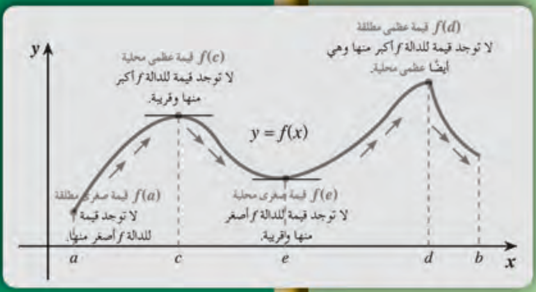
وزارة التربية

الرياضيات

كرّاسة التمارين



١٢

الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأوّل

الطبعة الثانية

الرياضيات

الصفّ الثاني عشر علمي

الفصل الدراسي الأول

كرّاسة التمارين

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي **أ. فتحية محمود أبو زور**

الطبعة الثانية

١٤٣٧ - ١٤٣٨ هـ

٢٠١٦ - ٢٠١٧ م

لجنة دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الثاني عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. صديقة أحمد صالح الأنصاري **أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف**

أ. مجدي محمد يس دراز **أ. يحيى عبد السلام خالد عقل**

أ. وضحى ابراهيم مزعل الدوسري

دار التَّربَويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٤

الطبعة الأولى ٢٠١٤

الطبعة الثانية ٢٠١٦

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

المحتويات

الوحدة الأولى: النهايات والاتصال

تَمَرَّنْ 1–1 9
تَمَرَّنْ 2–1 13
تَمَرَّنْ 3–1 15
تَمَرَّنْ 4–1 17
تَمَرَّنْ 5–1 19
تَمَرَّنْ 6–1 23
تَمَرَّنْ 7–1 26
اختبار الوحدة الأولى 29
تمارين إثرائيّة 31

الوحدة الثانية: الاشتقاق

تَمَرَّنْ 1–2 33
تَمَرَّنْ 2–2 35
تَمَرَّنْ 3–2 38
تَمَرَّنْ 4–2 41
تَمَرَّنْ 5–2 43
تَمَرَّنْ 6–2 45
اختبار الوحدة الثانية 47
تمارين إثرائيّة 48

الوحدة الثالثة: تطبيقات على الاشتقاق

تَمَرَّنْ 1–3 50

تَمَرَّنْ 2–3 54

تَمَرَّنْ 3–3 56

تَمَرَّنْ 4–3 59

تَمَرَّنْ 5–3 63

اختبار الوحدة الثالثة 66

تمارين إثرائيّة 68

الوحدة الرابعة: الإحصاء

تَمَرَّنْ 1–4 71

تَمَرَّنْ 2–4 73

تَمَرَّنْ 3–4 76

اختبار الوحدة الرابعة 80

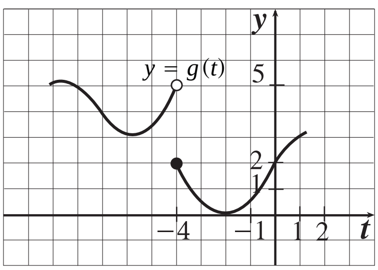
تمارين إثرائيّة 82

تمرَّنْ
1–1

النهايات
Limits

المجموعة A تمارين مقالية

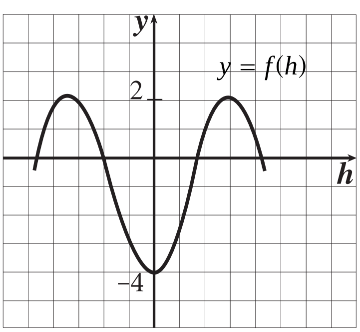
(1) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة g. أوجد إن أمكن:



(a) $\lim\limits_{t\to -4^-} g(t)$ (b) $\lim\limits_{t\to -4^+} g(t)$

(c) $\lim\limits_{t\to -4} g(t)$ (d) $g(-4)$

(2) الشكل المقابل، يمثّل بيان الدالة f. أوجد إن أمكن:



(a) $\lim\limits_{h\to 0^-} f(h)$ (b) $\lim\limits_{h\to 0^+} f(h)$

(c) $\lim\limits_{h\to 0} f(h)$ (d) $f(0)$

(3) بفرض أنّ: $\lim\limits_{x\to 4} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 4} g(x) = 3$ ،

أوجد:

(a) $\lim\limits_{x\to 4}(g(x)+3)$ (b) $\lim\limits_{x\to 4} x\, f(x)$

(c) $\lim\limits_{x\to 4}(g(x)\cdot g(x))$ (d) $\lim\limits_{x\to 4} \dfrac{g(x)}{f(x)-1}$

في التمارين (7–4)، أوجد:

(4) $\lim\limits_{x\to -\frac{1}{2}} (3x^2(2x-1))$ (5) $\lim\limits_{y\to -3} \dfrac{y^2+4y+3}{y^2-3}$

(6) $\lim\limits_{x\to -4} (x+3)^{1998}$ (7) $\lim\limits_{x\to 3} \sqrt{x-2}$

(8) لتكن الدالّة f :

$$f(x)=\begin{cases}3-x, & x<2\\ 2, & x=2\\ \frac{x}{2}, & x>2\end{cases}$$

أوجد: $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

(9) لتكن الدالّة f :

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt[3]{1-x^2}, & 0\le x<1\\ 1, & 1\le x<2\\ 2, & x=2\end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$

(10) لتكن الدالّة f :

$$f(x)=\begin{cases}-x^2+4, & -1\le x<1\\ 2, & 1\le x<2\\ x, & 2\le x<4\end{cases}$$

أوجد إن أمكن:

(a) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$

في التمارين (11–16)، أوجد:

(11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(4+x)^2-16}{x}$ (12) $\lim\limits_{t\to 2}\dfrac{t^2-3t+2}{t^2-4}$

(13) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^3-27}{x}$ (14) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{|x+2|}{x^2+3x+2}$

(15) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x^2+7}-4}{x^2-4x+3}$ (16) $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x+3}{\sqrt[3]{9x}+3}$

في التمارين (17–19)، أوجد النهايات التالية:

(17) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^3-3x^2-7x+6}{x+2}$

(18) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-7x^2-18}{x-3}$

(19) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^3-5x^2-12}{x-2}$

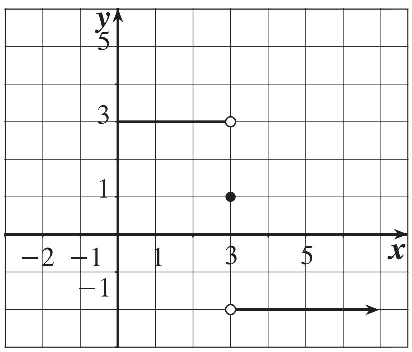
في التمارين (20–22)، أوجد كلًّا مما يلي:

(20) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$ (21) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{3}{x^3-1}\right)$ (22) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{x}{x-2}-\dfrac{4x}{x^2-4}\right)$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to 3^-} f(x) = -2$ (في الرسم البياني أدناه) (a) (b)



(2) $\lim_{y\to 2} \frac{y^2+5y+6}{y+2} = 5$ (a) (b)

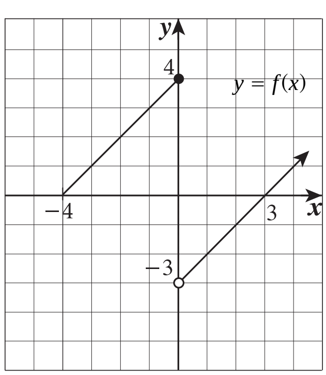
(3) $\lim_{x\to 0} \frac{5x^3+8x^2}{3x^4-16x^2} = 0$ (a) (b)

(4) $\lim_{x\to 0^-} \frac{\sqrt{x^2}-x}{x} = -2$ (a) (b)

(5) $\lim_{x\to 1^+} (2x-|x|+2) = 3$ (a) (b)

في التمارين (6–14)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) الشكل المقابل هو بيان دالة f.



