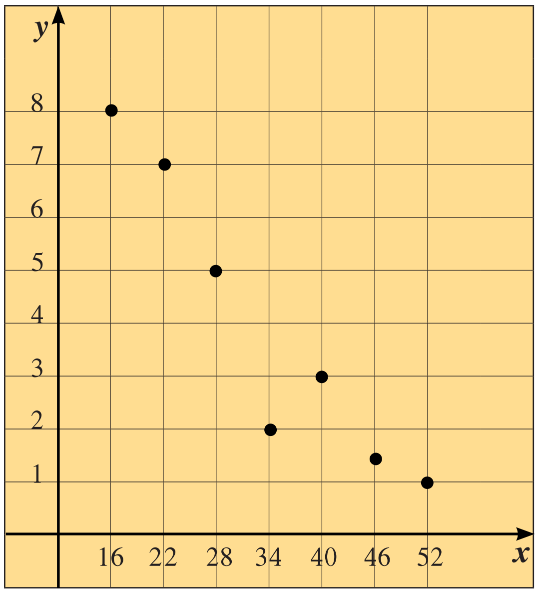
العمر (x)	16	22	28	34	40	46	52
عدد ساعات التمرينات (y)	8	7	5	2	3	$1\frac{1}{2}$	1

a ارسم مخطط الانتشار.

b حدّد نوع العلاقة.

الحل:

a



b العلاقة خطيّة عكسية.

حاول أن تحل

1 ارسم مخطط الانتشار للبيانات التالية وحدّد نوع العلاقة التي تعبر عنها:

x	2	6	5	2	7	3	4	7	5
y	2	3	1	4	1	5	3	4	5

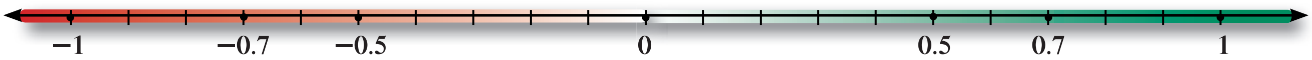
مُعامل الارتباط الخطي Linear Correlation Coefficient

تعلم أن الاستنتاجات المبنيّة على المعاينات البصريّة لمخطط الانتشار هي نسبيّة بامتياز، لذا فنحن بحاجة إلى قياسات أكثر دقة وموضوعية بالتالي نستخدم مُعامل الارتباط الخطّي (r).

تعريف

مُعامل الارتباط الخطّي (r) هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيّرين يمثّلان بيانات كمّية، حيث $-1 \le r \le 1$

خواص مُعامل الارتباط (r)



1. $-1 \le r \le 1 \quad , \quad r \in [-1,1]$
2. إذا كانت $r = 1$ يكون الارتباط **طردي (موجب) تام.**
3. إذا كانت $r = -1$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) تام.**
4. إذا كانت $r = 0$ ينعدم الارتباط.
5. إذا كانت $r \in [0.7, 1)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) قوي.**
6. إذا كانت $r \in [0.5, 0.7)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) متوسط.**
7. إذا كانت $r \in (0, 0.5)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) ضعيف .**
8. إذا كانت $r \in (-0.5, 0)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) ضعيف.**
9. إذا كانت $r \in [-0.5, -0.7)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) متوسط.**
10. إذا كانت $r \in [-0.7, -1)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) قوي.**

مُعامل ارتباط بيرسون r: Pearson Correlation Coefficient r:

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{nS_x \cdot S_y}$$

حيث: (الانحراف المعياري للمتغير x) ...... = $S_x = \sqrt{\frac{\Sigma(x-\bar{x})^2}{n}}$

(الانحراف المعياري للمتغير y) ...... = $S_y = \sqrt{\frac{\Sigma(y-\bar{y})^2}{n}}$

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\,\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

مثال (2)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوة الارتباط.

x	1	2	3	4	5
y	3	5	7	9	11

الحل:

مُعامل الارتباط:

$$r = \frac{\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\Sigma(x-\bar{x})^2}\,\sqrt{\Sigma(y-\bar{y})^2}}$$

$$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = 3 \quad , \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = 7$$

x	y	$x-\bar{x}$	$y-\bar{y}$	$(x-\bar{x})^2$	$(y-\bar{y})^2$	$(x-\bar{x})(y-\bar{y})$	
1	3	-2	-4	4	16	8	
2	5	-1	-2	1	4	2	
3	7	0	0	0	0	0	
4	9	1	2	1	4	2	
5	11	2	4	4	16	8	
$\Sigma x = 15$	$\Sigma y = 35$			$\Sigma(x-\bar{x})^2 = 10$	$\Sigma(y-\bar{y})^2 = 40$	$\Sigma(x-\bar{x})(y-\bar{y}) = 20$	المجموع

$$\therefore\ r = \frac{20}{\sqrt{10} \times \sqrt{40}} = 1$$

نوع الارتباط: طردي (موجب) تام.

حاول أن تحل

2 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وحدّد نوعه وقوة الارتباط:

x	1	2	3	4	5
y	1	-1	-4	-6	-5

صيغة أخرى لمعامل ارتباط بيرسون

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

مثال (3)

احسب مُعامل الارتباط الخطي للمتغيرين التاليين وبيّن نوعه وقوته.

x	1	2	3	4	5	6
y	4	7	8	3	5	5

الحل:

$n = 6$

x	y	xy	x^2	y^2	
1	4	4	1	16	
2	7	14	4	49	
3	8	24	9	64	
4	3	12	16	9	
5	5	25	25	25	
6	5	30	36	25	
$\Sigma x = 21$	$\Sigma y = 32$	$\Sigma xy = 109$	$\Sigma x^2 = 91$	$\Sigma y^2 = 188$	المجموع

$$r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}\ \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$$

$$r = \frac{6 \times 109 - 21 \times 32}{\sqrt{6 \times 91 - (21)^2}\ \sqrt{6 \times 188 - (32)^2}}$$

$$r = \frac{-18}{\sqrt{105} \times \sqrt{104}}$$

$r \approx -0.172$ ارتباط عكسي (سالب) ضعيف

حاول أن تحل

3 احسب مُعامل الارتباط الخطي للبيانات التالية وبيّن نوعه وقوته:

x	1	2	3	4	5	6
y	98	99	75	40	100	150

ثانيًا: الانحدار Regression

سوف نتعلّم وصف العلاقة بين متغيّرين بإيجاد معادلة الخط المستقيم الممثّل لهذه العلاقة.

يسمّى هذا الخط المستقيم **بخط الانحدار**، وتسمّى معادلته **بمعادلة خط الانحدار**.

تعريف

الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.

تعريف

معادلة خط الانحدار: هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيم أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

سبق لنا دراسة معادلة الخط المستقيم على الصورة: $y = b_1 x + b_0$ حيث b_1 ترمز إلى ميل هذا المستقيم، $|b_0|$ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات.

في الإحصاء توجد طرق متعددة لإيجاد معادلة خط انحدار مستقيم والتي تساعدنا في التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين ومنها الطريقة التالية:

تعريف

$\hat{y} = b_0 + b_1 x$، حيث $|b_0|$ ترمز إلى طول الجزء المقطوع من محور الصادات، b_1 ترمز إلى ميل المستقيم.

حيث: $$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} \quad , \quad b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

حيث: $$\bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} \quad , \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n}$$

وهذا ما يسمى **بطريقة المربعات الصغرى** التي تتلخص خطواتها فيما يلي:

1. تعيين قيمة b_1
2. تعيين قيمة b_0
3. نكتب معادلة خط الانحدار: $\hat{y} = b_0 + b_1 x$
4. التنبؤ بقيمة y إذا علمت قيمة x
5. تحديد مقدار الخطأ في التنبؤ

مقدار الخطأ = |القيمة الجدولية — القيمة التي تحقق معادلة الانحدار|

مقدار الخطأ = $|y_x - \hat{y}_x|$

مثال (4)

باستخدام البيانات التالية لقيم y ، x:

x	1	3	5	7	9
y	2	5	9	10	14

أوجد:

a. معادلة خط الانحدار.