العبارة الصحيحة في ما يلي هي:

(a) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = 4$

(b) $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -3$

(c) $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 4$

(d) $\lim_{x\to 0} f(x) = -3$

(7) $\lim_{x\to -2}(x^3+3x^2-2x-17)=$

ⓐ 17 ⓑ -17 ⓒ 9 ⓓ -9

(8) $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^2-1}=$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ غير موجودة

(9) $\lim_{x\to 2}\frac{x^2-3x+2}{2x^2-5x+2}=$

ⓐ 1 ⓑ 0 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ $\frac{1}{3}$

(10) $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}=$

ⓐ -1 ⓑ 1 ⓒ $\frac{1}{2}$ ⓓ 0

(11) $\lim_{x\to 2^+}\frac{|x-2|}{x^2-4}=$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

(12) $\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}=$

ⓐ $-\frac{1}{2}$ ⓑ $\frac{1}{2}$ ⓒ $\frac{1}{4}$ ⓓ $-\frac{1}{4}$

(13) $\lim_{x\to -8}\frac{x+8}{\sqrt[3]{x}+2}=$

ⓐ 12 ⓑ -12 ⓒ 4 ⓓ -4

(14) $\lim_{x\to -3}\frac{2x^3+9x^2+9x}{x+3}=$

ⓐ 9 ⓑ 0 ⓒ -3 ⓓ -9

تمرَّنْ
1−2

نهايات تشتمل على ∞−، ∞

Limits Involving $-\infty, \infty$

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4—1)، أوجد:

(1) $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x-2}$

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+1}{x^3}$

(3) $\lim_{x\to\infty} \frac{x-1}{2x+3}$

(4) $\lim_{x\to-\infty} \left(\left(2-\frac{x}{x+1}\right)\left(\frac{x^2}{5+x^2}\right)\right)$

في التمارين (8—5)، أوجد إن أمكن:

(5) $\lim_{x\to0} \frac{1}{\sqrt{4x^2}}$

(6) $\lim_{x\to5} \frac{3}{|x-5|}$

(7) $\lim_{x\to-2} \frac{-7}{|x+2|}$

(8) $\lim_{x\to\frac{1}{2}^+} \frac{2x-1}{\sqrt{(2x-1)^8}}$

في التمارين (12—9)، أوجد إن أمكن معادلات الخطوط المقاربة الرأسية والأفقية لكل مما يلي:

(9) $f(x)=\frac{3x^2-2x+1}{2x^2+5x}$

(10) $f(x)=\frac{x-2}{2x^2+3x-5}$

(11) $f(x)=\frac{4x^3-2x+1}{x^3+x^2}$

(12) $f(x)=\frac{4x}{2x^2-5x+2}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to-4^-} \frac{1}{(x+4)^9} = -\infty$ (a) (b)

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x-1}{|x|-3} = 2$ (a) (b)

(3) $\lim_{x\to-\infty} \frac{|x|-3}{x+3} = -1$ (a) (b)

(4) $\lim_{x\to\infty} \frac{1-x}{2x^2-5x-3} = -\infty$ (a) (b)

(5) $\lim_{x\to-\infty} \frac{x}{|2x-3|} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

في التمارين (13 – 6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{|x|}{|x|+1}=$

ⓐ 0 ⓑ 1 ⓒ ∞ ⓓ $\frac{1}{2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{x+3}=$

ⓐ ∞ ⓑ $-\infty$ ⓒ 1 ⓓ 0

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{2}{x}+1\right)\left(\frac{5x^2-1}{x^2}\right)=$

ⓐ 0 ⓑ 5 ⓒ 1 ⓓ $-\infty$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-|x+3|}{2x}=$

ⓐ $\frac{1}{2}$ ⓑ $-\frac{1}{2}$ ⓒ ∞ ⓓ $-\infty$

(10) $\lim\limits_{x\to 2^-}\left(\frac{3}{x-2}\right)^5=$

ⓐ 0 ⓑ 2 ⓒ ∞ ⓓ $-\infty$

(11) $\lim\limits_{x\to 4^+}\frac{2}{(x-4)^3}=$

ⓐ ∞ ⓑ 2 ⓒ $-\infty$ ⓓ 0

(12) المقارب الأفقي والمقارب الرأسي لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{2x-3}{2x+1}$ هما:

ⓐ $y=2\ ,\ x=\frac{1}{2}$ ⓑ $y=2\ ,\ x=-\frac{1}{2}$

ⓒ $y=1\ ,\ x=-\frac{1}{2}$ ⓓ $y=1\ ,\ x=\frac{1}{2}$

(13) المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f: $f(x)=\frac{3x-5}{x^2-9}$ هي:

ⓐ $y=3\ ,\ x=3\ ,\ x=-3$ ⓑ $y=3\ ,\ x=9\ ,\ x=-9$

ⓒ $y=-3\ ,\ x=3\ ,\ x=-3$ ⓓ $y=0\ ,\ x=3\ ,\ x=-3$

تمرَّنْ
1–3

صيغ غير معينة

Indeterminate Forms

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (10–1)، أوجد كلًّا مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2-5x+4)$

(2) $\lim\limits_{x\to+\infty}(-4x^2+x-1)$

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(2x^3-3x+7)$

(4) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-4x^3+2x+5)$

(5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-5x+7}{-2x^2+3x-1}$

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^3+7x-1}{-5x^3+x+2}$

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+5}{2x^3+x-1}$

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2}{x^2-2x+3}$

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x+5}{\sqrt{x^2+2x+7}}$

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x-3}{\sqrt{4x^2+5x+6}}$

(11) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{ax^3+bx^2+4}{3x^2-2x+1}=-1$ فأوجد قيم $a\,,\,b$.

(12) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{2x^2+2x-5}{ax^3+bx^2+3}=-1$ فأوجد قيم $a\,,\,b$.

(13) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x-5}{\sqrt{ax^2+7x-2}}=2$ فأوجد قيمة a .

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim\limits_{x\to\infty}(3x^2+7x-8)=\infty$ (a) (b)

(2) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^3-2x+1)=-\infty$ (a) (b)

(3) $\lim\limits_{x\to-\infty}(-x^2+x-3)=-\infty$ (a) (b)

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-2x+4}{3x^2-5x+1}=0$ (a) (b)

(5) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x^3+7x^2-1}{2x^3-4}=2$ (a) (b)

(6) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-7}{\sqrt{4x^2-8x+5}}=\dfrac{3}{2}$ (a) (b)

في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3-2x+5}{2x^4+x^2-2}=$

(a) ∞ (b) $\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) $-\infty$

(8) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{3x-5}{\sqrt{x^2+1}}=$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) 3 (d) -3

(9) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{-5x+3}{\sqrt{9x^2-2x+4}}=$

(a) $\frac{5}{3}$ (b) $-\frac{5}{3}$ (c) $\frac{5}{9}$ (d) $-\frac{5}{9}$

(10) $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2x+1}{\sqrt{4x^2-x+3}}$

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(11) إذا كان: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{mx^2+nx+4}{\sqrt{x^2-2x+4}}=-2$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=1$, $n=-1$ (d) $m=1$, $n=1$

(12) إذا كانت: $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{\sqrt{4x^2-2x+3}}{mx^2+nx-4}=1$ فإن قيم m , n هي:

(a) $m=0$, $n=-2$ (b) $m=0$, $n=2$ (c) $m=0$, $n=4$ (d) $m=0$, $n=-4$

تمرَّنْ
1−4

نهايات بعض الدوال المثلثية
Limits of Some Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (9−1)، أوجد النهاية في كلٍّ مما يلي:

(1) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 5x}{3x}$

(2) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 2x}{\sin 2x}$

(3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1-\cos 2x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{1+\cos x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\tan x}{\sin x-\cos x}$

(6) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{-4x+3\sin x}{2x}$

(7) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{5x^2-\sin 3x}{x^2}$

(8) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{\sin^2 x}$

(9) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{1-\cos x}$

في التمارين (12−10)، أوجد النهاية في كلٍ مما يلي (إرشاد: اقسم كلًّا من البسط والمقام على x إذا لزم):

(10) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 4x}{\sin 7x}$

(11) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan 3x}{\tan 2x}$

(12) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cos 5x}{\cos 3x}$

في التمارين (15−13)، أوجد النهاية في كلٍ مما يلي:

(13) $\lim\limits_{x\to 0} \left(3+x^2\cos\dfrac{1}{x^2}\right)$

(14) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{3x^2+5x\cos x}{2x^2}$

(15) $\lim\limits_{x\to \infty} \dfrac{2x+\sin x}{x}$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) $\lim_{x\to\infty} \frac{\sin 3x}{2x} = \frac{3}{2}$ (a) (b)

(2) $\lim_{x\to\infty} \frac{\cos 2x}{4x} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

(3) $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sin x}{\cos^2 x} = 0$ (a) (b)

(4) $\lim_{x\to 0} \frac{1+\sin 2x}{2\cos 2x} = \frac{1}{2}$ (a) (b)

(5) $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2 \sin x + 5x^3}{4x^3} = 2$ (a) (b)

في التمارين (6–10)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin x} =$

(a) 2 (b) -2 (c) 0 (d) ∞

(7) $\lim_{x\to 0} \left(3 + x^2 \sin \frac{1}{x}\right) =$

(a) 0 (b) 4 (c) 3 (d) ∞

(8) $\lim_{x\to\infty} \frac{4x^2 - x\cos x}{2x^2}$

(a) ∞ (b) $-\infty$ (c) -2 (d) 2

(9) $\lim_{x\to 0} \frac{4x^2 + 5\sin^2 x}{3x^2} =$

(a) 3 (b) 9 (c) 0 (d) ∞

(10) $\lim_{x\to -\infty} \frac{x + \cos x}{|2x|} =$

(a) $\frac{1}{2}$ (b) $-\frac{1}{2}$ (c) 0 (d) ∞

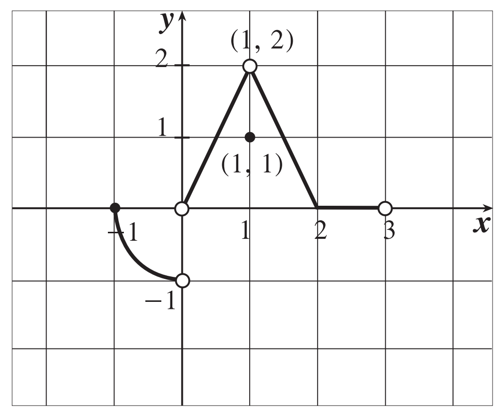
تمرَّنْ
1–5

الاتّصال

Continuity

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، استخدم الدالّة f المعرفة بأكثر من قاعدة ورسمها البيانيّ للإجابة عن الأسئلة مع ذكر السبب.



$$f(x)=\begin{cases} x^2-1 & , \quad -1\le x<0 \\ 2x & , \quad 0<x<1 \\ 1 & , \quad x=1 \\ -2x+4 & , \quad 1<x<2 \\ 0 & , \quad 2\le x<3 \end{cases}$$

(1) ابحث اتصال الدالة f عند $x=0$

(2) ابحث اتصال الدالة f عند $x=1$

(3) ابحث اتصال الدالة f عند $x=2$

(4) **تفكير ناقد.** هل من الممكن إعادة تعريف الدالّة f لتكون متّصلة عند $x=0$؟ فسّر إجابتك.

(5) ارسم شكلًا ممكنًا يمثّل دالّة f بحيث تحقق الشروط التالية:
$f(-2)$ موجودة، $\lim\limits_{x\to -2^+} f(x)=f(-2)$ ولكن $\lim\limits_{x\to -2} f(x)$ غير موجودة.

في التمارين (6–9)، ابحث اتصال كل من الدوال التالية عند $x=c$:

(6) $f(x)=\begin{cases} x+5 & : x\ge 0 \\ 5-x & : x<0 \end{cases}$, $x=0$

(7) $h(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x-4}{x+1} & : x\ne -1 \\ -1 & : x=-1 \end{cases}$, $x=-1$

(8) $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-3x}{|x|} & : x\ne 0 \\ -3 & : x=0 \end{cases}$, $x=0$

(9) $g(x)=\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x-1} & : x\ne 1 \\ \dfrac{1}{2} & : x=1 \end{cases}$, $x=1$

(10) أوجد قيمة a بحيث تصبح الدالّة التالية متّصلة عند $x = 3$:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & , \quad x < 3 \\ 2ax & , \quad x \geq 3 \end{cases}$$

في التمارين (13–11)، أوجد قيم x التي تكون عندها الدالة منفصلة. ثم حدّد نوع الانفصال وإمكانية التخلص منه مع ذكر السبب.

(11) $y = \dfrac{x - 1}{x^2 - 4x + 3}$

(12) $y = 2x - 1$

(13) $f(x) = \begin{cases} 1 - x^2 & , \quad x \neq -1 \\ 2 & , \quad x = -1 \end{cases}$

في التمارين (16–14)، أعد تعريف الدالّة بحيث تكون متّصلة عند قيم x المشار إليها.

(14) $f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x + 3} \quad , \quad x = -3$

(15) $f(x) = \dfrac{\sin 4x}{x} \quad , \quad x = 0$

(16) $f(x) = \dfrac{x - 4}{\sqrt{x} - 2} \quad , \quad x = 4$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1—4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x) = \frac{1}{(x+2)^2} + 1$ متصلة عند $x = -2$ — (a) (b)

(2) الدالة: $y = \frac{1}{x^2+1}$ متصلة عند كل $x \in \mathbb{R}$ — (a) (b)

(3) الدالة: $y = \frac{1}{\sqrt{x+2}}$ متصلة عند $x = -1$ — (a) (b)

(4) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = -1$ وكان $\lim\limits_{x\to -1}(f(x) - 2) = -1$ فإنّ $f(-1) = 1$ — (a) (b)

في التمارين (5—12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \cot x$ هي:

(a) $0 \ , \ \pi$

(b) $2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(c) $k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(d) $\frac{\pi}{2} + k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$

(6) نقاط الدالة f: $f(x) = \frac{x^2+x-6}{x^2-4}$ التي يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) 2

(b) $-2 \ , \ 2$

(c) -2

(d) $-5 \ , \ 2$

(7) نقاط الدالة f: $f(x) = \frac{2x^3+16}{x^2+x-2}$ التي لا يمكن التخلص من الانفصال عندها هي:

(a) $-1 \ , \ 2$

(b) -2

(c) $1 \ , \ -2$

(d) 1

(8) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x = 2$ فإنّ $f(x)$ يمكن أن تكون:

(a) $\frac{1}{|x-2|}$

(b) $\sqrt{x-2}$

(c) $\frac{|x-2|}{x-2}$

(d) $\begin{cases} \sqrt{x^2-3} & : x > 2 \\ 3x-5 & : x \leqslant 2 \end{cases}$

(9) إذا كانت الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & : x \geq 2 \\ \frac{x^2-4}{x-2} & : x < 2 \end{cases}$ فإن:

(a) $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 4$

(b) $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$

(c) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ موجودة

(d) f متصلة عند $x = 2$

(10) لتصبح الدالة f : $f(x)=\frac{x^3-1}{x^2-1}$ متصلة عند $x=1$، يجب إعادة تعريفها على الشكل التالي:

ⓐ $\begin{cases}\frac{x^3-1}{x^3-1} & , \quad x\neq 1, \quad x\neq -1\\ \frac{3}{2} & , \quad x=1\end{cases}$

ⓑ $\begin{cases}\frac{x^3-1}{x^2-1} & , \quad x>1\\ \frac{3}{2} & , \quad x=1\end{cases}$

ⓒ $\begin{cases}\frac{x^3-1}{x^2-1} & , \quad x\neq 1, \quad x\neq -1\\ \frac{1}{2} & , \quad x=1\end{cases}$

ⓓ لا يمكن إعادة تعريفها

(11) إذا كانت الدالة f متصلة عند $x=-2$ وكانت $\lim\limits_{x\to -2}(x^2+f(x))=7$ فإن $f(-2)$ تساوي:

ⓐ 3

ⓑ 5

ⓒ 9

ⓓ 11

(12) إذا كانت الدالة g متصلة عند $x=1$ وكانت النقطة $(1\ ,\ -3)$ تقع على منحنى الدالة g فإن $\lim\limits_{x\to 1}(g(x))^2$ تساوي:

ⓐ -6

ⓑ -3

ⓒ 1

ⓓ 9

في التمارين (15–13)، توجد قائمتان. اختر لكل سؤال من القائمة (1) ما يناسبه من القائمة (2) لتحصل على عبارة صحيحة:

إذا كانت g دالة متصلة عند $x=a$ ، $a\in\mathbb{Z}$ وكانت:

القائمة (1)	القائمة (2)
(13) $g(x)=\begin{cases}x+1 & : \quad x>a\\ 3-x & : \quad x\leq a\end{cases} \quad \Rightarrow a=$	ⓐ -1 ⓑ 2
(14) $g(x)=\begin{cases}2ax-2 & : \quad x\neq a\\ 3a & : \quad x=a\end{cases} \quad \Rightarrow a=$	ⓒ 0 ⓓ 1
(15) $g(x)=\begin{cases}3x^2 & : \quad x>a\\ 2x & : \quad x\leq a\end{cases} \quad \Rightarrow a=$	ⓔ $\frac{2}{3}$

تمرَّنْ
1–6

نظريات الاتصال

Continuous Theorems

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (5–1)، ابحث اتصال كل دالة مما يلي عند $x = c$:

(1) $f(x) = x^2 - |2x-3| \quad , \quad x = 2$

(2) $f(x) = \dfrac{x+3}{x^2+1} - \dfrac{3}{x} \quad , \quad x = -1$

(3) $f(x) = x^2 + 3x + |x| \quad , \quad x = 3$

(4) $f(x) = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{x^2+1} \quad , \quad x = -1$

(5) $f(x) = \sqrt{x^2+5x+4} \quad , \quad x = -5$

(6) الدالتان f, g معرفتان على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$$f(x) = -x+2 \quad , \quad g(x) = x^2 - 3$$

أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$ **(b)** $(g \circ f)(-1)$ **(c)** $(f \circ g)(x)$ **(d)** $(f \circ g)(-1)$

(7) الدالتان f, g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x}$ ، $g(x) = x^2 + 4$ أوجد:

(a) $(f \circ g)(x)$ **(b)** $(f \circ g)(2)$ **(c)** $(g \circ f)(x)$ **(d)** $(g \circ f)(2)$

(8) الدالتان f, g معرفتان كما يلي: $f(x) = \sqrt{x^2-9}$ ، $g(x) = \dfrac{1}{x^2+16}$.