b. قيمة y عندما $x = 10$

c. مقدار الخطأ عندما $x = 5$

الحل:

a.

	x	y	$x\,y$	x^2
	1	2	2	1
	3	5	15	9
	5	9	45	25
	7	10	70	49
	9	14	126	81
المجموع	$\Sigma x = 25$	$\Sigma y = 40$	$\Sigma xy = 258$	$\Sigma x^2 = 165$

$$n = 5 \;,\; \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{25}{5} = 5 \;,\; \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{40}{5} = 8$$

$$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{5 \times 258 - 25 \times 40}{5 \times 165 - 25 \times 25} = 1.45$$

$$b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x} = 8 - 1.45 \times 5 = 0.75$$

∴ معادلة خط الانحدار هي:

$$\hat{y} = b_0 + b_1 x = 0.75 + 1.45x$$

b. عندما $x = 10$ فإن:

$$y = 0.75 + 1.45 \times 10 = 15.25$$

c من الجدول $y = 9$

من المعادلة: $\hat{y} = 0.75 + 1.45 \times 5 = 8$

∴ مقدار الخطأ: $|y_5 - \hat{y}_5| = |9 - 8| = 1$

حاول أن تحل

4 من الجدول التالي:

x	4	5	8	9	10	12
y	2	4	5	8	6	11

أوجد:

a معادلة خط الانحدار.

b قيمة y عندما $x = 10$

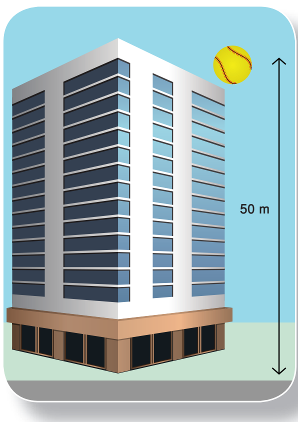
c مقدار الخطأ عندما $x = 10$

مثال (5)

سقطت كرة من ارتفاع $50\,m$، وتمّ تسجيل المسافات (بالمتر) التي قطعتها هذه الكرة كل $0.5\,s$ لمدة ثلاث ثوان.

فأتت النتائج كما يوضح الجدول التالي:

الوقت (x)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3
المسافة (y)	0	1.2	4.9	11	19.5	30.5	44



a أوجد معادلة خط الانحدار.

b قدّر قيمة المسافة y عندما $x = 4$

c أوجد مقدار الخطأ في المسافة عندما $x = 2.5\,s$

الحل:

a

	x	y	$x\,y$	x^2
	0	0	0	0
	0.5	1.2	0.6	0.25
	1	4.9	4.9	1
	1.5	11	16.5	2.25
	2	19.5	39	4
	2.5	30.5	76.25	6.25
	3	44	132	9
المجموع	$\Sigma x = 10.5$	$\Sigma y = 111.1$	$\Sigma xy = 269.25$	$\Sigma x^2 = 22.75$

$$n = 7 \quad , \quad \bar{x} = \frac{\Sigma x}{n} = \frac{10.5}{7} = 1.5 \quad , \quad \bar{y} = \frac{\Sigma y}{n} = \frac{111.1}{7} = 15.87$$

$$b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} = \frac{7 \times 269.25 - 10.5 \times 111.1}{7 \times 22.75 - (10.5)^2} = \frac{718.2}{49}$$

$$b_1 \approx 14.66$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1\overline{x}$$
$$= 15.87 - 14.66 \times 1.5$$
$$= -6.12$$

معادلة خط الانحدار هي: $\hat{y} = b_0 + b_1x = -6.12 + 14.66x$

b التنبؤ: $\because \ \hat{y} = -6.12 + 14.66x$

$\therefore$ المسافة y عندما $x = 4$ هي:

$$\hat{y}_4 = -6.12 + 14.66 \times 4 = 52.52\text{ m}$$

c مقدار الخطأ عند $x = 2.5\text{ s}$

من المعادلة: $\hat{y} = -6.12 + 14.66x$

نجد أن: $\hat{y}_{2.5} = -6.12 + 14.66 \times 2.5 = 30.53$

من الجدول عند $x = 2.5\text{ s}$

نجد أن: $y = 30.5\text{ s}$

$\therefore$ مقدار الخطأ: $|y_x - \hat{y}_x|$

$$= |30.5 - 30.53|$$
$$= 0.03$$

حاول أن تحل

5 في الجدول التالي، المتغير x هو تكلفة إنتاج فيلم سينمائي (بملايين الدولارات) والمتغيّر y هو مردود هذا الفيلم.