أوجد:

(a) الدالة المركبة $(g \circ f)(x)$

(b) $(g \circ f)(4)$ ، $(g \circ f)(-4)$

(9) لتكن: $f(x) = 2x^2 - 3$ ، $g(x) = \sqrt{x+4}$. ابحث اتصال الدالة $g \circ f$ عند $x = -2$

(10) ابحث اتصال الدالة f: $f(x) = \left| \sqrt{x} - 3 \right|$ عند $x = 4$

(11) ابحث اتصال الدالة g : $g(x) = \sqrt{x^2+1} - \left| x - 3 \right|$ عند $x = 3$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة f: $f(x) = x^2 + \left| x - 1 \right|$ متصلة عند $x = 3$ — (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = \frac{2x+5}{x+2} - \frac{2}{x}$ متصلة عند $x = 0$ — (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = \frac{2x-2}{|x| - 1}$ متصلة عند $x = 0$ — (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = \frac{\sqrt[3]{3x-1}}{x^2}$ متصلة عند $x = 3$ — (a) (b)

(5) الدالة f: $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x - 4}$ متصلة عند $x = 2$ — (a) (b)

في التمارين (6–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \frac{-x+2}{x^2+9}$ عند:

(a) $x = 3$ (b) $x = -3$

(c) $x = 2$ (d) لا يوجد نقاط انفصال

(7) نقاط انفصال الدالة f: $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-1}$ عند x تساوي:

(a) $1 , -1$ (b) $2 , -2$ (c) $1 , 2$ (d) $-1 , -2$

(8) لتكن الدالة f: $f(x) = x^2 + 3, x \neq 0$ ، الدالة g : $g(x) = \frac{x}{x-3}$ ، فإن: $(g \circ f)(x)$ تساوي:

(a) $\frac{4x^2 - 18x + 27}{(x-3)^2}$ (b) $\frac{x^2}{x^2-3}$ (c) $\frac{x^2+3}{x^2}$ (d) $\frac{x^2}{x^2+3}$

(9) لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{x}{\sqrt{x-3}}$ ، الدالة g: $g(x) = x^2 + 3, x \neq 0$ ، فإن: $(f \circ g)(x)$ تساوي:

(a) $\frac{x^2}{x-3} + 3$ (b) $\frac{x}{\sqrt{x-3}} + 3$ (c) $\frac{-(x^2+3)}{x}$ (d) $\frac{x^2+3}{|x|}$

(10) لتكن الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2+7}$ ، g : $g(x)=x^2-3$ فإن: $(f \circ g)(0)$ يساوي:

Ⓐ 4 Ⓑ -4

Ⓒ 1 Ⓓ -1

(11) إذا كانت g دالة متصلة عند $x=2$ فإن الدالة المتصلة عند $x=2$ فيما يلي هي $f(x)$ تساوي:

Ⓐ $\sqrt{g(x)}$ Ⓑ $\frac{1}{g(x)}$

Ⓒ $\frac{g(x)}{x-2}$ Ⓓ $|g(x)|$

(12) إذا كانت الدالة f: $f(x)=\sqrt{x^2-a}$ متصلة عند $x=3$ فإن a يمكن أن تساوي:

Ⓐ 4 Ⓑ 9

Ⓒ 16 Ⓓ 25

تمرَّنْ
1−7

الاتصال على فترة

Continuity on an Interval

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1−5)، ادرس اتصال كل دالة مما يلي على الفترة المبينة.

(1) $f(x) = x^2 + 2x - 3 \quad , \quad [-2 , 5]$

(2) $f(x) = \dfrac{7x}{x^2 + 5} \quad , \quad [1 , 3]$

(3) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 3} \quad , \quad [0 , 5]$

(4) $f(x) = \dfrac{-x + 3}{x^2 - 5x + 4} \quad , \quad [-2 , 6]$

(5) $f(x) = \begin{cases} -5 & : \quad x = -3 \\ -x^2 + 4 & : \quad -3 < x < 4 \\ -10 & : \quad x = 4 \end{cases} \quad , \quad [-3 , 4]$

(6) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} -x + 4 & : \quad x \leqslant 7 \\ \dfrac{9}{-x + 4} & : \quad x > 7 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(7) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 9} & : \quad x \leqslant 0 \\ \dfrac{6}{x + 3} & : \quad x > 0 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(8) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} x^3 - 1 & : \quad x \leqslant -2 \\ x - 7 & : \quad -2 < x < 4 \\ x^2 - 7 & : \quad x \geqslant 4 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

(9) الدالة f معرفة كما يلي: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x + 2} & : \quad x \leqslant -4 \\ x^2 + 3x - 6 & : \quad -4 < x \leqslant 1 \\ x^3 - 3x^2 & : \quad x > 1 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

في التمرينين (11–10)، أوجد قيم a , b بحيث تكون كل دالة متصلة على مجال تعريفها.

(10) $f(x)=\begin{cases} x^2-\sqrt{x} & : \quad x<1 \\ 3x+a & : \quad x>1 \\ b & : \quad x=1 \end{cases}$

(11) $f(x)=\begin{cases} x^2 & : \quad x<-2 \\ \dfrac{x^2-a}{x-b} & : \quad -2\le x<1 \\ x & : \quad x\ge 1 \end{cases}$

(12) لتكن الدالة f : $f(x)=\sqrt{-x^2+5x+6}$ ، أوجد D_f ثم ادرس اتصالها على $[0\ ,\ 4]$

في التمرينين (14–13)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على مجالها:

(13) $f(x)=\sqrt{8-2x^2}$

(14) $f(x)=\sqrt{x^2-1}$

في التمرينين (16–15)، ادرس اتصال كل من الدوال التالية على $\mathbb{R}$.

(15) $f(x)=\sqrt[3]{x^2+3x-2}$

(16) $f(x)=|3x^2+4x-1|$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على كل من $[1\ ,\ 3)$, $[3\ ,\ 5]$ فإن f متصلة على $[1\ ,\ 5]$ (a) (b)

(2) الدالة f : $f(x)=x^2-|x|$ متصلة لكل قيم $x\in\mathbb{R}$ (a) (b)

(3) الدالة f : $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ متصلة على $[-2\ ,\ 2]$ (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x)=\dfrac{2x-3}{x+2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 0)$ (a) (b)

(5) الدالة f : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-2}$ متصلة على $(-\infty\ ,\ 2)$ فقط (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن الدالة f : $f(x)=\dfrac{x+1}{x-4}$ فإن الدالة f :

(a) لها نقطتي انفصال عند كل من $x=4$, $x=-1$

(b) متصلة على $(-\infty\ ,\ 4]$

(c) متصلة على كلٍ من $(-\infty,4)$, $(4,\infty)$

(d) ليس أي مما سبق

(7) إذا كانت f دالة متصلة على $[-2\ ,\ 3]$ فإن:

ⓐ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to3^-} f(x)$

ⓑ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = f(3)$

ⓒ $\lim\limits_{x\to-2^+} f(x) = f(-2)$

ⓓ $\lim\limits_{x\to3^-} f(x) = f(-2)$

(8) الدالة f : $f(x) = \dfrac{2x-1}{\sqrt{x^2-25}}$ متصلة على:

ⓐ $\left(-\infty\ ,\ \frac{1}{2}\right]$

ⓑ $(5\ ,\ \infty)$

ⓒ $\mathbb{R}$

ⓓ $(-5\ ,\ 5)$

(9) لتكن f : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{5}{2} & : \quad x \leqslant -3 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+16}}{2} & : \quad -3 < x < 0 \\ \dfrac{4-x^2}{x-2} & : \quad x \geqslant 0, x \neq 2 \end{cases}$ ، فإن f دالة متصلة على:

ⓐ $(-\infty\ ,\ \infty)$

ⓑ $(-\infty\ ,\ 2)$

ⓒ $(-\infty\ ,\ 0]$

ⓓ $(-\infty\ ,\ -3]$

(10) الدالة f : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+m}{x-2} & : \quad x < 1 \\ x+n & : \quad x > 1 \\ 2m & : \quad x = 1 \end{cases}$ متصلة على $\mathbb{R}$ إذا كان:

ⓐ $m = -1\ ,\ n = 3$

ⓑ $m = 1\ ,\ n = -3$

ⓒ $m = -1\ ,\ n = -3$

ⓓ $m = 1\ ,\ n = 3$

(11) الدالة g : $g(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & : \quad x > 1 \\ 3x & : \quad x \leq 1 \end{cases}$ متصلة على:

ⓐ $(-\infty\ ,\ 1]\ ,\ (1\ ,\ \infty)$

ⓑ $(-\infty\ ,\ 1)\ ,\ [1\ ,\ \infty)$

ⓒ $(-\infty\ ,\ \infty)$

ⓓ $(-\infty\ ,\ 3]$

اختبار الوحدة الأولى

في التمارين (1–11)، أوجد النهايات.

(1) $\lim\limits_{x\to -2}(x^3 - 2x^2 + 1)$

(2) $\lim\limits_{x\to -\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{3x^2 - 2x + 5}\right)$

(3) $\lim\limits_{x\to -4}\sqrt{1-2x}$

(4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\frac{1}{2+x}-\frac{1}{2}}{x}$

(5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{4x}$

(6) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\csc x + 1}{x\csc x}$

(7) $\lim\limits_{x\to 1}|x-2| + 2x$

(8) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{9-x}-2}{x-5}$

(9) $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt[3]{x}+1}{x+1}$

(10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2 - 8x + 15}{x^2 - 7x + 12}$

(11) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x+\sin x}{x+\cos x}$

(12) لتكن الدالة f: $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{x^2 - 4}$

(a) بيّن أن $f(x)$ غير متصلة عند $x=-2$, $x=2$

(b) أعد تعريف الدالة f بحيث تصبح متصلة عند $x=2$

في التمرينين (13, 14)، أوجد المقاربات الرأسية لمنحنى الدالة f.

(13) $f(x) = \dfrac{x+3}{x+2}$

(14) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2(x+2)}$

(15) لتكن الدالة f:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \le -1 \\ -x & , \quad -1 < x < 0 \\ 1 & , \quad x = 0 \\ -x & , \quad 0 < x < 1 \\ 1 & , \quad x \ge 1 \end{cases}$$

(a) أوجد إن أمكن: $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$

(b) هل f متّصلة عند كل من $x=-1$ ، $x=0$ ، $x=1$؟ فسّر إجابتك.

في التمرينين (16, 17)، أوجد جميع نقاط عدم الاتصال للدالّة إن وجدت:

(16) $f(x) = \dfrac{x+1}{4-x^2}$

(17) $g(x) = \sqrt[3]{3x+2}$

في التمرينين (18, 19)، أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية.

(18) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}$

(19) $f(x) = \dfrac{2x^2+5x-1}{x^2+2x}$

في التمرينين (20, 21)، أوجد قيمة k التي تجعل الدالة f متصلة.

(20) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2+2x-15}{x-3} & , \ x \neq 3 \\ k & , \ x = 3 \end{cases}$

(21) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x} & , \ x \neq 0 \\ k & , \ x = 0 \end{cases}$

(22) لتكن f: $f(x) = \sqrt{x^2+5}$ ، g : $g(x) = x^2 - 5$ أوجد:

(a) $(g \circ f)(x)$

(b) $(g \circ f)(0)$

(c) $(f \circ g)(x)$

(d) $(f \circ g)(0)$

(23) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} 1 & : \ x \leqslant 2 \\ \dfrac{\sqrt{x^2+21}}{5} & : \ 2 < x < 15 \\ \dfrac{225-x^2}{x-15} & : \ x > 15 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

تمارين إثرائية

(1) لتكن f: $f(x) = \sqrt{3x-2}$

بيّن أن: $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = f(2) = 2$

(2) في كلٍّ مما يلي أوجد: $\lim\limits_{x \to b} (f \cdot g)(x)$, $\lim\limits_{x \to b} g(x)$, $\lim\limits_{x \to b} f(x)$

(a) $f(x) = \frac{1}{x}$, $g(x) = x$, $b = 0$

(b) $f(x) = -\frac{2}{x^3}$, $g(x) = 4x^3$, $b = 0$

(c) $f(x) = \frac{3}{x-2}$, $g(x) = (x-2)^3$, $b = 2$

(d) $f(x) = \frac{5}{(3-x)^4}$, $g(x) = (x-3)^3$, $b = 3$

(3) لتكن f دالة متصلة ولا تساوي الصفر على الفترة $[a\ ,\ b]$.

بيّن أن دائمًا $f(x) > 0$ لكل $x \in [a\ ,\ b]$ أو $f(x) < 0$ لكل $x \in [a\ ,\ b]$

(4) بيّن أنه إذا كانت الدالة f متصلة على فترة ما فإن الدالة $|f|$ هي كذلك أيضًا.

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} |x^3 - 4x| & , \quad x < 1 \\ x^2 - 2x - 2 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$

(a) أوجد النهاية لجهة اليمين والنهاية لجهة اليسار لـ f عند $x = 1$

(b) هل f لها نهاية عندما $x \to 1$؟ إذا كان كذلك فما هي تلك النهاية؟ وإذا لم يكن كذلك فبيّن السبب.

(c) هل f متصلة عند $x = 1$؟

(6) لنأخذ الدالتين f ، g حيث إن: $f(x) = \sqrt{2x+1}$ ، $g(x) = 3x - 4$

(a) حدّد مجال: $f \circ g$ ، $g \circ f$

(b) أوجد: $(f \circ g)(x)$ ، $(g \circ f)(x)$

(c) أوجد: $\lim\limits_{x \to \infty} (f \circ g)(x)$ ، $\lim\limits_{x \to -\infty} (g \circ f)(x)$

(7) إذا كانت: $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{ax^2 + bx - 5}{\sqrt{4x^2 - 5x + 8}} = -1$ فأوجد قيم a , b.

(8) لتكن f ، g دالتين: $f(x) = \sqrt{x^2 - 3}$ ، $g(x) = \dfrac{1}{x^2 - 1}$

أوجد نقاط انفصال الدالة $g \circ f$. هل يمكن التخلص من هذا الانفصال؟ اشرح.

(9) لتكن g , f دالتين: $f(x) = x^2 + 1$ معرفة على $\mathbb{R}$،

$g(x) = \dfrac{2}{\sqrt{x^2 - 4}}$ معرفة لكل $x \in (-\infty \;,\; -2) \cup (2 \;,\; \infty)$

(a) أوجد نقاط انفصال: $f \circ g$

(b) أوجد المقارب الأفقي والمقاربات الرأسية لمنحنى الدالة $f \circ g$

(10) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 5 & : \quad x \leqslant 4 \\ \dfrac{x^2 + 9}{5} & : \quad 4 < x \leqslant 18 \\ \dfrac{324 - x^2}{x - 18} & : \quad x > 18 \end{cases}$ ، ادرس اتصال الدالة على مجالها.

في التمارين (11–16) أوجد النهاية:

(11) $\displaystyle\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

(12) $\displaystyle\lim_{x \to 2^+} \frac{x - 2}{\sqrt{x^2 - 4}}$

(13) $\displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{(x + h)^3 - x^3}{h}$

(14) $\displaystyle\lim_{x \to -1} \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + 4x + 3}$

(15) $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \frac{14x^3 - 5x + 27}{x^4 + 10}$

(16) $\displaystyle\lim_{x \to -\infty} \frac{2x^4 + 12x^2 + 5}{7x^2 + 6}$

(17) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x \;, & x > 0 \\ x + 1 \;, & x \leq 0 \end{cases}$

(a) ارسم منحنى الدالة f.

(b) أوجد: $\displaystyle\lim_{x \to 0^-} f(x)$ ، $\displaystyle\lim_{x \to 0^+} f(x)$ ، $\displaystyle\lim_{x \to 0} f(x)$.

(18) بيّن في كل دالة مما يلي نقاط الانفصال وابحث إذا كان بالإمكان التخلص منه:

(a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 3x + 10}{x + 2}$

(b) $f(x) = \begin{cases} -x + 4 \;, & x > 3 \\ x - 2 \;, & 0 < x < 3 \\ x - 1 \;, & x \leq 0 \end{cases}$

(c) $f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

(d) $f(x) = \dfrac{x - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$

تمرَّنْ
2-1

معدلات التغير وخطوط المماس

Rates of Change and Tangent Lines

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد ميل المماس في كلّ مما يلي عند النقاط المبينة:

(1) $f(x) = \frac{1}{x-1} \quad , \quad x = 2$

(2) $f(x) = x^2 - 4x \quad , \quad x = 1$

(3) $f(x) = \frac{x+2}{x-3} \quad , \quad x = 2$

(4) $f(x) = 4 - x^2 \quad , \quad x = 1$

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{2}{x}$

(a) أوجد ميل المماس لمنحنى f عند $x = a$ حيث $a \neq 0$.

(b) **تفكير ناقد.** صف ماذا يحدث للمماس عند $x = a$ عندما تتغيّر a.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) ميل مماس منحنى الدالة f عند النقطة $(c \ , \ f(c))$ هو $\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$ (a)   (b)

(2) السرعة المتوسطة لجسيم متحرك على خط مستقيم هي: $\bar{v} = \frac{d(t_1+h)-d(t_1)}{h}$ (a)   (b)

(3) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = x^2$ عند $x = -2$ هو 4   (a)   (b)

(4) ميل مماس منحنى الدالة f: $f(x) = |x|$ عند $x = -2$ هو 2   (a)   (b)

(5) يكون مماس منحنى الدالة f: $f(x) = 4$ عند النقطة $(-1 \ , \ 4)$ موازيًا لمحور السينات.   (a)   (b)

في التمرينين (7–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = 9 - x^2$ عند $x = 2$ هو:

ⓐ -5 ⓑ -4 ⓒ 4 ⓓ 5

(7) ليكن منحنى الدالة f : $f(x) = x^2 - 4x + 3$ فإن النقطة التي يكون مماس المنحنى عندها أفقيًّا هي:

ⓐ $(3 , 0)$ ⓑ $(1 , 0)$ ⓒ $(2 , -1)$ ⓓ $(-1 , 2)$

تمرَّنْ
2–2

المشتقة

The Derivative

المجموعة A تمارين مقالية

(1) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = \dfrac{3}{x}$ عند $x = 3$

(2) استخدم التعريف: $f'(a) = \lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ لإيجاد مشتقّة الدالّة f: $f(x) = 2x^3$ عند $x = 1$

(3) بيّن أن الدالة f لها مشتقة لجهة اليمين ومشتقة لجهة اليسار عند $x = 1$، لكن ليس لها مشتقة عند $x = 1$

$$f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \le 1 \\ x & , \quad x > 1 \end{cases}$$

(4) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x^2+2x & : \quad x \le 1 \\ 4x-1 & : \quad x > 1 \end{cases}$

ابحث قابلية اشتقاق الدالة f عند $x = 1$.