التكلفة (x)	62	90	50	35	200	100	95
المردود (y)	65	64	48	57	601	146	47

a أوجد معادلة خط الانحدار.

b قدّر مردود فيلم بلغت تكلفته 55 مليون دولار.

c أوجد مقدار الخطأ لفيلم بلغت تكلفته 90 مليون دولار.

المرشد لحل المسائل

نظرًا لأهميّة المياه بالنسبة إلى صحة الإنسان وحياته، قررت مؤسسة تعنى بذلك، القيام بحملة تهدف إلى التأكد من أن كل شخص يستهلك متوسط قدره 2 000 ml يوميًّا من مياه الشرب.

في دراسة سابقة لعينة من 100 شخص، لاحظت المؤسسة أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\bar{x} = 1850$ ml مع انحراف معياري $S = 900$ ml.

وفي دراسة جديدة لعينة من 100 شخص، وبعد القيام بحملتها، لاحظت أن المتوسط الحسابي للاستهلاك: $\bar{x} = 1900$ ml مع انحراف معياري $S = 300$ ml.

اعتقدت المؤسسة أنّ حملتها قد نجحت بما أنّ المتوسط الحسابي للاستهلاك قد ازداد 50 ml وقد اقترب كثيرًا من هدفها وهو 2 000 ml يوميًّا للشخص الواحد.

هل المؤسسة على حق؟ اشرح.

الحل:

وضع يوسف جدولًا ليختبر فرضية الشركة من خلال اختبارات إحصائية مع:

$H_0 : \mu = 2\,000$ مقابل $H_1 : \mu \neq 2\,000$ ، ومستوى الثقة 0.95

	الدراسة السابقة	الدراسة الجديدة
المعايير	$\bar{x} = 1850 \;,\; S = 900 \;,\; n = 100$	$\bar{x} = 1900 \;,\; S = 300 \;,\; n = 100$
القيمة الجدولية	$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$	$Z_{\frac{\alpha}{2}} = 1.96$
قيمة الاختبار الإحصائي	$Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}} = \dfrac{1850 - 2\,000}{\frac{900}{\sqrt{100}}} = -1.66$	$Z = \dfrac{1900 - 2\,000}{\frac{300}{\sqrt{100}}} = -3.33$
الفترة	$(-1.96 \;,\; 1.96)$	$(-1.96 \;,\; 1.96)$
القرار	$\because\; -1.66 \in (-1.96 \;,\; 1.96)$ قبول $H_0 : \mu = 2\,000$ ml	$\because\; -3.33 \notin (-1.96 \;,\; 1.96)$ رفض H_0 والأخذ بـ: $H_1 : \mu \neq 2\,000$ ml

الاستنتاج:

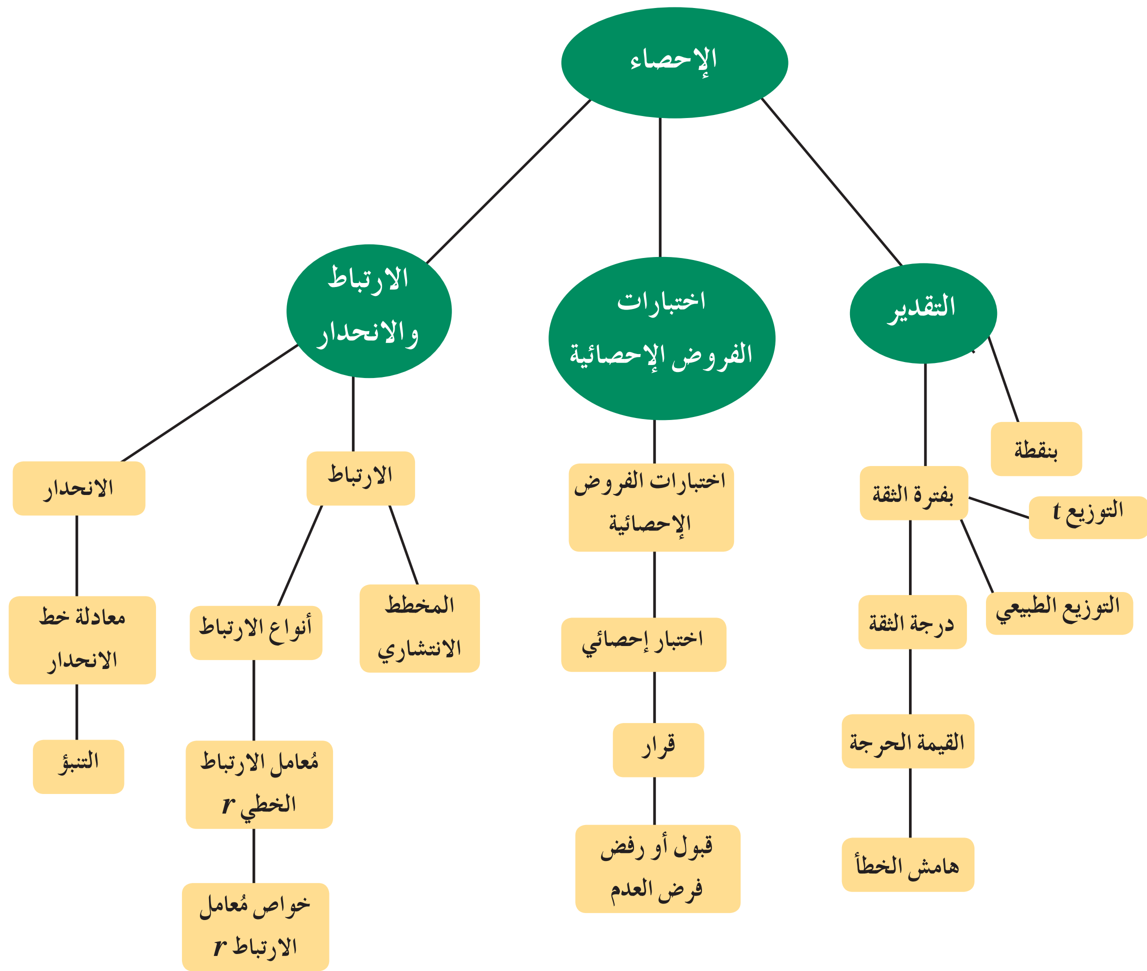
لم تكن الحملة ضرورية، والحصول على قيمة متوسطة أكبر لا يعني الاقتراب من الهدف المنشود.

مسألة إضافية

قامت مؤسسة أخرى بحملة على عينة من 100 شخص تهدف إلى التأكد من أنّ المتوسط الحسابي لاستهلاك كل شخص لمياه الشرب $\mu = 2\,000$ ml يوميًّا. فأتت النتائج على الشكل التالي:

$S = 800$ ml ، $\bar{x} = 2\,100$ ml. برأيك، هل كانت حملة هذه المؤسسة ناجحة؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- المعلمة هي ثابت يصف المجتمع أو يصف توزيع المجتمع كالمتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- الإحصاءة هو اقتران تتعيّن قيمته من العينة كالمتوسط الحسابي $\overline{x}$ أو الانحراف المعياري لها S.
- تقدير المعلمة: هو إحصاءة تعتمد على قيم العينة وتعكس قيمة قريبة لمعلمة المجتمع ككل وتوزيعه.
- التقدير بنقطة هي قيمة وحيدة محسوبة من العينة تستخدم لتقدير معلمة مجهولة من معالم المجتمع.
- فترة الثقة هي فترة طرفاها متغيران عشوائيان (أي أنها فترة عشوائية) تحوي إحدى معالم المجتمع بنسبة معينة تسمى درجة الثقة (مستوى الثقة).
- التقدير بفترة الثقة: هو إيجاد فترة معينة يتوقع أن تقع معلمة المجتمع داخلها بنسبة معينة أو احتمال معين.
- α هي نسبة الخطأ في التقدير وتسمى مستوى المعنوية أو مستوى الدلالة.
- $(1-\alpha)$ هي درجة الثقة (مستوى الثقة).
- $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع الطبيعي المعياري.
- $\overline{x}$ هو المتوسط الحسابي للعينة.