(5) لتكن الدالة f: $f(x) = |x-3|$.

بيّن أن الدالة f متصلة عند $x = 3$ ولكنها غير قابلة للاشتقاق عندها.

(6) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 0 & : \quad x < 0 \\ 1 & : \quad x = 0 \\ 2 & : \quad x > 0 \end{cases}$.

بيّن أن الدالّة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$.

(7) لتكن الدالة g: $g(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & , \quad x \le 0 \\ 2x+1 & , \quad x > 0 \end{cases}$. أوجد $g'(0)$.

(8) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 & : \quad x \le 2 \\ 4x-4 & : \quad x > 2 \end{cases}$. أوجد $f'(2)$.

(9) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^3 & , \quad x \le 1 \\ 3x+k & , \quad x > 1 \end{cases}$. قابلة للاشتقاق عند $x = 1$، فأوجد قيمة k.

(10) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} 3-x & \quad x < 1 \\ ax^2+bx & \quad x \ge 1 \end{cases}$ حيث a, b ثابتان.

(a) إذا كانت f متصلة لكل قيم x، فما العلاقة بين a وb؟

(b) أوجد القيم الوحيدة لكل من a, b التي تجعل f متصلة وقابلة للاشتقاق.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (6–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

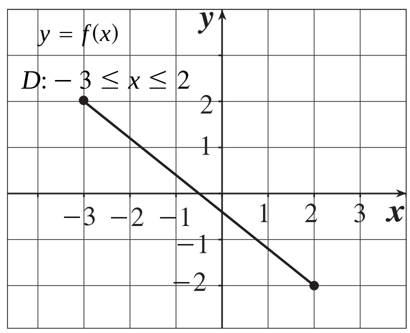
(1) إذا كانت f : $f(x) = 3x - 12$ فإن $f'(x) = 3$. (a) (b)

(2) الدالة f : $f(x) = x|x|$ غير قابلة للاشتقاق $\forall x \in \mathbb{R}$. (a) (b)

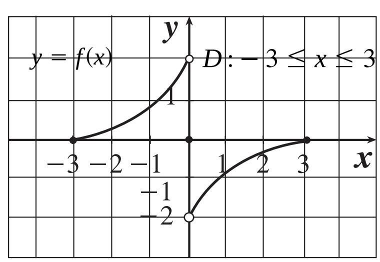
(3) إن الدالة f : $f(x) = \dfrac{x^3 - 8}{x^2 - 4x - 5}$ غير قابلة للاشتقاق عندما x تساوي -1 فقط. (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x) = \begin{cases} 2x - 1 & : \quad x < 4 \\ x^2 - 9 & : \quad x > 4 \end{cases}$ قابلة للاشتقاق عند $x = 4$. (a) (b)

(5) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه قابلة للاشتقاق على الفترة $[-3 , 2]$. (a) (b)



(6) إن الدالة f ذات الرسم البياني أدناه هي متصلة على الفترة $[-3 , 3]$
ولكن غير قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ (a) (b)



في التمارين (12–7)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(7) إن الدالة f : $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 2}$ ليست قابلة للاشتقاق عند $x = 0$ والسبب هو:

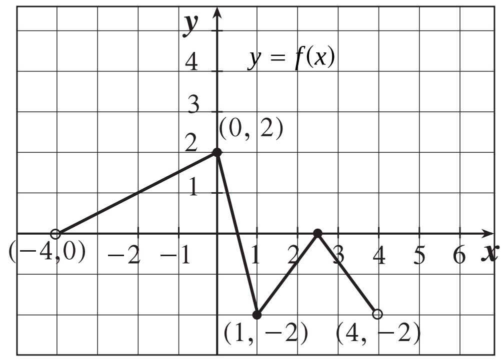
(a) ناب

(b) ركن

(c) مماس عمودي

(d) غير متصلة

(8) تكون الدالة f ذات الرسم البياني أدناه غير قابلة للاشتقاق عند كل ... = x



(a) $0 \ , \ 1 \ , \ 2\frac{1}{2}$

(b) $-2 \ , \ +2$

(c) $-4 \ , \ 0 \ , \ 1 \ , \ 4$

(d) $1 \ , 4$

(9) الدالة f القابلة للاشتقاق عند $x = 3$ فيما يلي هي:

(a) $f(x) = \frac{x+1}{x-3}$

(b) $\sqrt{3-x}$

(c) $\begin{cases} 3x-1 & : \quad x \leqslant 3 \\ 1 & : \quad x > 3 \end{cases}$

(d) $\sqrt[3]{x+2}$

(10) إذا كانت $f(x) = \frac{x-2}{x^2-4}$ فإن مجال f' هو:

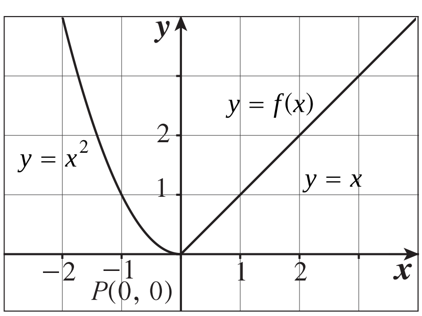
(a) $\mathbb{R} - \{-2 \ , \ 2\}$

(b) $\mathbb{R} - \{-2\}$

(c) $\mathbb{R} - \{2\}$

(d) $\mathbb{R} - (-2 \ , \ 2)$

(11) في الشكل المقابل، عند النقطة P:



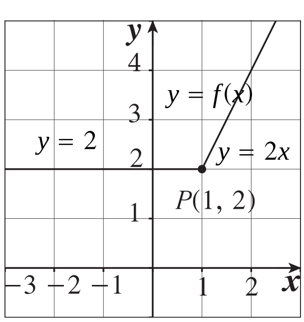
(a) المشتقة جهة اليسار موجبة.

(b) المشتقة جهة اليمين سالبة.

(c) الدالة قابلة للإشتقاق.

(d) ليس أيّ مما سبق.

(12) في الشكل المقابل، عند النقطة P:



(a) $f'_+(1) = 1$

(b) $f'_-(1) = 0$

(c) $f'_-(1) = 2$

(d) f قابلة للاشتقاق

قواعد الاشتقاق

Rules of Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (4–1)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = \frac{x^3}{3} - x$

(2) $y = 2x + 1$

(3) $y = x^4 - 7x^3 + 2x^2 + 15$

(4) $y = 4x^{-2} - 8x + 1$

في التمرينين (6–5)، أوجد $f'(x)$:

(5) $f(x) = (x^2 - 5x + 6)(x^3 + 2x^2 + 1)$

(6) $f(x) = (2x^5 + 4)(5 - x^2)$

(7) لتكن $y = \frac{x^2 + 3}{x}$، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(a) باستخدام قاعدة القسمة.

(b) بقسمة حدود البسط على المقام أوّلًا ثم إجراء الاشتقاق.

في التمرينين (9–8)، أوجد $\frac{dy}{dx}$:

(8) $y = \frac{x^2}{1 - x^3}$

(9) $y = \frac{\sqrt{x} - 1}{\sqrt{x} + 1}$

(10) بفرض أنّ u , v دالّتان في x وقابلتان للاشتقاق عند $x = 0$، وأنّ

$u(0) = 5$, $u'(0) = -3$, $v(0) = -1$, $v'(0) = 2$

أوجد قيم المشتقّات التالية عند $x = 0$

(a) $(uv)'$

(b) $\left(\frac{u}{v}\right)'$

(c) $\left(\frac{v}{u}\right)'$

(d) $(7v - 2u)'$

(11) أوجد معادلة المماس للمنحنى $y = x^3 + x$ عند النقطة $(1 , 2)$.

(12) أوجد الأجزاء المقطوعة من محوري السينات والصادات بواسطة مماس منحنى الدالة $y = x^3$ عند النقطة $(-2 , -8)$.

(13) أوجد معادلة المماس ومعادلة العمودي (الناظم) لمنحنى الدالة $y = \frac{8}{4 + x^2}$ عند النقطة $(2 , 1)$.

(14) لتكن الدالة f : $f(x) = \begin{cases} x - \frac{4}{x} & : \quad x \geqslant 2 \\ x^2 - 4 & : \quad x < 2 \end{cases}$. أوجد $f'(x)$ وعيّن مجالها.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = -x^2 + 3$ فإن $\frac{dy}{dx} = -2$ — (a) (b)

(2) إذا كانت $y = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{3} + x$ فإن $\frac{dy}{dx} = x^2 + \frac{2}{3}x + 1$ — (a) (b)

(3) إذا كانت $y = \frac{2x+5}{3x-2}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{12x+11}{(3x-2)^2}$ — (a) (b)

(4) إذا كانت $y = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x^3}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{3}{x^4}$ — (a) (b)

في التمارين (16—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = 1 - x + x^2 - x^3$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-1 + 2x - 3x^2$ (b) $2 - 3x$ (c) $-6x + 2$ (d) $1 - x$

(6) إذا كانت $f(x) = 5x^3 - 3x^5$ فإن $f'(x)$ تساوي:

(a) $20x + 60x^3$ (b) $15x^2 - 15x^4$ (c) $30x - 30x^4$ (d) $30x - 60x^3$

(7) إذا كانت $y = \frac{x^2 + 5x - 1}{x^2}$ فإن $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=1}$ تساوي:

(a) $\frac{-7}{2}$ (b) -3 (c) 3 (d) $\frac{7}{2}$

(8) ميل مماس منحنى $y = x^2 + 5x$ عند $x = 3$ يساوي:

(a) 24 **(b)** $-\frac{5}{2}$ **(c)** 11 **(d)** 8

(9) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{2}{x}$ عند $x = -2$ هو:

(a) -1 (b) $-\frac{1}{2}$ (c) $\frac{1}{2}$ (d) 1

(10) ميل مماس منحنى الدالة f : $f(x) = \frac{-1}{x-1}$ عند $x = 0$ هو:

(a) -1 (b) 0 (c) 1 (d) 2

(11) للدالة f : $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$ مماس رأسي معادلته:

(a) $x = 0$ (b) $y = 0$ (c) $x = 1$ (d) $y = 1$

(12) ميل الناظم لمنحنى الدالة $y = x^3 - 3x + 1$ عند النقطة $(2\ ,\ 3)$ هي:

ⓐ 9 ⓑ 3 ⓒ $-\frac{1}{3}$ ⓓ $\frac{-1}{9}$

(13) النقاط على منحنى الدالة $y = 2x^3 - 3x^2 - 12x + 20$ التي يكون المماس عندها موازيًا لمحور السينات هي:

ⓐ $(-1\ ,\ 27)$ ⓑ $(2\ ,\ 0)$

ⓒ $(2,0)\ ,\ (-1,27)$ ⓓ $(-1,27)\ ,\ (0,20)$

(14) لتكن الدالة f: $f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x & : \quad x \geqslant 1 \\ 4x - 1 & : \quad x < 1 \end{cases}$ فإن مجال f' هو:

ⓐ $\{1\}$ ⓑ $\mathbb{R} - \{1\}$

ⓒ $[1\ ,\ \infty)$ ⓓ $\mathbb{R}$

(15) إن معادلة المماس لمنحنى الدالة f : $f(x) = 2x^2 - 13x + 2$ عند $x = 3$ هي:

ⓐ $y = x - 16$ ⓑ $y = -x + 16$

ⓒ $y = -x - 13$ ⓓ $y = -x - 16$

(16) إذا كانت $f(2) = 3$ ، $f'(2) = 5$ عند النقطة P على منحنى الدالة f فإن:

ⓐ معادلة خط المماس: $y = 5x + 7$

ⓑ معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + 7$

ⓒ معادلة الخط العمودي (الناظم): $y = -\frac{1}{5}x + \frac{17}{5}$

ⓓ معادلة خط المماس: $y = 5x + 3$

تمرَّنْ
2–4

مشتقّات الدوال المثلّثيّة

Derivatives of Trigonometric Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–4)، أوجد $\frac{dy}{dx}$

(1) $y = 2\sin x - \tan x$

(2) $y = 4 - x^2 \sin x$

(3) $y = \frac{\cot x}{1 + \cot x}$

(4) $y = \frac{\cos x}{1 + \sin x}$

(5) أوجد مشتقة الدالة $y = \frac{\tan x}{x}$ عند $x = \frac{\pi}{4}$.

(6) أثبت أن منحنى كل من الدالتين $y = \frac{1}{\cos x}$, $y = \cos x$ له مماس أفقيّ عند $x = 0$

(7) لتكن: $y = 1 + \frac{\sqrt{2}}{\sin x} + \cot x$، أوجد معادلة المماس لمنحنى الدالة عند $P\left(\frac{\pi}{4}, 4\right)$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–4)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y = 1 + x - \cos x$ فإن $\frac{dy}{dx} = 1 + \sin x$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y = \frac{4}{\cos x}$ فإن $\frac{dy}{dx} = -\frac{4}{\cos^2 x}$ (a) (b)

(3) ميل المماس لمنحنى الدالة $y = \sin x + 3$ عند $x = \pi$ هو 1 (a) (b)

(4) إن منحنى الدالة $y = \tan x$ ومنحنى الدالة $y = \cot x$ ليست لهما مماسات أفقية. (a) (b)

في التمارين (5–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y = \frac{1}{x} + 5\sin x$ فإن $\frac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(b) $\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(c) $-\frac{1}{x^2} + 5\cos x$

(d) $\frac{1}{x^2} - 5\cos x$

(6) إذا كانت $f(x) = 3x + x\tan x$ فإن $f'(0)$ يساوي:

(a) -3

(b) 0

(c) 1

(d) 3

(7) إذا كانت $y = \dfrac{x}{1+\cos x}$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $-\dfrac{x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(b) $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(c) $\dfrac{1+\cos x - x\sin x}{1+\cos^2 x}$

(d) $\dfrac{1+\cos x + x\sin x}{(1+\cos x)^2}$

(8) معادلة المستقيم العمودي على المماس لبيان الدالة $y = 2\cos x$ عند النقطة $\left(\dfrac{\pi}{2}\ ,\ 0\right)$ هي:

(a) $y = \dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}$

(b) $y = -\dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

(c) $y = \dfrac{x}{2} + \dfrac{\pi}{4}$

(d) $y = -\dfrac{x}{2} - \dfrac{\pi}{4}$

(9) إذا كانت $y = \dfrac{1}{\sin x}$ فإن y' تساوي:

(a) $\cot x \cdot \csc x$

(b) $\cos x$

(c) $-\cot x \cdot \csc x$

(d) $-\cos x$

تمرَّنْ
2-5

قاعدة السلسلة

Chain Rule

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (3—1)، أوجد $(f \circ g)'(x)$.

(1) $f(x) = 2x + 1 \quad , \quad g(x) = 3x^2$

(2) $f(x) = \dfrac{x-1}{x} \quad , \quad g(x) = x^2 + 1$

(3) $f(x) = 5x^2 - 1 \quad , \quad g(x) = x^{15}$

في التمارين (6—4)، أوجد $(f \circ g)'$ عند القيم المعطاة لـ x.

(4) $f(x) = x^5 + 1 \quad , \quad g(x) = \sqrt{x} \quad , \quad x = 1$

(5) $f(x) = x + \dfrac{1}{\cos^2 x} \quad , \quad g(x) = \pi x \quad , \quad x = \dfrac{1}{4}$

(6) $f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \quad , \quad g(x) = 10x^2 + x + 1 \quad , \quad x = 0$

(7) أوجد $\dfrac{dy}{dx}$ باستخدام قاعدة التسلسل.

(a) $y = \cos u \quad , \quad u = 6x + 2$

(b) $y = 5u^3 + 4 \quad , \quad u = 3x^2 + 1$

(8) أوجد $\dfrac{ds}{dt}$، حيث $s = \sin\left(\dfrac{3\pi}{2}t\right) + \cos\left(\dfrac{7\pi}{4}t\right)$

في التمارين (15—9)، أوجد $\dfrac{dy}{dx}$

(9) $y = \tan(2x - x^3)$

(10) $y = \sin(3x + 1)$

(11) $y = (\tan x + \sec x)^2$

(12) $y = \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^2$

(13) $y = (1 - 6x)^{\frac{2}{3}}$

(14) $y = \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

(15) $y = \sin^2(3x - 2)$

في التمرينين (17—16)، أوجد:

(a) **معادلة المماس على منحنى الدالة.**

(b) **معادلة الخط العموديّ على المماس في النقاط المعطاة على منحنى كل دالة مما يلي.**

(16) $f(x) = \sqrt{x^2 + 5} \quad , \quad (2\ ,\ 3)$ عند

(17) $g(x) = (x^3 + 1)^8 \quad , \quad (0\ ,\ 1)$ عند

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت $y=\cos(\sqrt{3}x)$ فإن $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{3}\sin(\sqrt{3}x)$ (a) (b)

(2) إذا كانت $y=5\cot\left(\dfrac{2}{x}\right)$ فإن $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{10}{x^2}\csc^2\left(\dfrac{2}{x}\right)$ (a) (b)

(3) إذا كانت $y=(x+\sqrt{x})^{-2}$ فإن $\dfrac{dy}{dx}=-2(x+\sqrt{x})^{-1}\left(1+\dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right)$ (a) (b)

(4) إذا كانت $s=\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-3t\right)$ فإن $\dfrac{ds}{dt}=3\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-3t\right)$ (a) (b)

في التمارين (5–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كانت $y=\sin^{-5}x-\cos^3x$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $5\sin^{-6}x\cos x-3\cos^2x\sin x$

(b) $5\sin^{-6}x\cos x+3\cos^2x\sin x$

(c) $-5\sin^{-6}x\cos x-3\cos^2x\sin x$

(d) $-5\sin^{-6}x\cos x+3\cos^2x\sin x$

(6) إذا كانت $y=\dfrac{3}{\sqrt{2x+1}}$ فإن $\dfrac{dy}{dx}$ تساوي:

(a) $3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(b) $-3(2x+1)^{-\frac{3}{2}}$