- S هو الانحراف المعياري للعينة.
- $t_{\frac{\alpha}{2}}$ هي القيمة الحرجة المستخرجة من جدول التوزيع t.
- هامش الخطأ $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ في حالة الانحراف المعياري σ معلوم والتوزيع الطبيعي.
- فترة الثقة هي: $(\overline{x} - E \ , \ \overline{x} + E)$.
- الفرض الإحصائي: هو ادعاء معين مبني على حيثيات معقولة حول معلمة من معالم المجتمع مثل المتوسط الحسابي μ أو الانحراف المعياري σ.
- المقياس الإحصائي هو قيمة وحيدة محسوبة من العينة تحت شروط معينة.
- اختبارات الفروض الإحصائية (اختبار المعنوية) هي طريقة معيارية لاختبار ادعاء ما حول معلمة من معالم المجتمع.
- الارتباط هو العلاقة بين متغيرين.
- ارتباط طردي (موجب): هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في نفس الاتجاه.
- ارتباط عكسي (سالب): هو علاقة بين متغيرين y , x بحيث إذا تغير المتغير المستقل (x) فإن المتغير التابع (y) يتبعه في الاتجاه المضاد.
- مُعامل الارتباط الخطي (r) هو عبارة عن مقياس عددي لقوّة العلاقة بين متغيرين يمثلان بيانات كمية حيث $-1 \leq r \leq 1$

خواص مُعامل الارتباط (r)

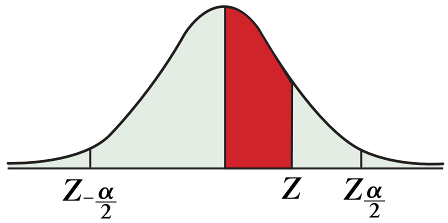
1. إذا كانت $r = 1$ يكون الارتباط **طردي (موجب) تام**.
2. إذا كانت $r = -1$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) تام**.
3. إذا كانت $r = 0$ ينعدم الارتباط.
4. إذا كانت $r \in [0.7 , 1)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) قوي**.
5. إذا كانت $r \in [0.5 , 0.7)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) متوسط**.
6. إذا كانت $r \in (0 , 0.5)$ يكون الارتباط **طردي (موجب) ضعيف**.
7. إذا كانت $r \in (-0.5 , 0)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) ضعيف**.
8. إذا كانت $r \in [-0.5 , -0.7)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) متوسط**.
9. إذا كانت $r \in [-0.7 , -1)$ يكون الارتباط **عكسي (سالب) قوي**.

- $r = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{\sqrt{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2} \sqrt{n(\Sigma y^2) - (\Sigma y)^2}}$ أو $r = \frac{\Sigma(x - \overline{x})(y - \overline{y})}{\sqrt{\Sigma(x - \overline{x})^2} \sqrt{\Sigma(y - \overline{y})^2}}$
- الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين.
- معادلة خط الانحدار: هي المعادلة الخطية التي يمكن من خلالها التنبؤ بقيمة أحد المتغيرين إذا علمت قيمة المتغير الآخر.

$$\widehat{y} = b_0 + b_1 x \quad \text{حيث} \quad b_1 = \frac{n(\Sigma xy) - (\Sigma x)(\Sigma y)}{n(\Sigma x^2) - (\Sigma x)^2}$$

$$b_0 = \overline{y} - b_1 \overline{x} \quad \text{حيث} \quad \overline{y} = \frac{\Sigma y}{n} \quad \text{أو} \quad \overline{x} = \frac{\Sigma x}{n}$$

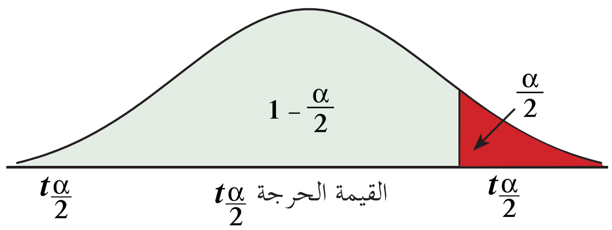
- مقدار الخطأ = | القيمة الجدولية − القيمة من معادلة الانحدار | = $|y_x - \widehat{y}_x|$



جدول التوزيع الطبيعي المعياري (Z)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.10 وأكثر	0.4999									

ملاحظة: استخدم 0.4999 عندما تزيد قيمة Z عن 3.09



جدول التوزيع t						
	$\frac{\alpha}{2}$					
درجات الحرية $(n-1)$	0.005	0.01	0.025	0.05	0.10	0.25
1	63.657	31.821	12.706	6.314	3.078	1.000
2	9.925	6.965	4.303	2.920	1.886	0.816
3	5.841	4.541	3.182	2.353	1.638	0.765
4	4.604	3.747	2.776	2.132	1.533	0.741
5	4.032	3.365	2.571	2.015	1.476	0.727
6	3.707	3.143	2.447	1.943	1.440	0.718
7	3.500	2.998	2.365	1.895	1.415	0.711
8	3.355	2.896	2.306	1.860	1.397	0.706
9	3.250	2.821	2.262	1.833	1.383	0.703
10	3.169	2.764	2.228	1.812	1.372	0.700
11	3.106	2.718	2.201	1.796	1.363	0.697
12	3.054	2.681	2.179	1.782	1.356	0.696
13	3.012	2.650	2.160	1.771	1.350	0.694
14	2.977	2.625	2.145	1.761	1.345	0.692
15	2.947	2.602	2.132	1.753	1.341	0.691
16	2.921	2.584	2.120	1.746	1.337	0.690
17	2.898	2.567	2.110	1.740	1.333	0.689
18	2.878	2.552	2.101	1.734	1.330	0.688
19	2.861	2.540	2.093	1.729	1.328	0.688
20	2.845	2.528	2.086	1.725	1.325	0.687
21	2.831	2.518	2.080	1.721	1.323	0.686
22	2.819	2.508	2.074	1.717	1.321	0.686
23	2.807	2.500	2.069	1.714	1.320	0.685
24	2.797	2.492	2.064	1.711	1.318	0.685
25	2.787	2.485	2.060	1.708	1.316	0.684
26	2.779	2.479	2.056	1.706	1.315	0.684
27	2.771	2.473	2.052	1.703	1.314	0.684
28	2.763	2.467	2.048	1.701	1.313	0.683
29	2.756	2.462	2.045	1.699	1.311	0.683
30 وأكثر	2.575	2.327	1.960	1.645	1.282	0.675

ALGEBRA الجبر

$x^2 - y^2 = (x+y)(x-y)$

$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$

$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$

$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

$(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$

$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$

$(x-y)^3 = x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$

$ax^2 + bx + c = 0 \quad , \quad x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

$a > 0$:

$|x| = a \;:\; x = a$ أو $x = -a$

$|x| < a \;:\; -a < x < a$

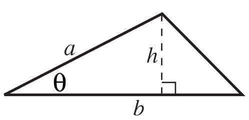
$|x| > a \;:\; x > a$ أو $x < -a$

GEOMETRY الهندسة

Triangle

$A = \frac{1}{2}bh$

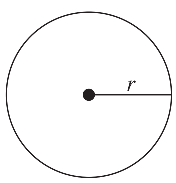
$= \frac{1}{2}ab\sin\theta$



Circle

$A = \pi r^2$

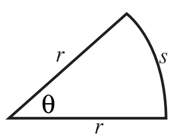
$C = 2\pi r$



Sector of Circle

$A = \frac{1}{2}r^2\theta$

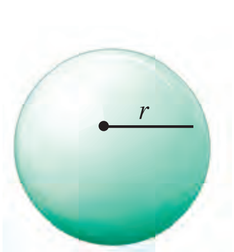
$s = r\theta$ (θ in radians)



Sphere

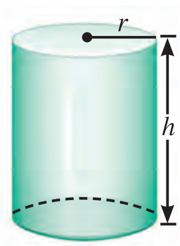
$V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$A = 4\pi r^2$



Cylinder

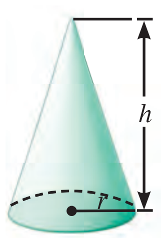
$V = \pi r^2 h$



Cone

$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

$A = \pi r\sqrt{r^2 + h^2}$



TRIGONOMETRY علم المثلثات

$\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ $\qquad$ $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ $\qquad$ $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$

$\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ $\qquad$ $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$

$1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta$ $\qquad$ $1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$ $\qquad$ $\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\tan(-\theta) = -\tan\theta$ $\qquad$ $\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

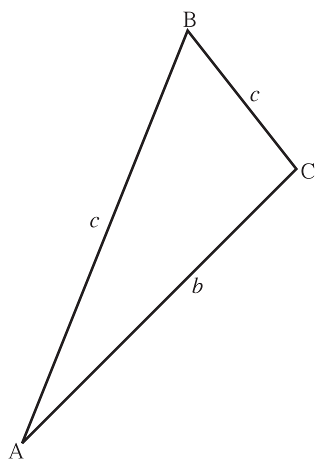
$\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$ $\qquad$ $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta$

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$



$$\sin(x+y) = \sin x\cos y + \cos x\sin y$$

$$\sin(x-y) = \sin x\cos y - \cos x\sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x\cos y - \sin x\sin y$$

$$\cos(x-y) = \cos x\cos y + \sin x\sin y$$

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x\tan y}$$

$$\tan(x-y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x\tan y}$$

$$\sin 2x = 2\sin x\cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$$

$\sin^2 x = \dfrac{1 - \cos 2x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2 x = \dfrac{1 + \cos 2x}{2}$

Statistics الإحصاء

(القيمة الحرجة) $Z_{\frac{\alpha}{2}} = Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$; $-Z_{\frac{\alpha}{2}} = -Z_{\frac{1-\alpha}{2}}$

(الخطأ المعياري للمجتمع) $\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

(هامش الخطأ – توزيع طبيعي) $E = Z_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$

فترة الثقة للمتوسط الحسابي $(\bar{x} - E \ , \ \bar{x} + E)$

(التوزيع t) $t_{\frac{\alpha}{2}} = t_{1-\frac{\alpha}{2}}$

(هامش الخطأ – توزيع t الانحراف المعياري σ غير معلوم) $E = t_{\frac{\alpha}{2}} \cdot \frac{S}{\sqrt{n}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي) $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الإحصائي – توزيع طبيعي – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $Z = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(المقياس الاحصائي – توزيع t – الانحراف المعياري σ غير معلوم) $t = \dfrac{\bar{x} - \mu}{\frac{S}{\sqrt{n}}}$

(مُعامل ارتباط بيرسون) $r = \dfrac{\sum (x-\bar{x})(y-\bar{y})}{\sqrt{\sum (x-\bar{x})^2}\sqrt{\sum (x-\bar{y})^2}} = \dfrac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{\sqrt{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}\sqrt{n(\sum y^2) - (\sum y)^2}}$

(معادلة خط الانحدار) $\hat{y} = b_1 x + b_0$

$b_1 = \dfrac{n(\sum xy) - (\sum x)(\sum y)}{n(\sum x^2) - (\sum x)^2}$, $b_0 = \bar{y} - b_1 \bar{x}$

حيث $\bar{x} = \dfrac{\sum x}{n}$, $\bar{y} = \dfrac{\sum y}{n}$

مقدار الخطأ $= |y_x - \hat{y}_x|$

شركة مطابع الرسالة – الكويت

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٣١٩) بتاريخ ٣١/ ١٢/ ٢٠١٥م