(c) $-3(2x+1)^{-\frac{1}{2}}$

(d) $3(2x+1)^{-1}$

(7) إذا كانت $s=\dfrac{4}{3\pi}\sin 3t+\dfrac{4}{5\pi}\cos 5t$ فإن $\dfrac{ds}{dt}$ تساوي:

(a) $\dfrac{4}{\pi}\sin 3t-\dfrac{4}{\pi}\cos 5t$

(b) $\dfrac{4}{\pi}\cos 3t+\dfrac{4}{\pi}\sin 5t$

(c) $\dfrac{4}{\pi}\cos 3t-\dfrac{4}{\pi}\sin 3t$

(d) $\dfrac{4}{\pi}\cos 3t-\dfrac{4}{\pi}\sin 5t$

(8) إذا كانت $r=\tan(2-\theta)$ فإن $\dfrac{dr}{d\theta}$ تساوي:

(a) $\sec^2(2-\theta)$

(b) $-\sec^2(2-\theta)$

(c) $\sec^2(\theta+2)$

(d) $\sec(2-\theta)$

(9) إذا كانت $f(u)=\cot\dfrac{\pi u}{10}$ و $u=g(x)=5\sqrt{x}$ فإن $(f\circ g)'(x)$ عند $x=+1$ تساوي:

(a) $\dfrac{3\pi}{4}$

(b) $\dfrac{\pi}{4}$

(c) $-\dfrac{\pi}{4}$

(d) $-\dfrac{3\pi}{4}$

تمرَّنْ
2–6

المشتقات ذات الرتب العليا والاشتقاق الضمني

Higher Order Derivatives And Implicit Differentiation

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (6–1)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(1) $y = 2x^4 - x^3 + x^2 - 3x$

(2) $y = -x^5 + 2x^3 - 4x + 1$

(3) $y = \frac{3}{x-2}$

(4) $y = \sin 2x$

(5) $y = \cos 4x$

(6) $y = \sin^2 x$

في التمارين (9–7)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$

(7) $y^2 = x^2 + 4x + 2$

(8) $y^2 - 4y = x - 3$

(9) $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = 4$

في التمارين (12–10)، أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العموديّ على المماس على منحنى الدالة عند كل نقطة معطاة على هذا المنحنى.

(10) $x^2 + 2xy - y^2 = 7 \quad , \quad (2\ ,\ 3)$

(11) $6x^2 + 3xy - 2y^3 - 7y - 6 = 0 \quad , \quad (-1\ ,\ 0)$

(12) $2xy + \pi \sin y = 2\pi \quad , \quad \left(1\ ,\ \frac{\pi}{2}\right)$

(13) أوجد A , B في: $y = A\sin x + B\cos x$ حيث $y'' - y = \sin x$.

(14) أوجد $\frac{dy}{dx}$ حيث $y = \frac{\cos x}{1 + \tan x}$ واكتب معادلة المماس على منحنى الدالة عند $A(0\ ,\ 1)$.

(15) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

فأثبت أن: $4x^2 f''(x) - 3\,f(x) = 0$

(16) إذا كانت $f(x) = \frac{1}{1 - x^2}$

فأثبت أن: $(1 - x^2)f'''(x) - 6xf''(x) - 6f'(x) = 0$

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (3—1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كان: $y = \frac{-x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + x$ فإن: $\frac{d^2y}{dx^2} = -2x$ (a) (b)

(2) إذا كان: $y = \frac{-3x^4}{4} - \frac{3x^2}{2} + 4x$ فإن: $\frac{d^3y}{dx^3} = -18x$ (a) (b)

(3) معادلة المماس لمنحنى: $x^2 - y^2 - x^2y = 7$ عند النقطة $(2 , -1)$ هي: $y = 4x - 9$ (a) (b)

في التمارين (7—4)، ظلّل رمز الدائرة الدال على الإجابة الصحيحة.

(4) إذا كانت: $f(x) = (1+6x)^{\frac{2}{3}}$ فإن: $f''(x)$ تساوي:

(a) $\frac{8}{27}(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(b) $8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(c) $-8(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(d) $-64(1+6x)^{-\frac{4}{3}}$

(5) إذا كانت: $f(x) = \frac{2x+1}{3x+2}$ فإن: $f^{(4)}(x)$ تساوي:

(a) $24(3x+2)^{-5}$

(b) $-24(3x+2)^{-5}$

(c) $648(3x+2)^{-5}$

(d) $-648(3x+2)^{-5}$

(6) ميل الخطّ العمودي على المماس (الناظم) عند النقطة $A(3 , 2)$ على منحنى: $x^2 - y^2 - 2xy = -7$ هو:

(a) -5

(b) $-\frac{1}{5}$

(c) $\frac{1}{5}$

(d) 5

(7) ميل المماس عند النقطة $A(1 , 1)$ على منحنى: $x^2 - 3y^2 + 2xy = 0$ هي:

(a) -1

(b) 0

(c) 1

(d) 2

اختبار الوحدة الثانية

في التمارين (9–1)، أوجد مشتقّات الدوالّ.

(1) $y = x^5 - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{4}x$

(2) $y = 3 - 7x^3 + 3x^7$

(3) $y = 2\sin x \cos x$

(4) $y = \frac{2x+1}{2x-1}$

(5) $s = \cos(1-2t)$

(6) $s = \cot\frac{2}{t}$

(7) $y = \sqrt{x} + 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$

(8) $y = x\sqrt{2x+1}$

(9) $y = \frac{x^2}{\sin(5x)}$

في التمرينين (11–10)، أوجد عند النقطة المبيّنة معادلة:

(a) المماس لمنحنى الدالة.

(b) الخطّ العموديّ على المماس (الناظم).

(10) $y = \sqrt{x^2 - 2x}\ ,\quad x = 3$

(11) $y = 4 + \cot x - \frac{2}{\sin x}\ ,\quad x = \frac{\pi}{2}$

(12) لتكن f: $f(x) = \begin{cases} x & , \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 - x & , \quad 1 < x \le 2 \end{cases}$

بيّن أن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$

في التمارين (16–13)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$ ، $\frac{d^2y}{dx^2}$ ، $\frac{d^3y}{dx^3}$

(13) $y = 3x^4 - 5x^2 + 2x$

(14) $y = \sin 3x$

(15) $y = \cos^2 2x$

(16) $y = (3x-5)(x^2-x)$

في التمرينين (18–17)، أوجد: $\frac{dy}{dx}$

(17) $x^2 - 3y^2 + y = 4$

(18) $x^2 + xy^2 + 2x - 3y = 0$

(19) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على المماس (الناظم) على منحنى الدالة: $x^2 + 2xy = 3$ عند النقطة $A(1\ ,\ 1)$ على هذا المنحنى.

تمارين إثرائية

(1) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة f: $f(x) = -x^2 + 5x - 6$ عند نقاط تقاطع المنحنى مع محور السينات.

(2) يتحرك جسيم على خط مستقيم بمعادلة: $S(t) = t^3 - 3t^2$ حيث t الوقت بالثواني (s) وS بالأمتار (m).

أوجد السرعة المتجهة لهذا الجسيم والعجلة عند $t = 2$.

(3) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{x^2}{\sqrt{4 - x^2}}$

(4) أوجد ميل المماس على منحنى الدالة: $x = y^2 - 4y$ عند نقطة تقاطع المنحنى مع محور الصادات.

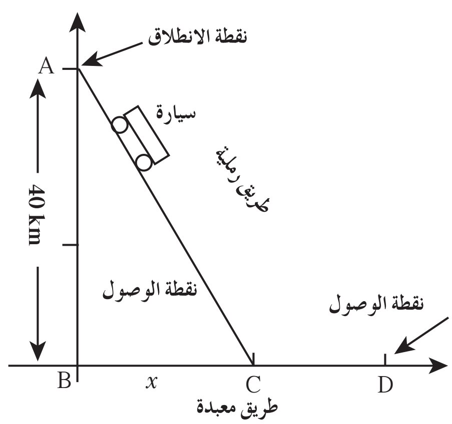
(5) أوجد $\frac{dy}{dx}$، حيث $y = \frac{u^2 - 1}{u^2 + 1}$ و $u = \sqrt[3]{x^2 + 2}$.

(6) أوجد معادلة المماس ومعادلة الخطّ العمودي على منحنى الدالة: $x \sin 2y = y \cos 2x$ عند النقطة $A\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right)$ على هذا المنحنى.

(7) **اكتب للتعلم.** هل هناك قيمة للثابت b تجعل الدالة التالية: $g(x) = \begin{cases} x + b, & x < 0 \\ \cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ متصلة وقابلة للاشتقاق عند $x = 0$؟ أعط أسبابًا لإجابتك.

(8) استخدم المتطابقة $\sin 2x = 2 \sin x \cos x$ لإيجاد مشتقّة $\sin 2x$، ثم استخدم المتطابقة $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$ للتعبير عن هذه المشتقة بدلالة $\cos 2x$.

(9) يشارك أحد المتبارين في سباق السيارات على الرمال في الصحراء، حيث A هي نقطة الانطلاق وتبعد 40 km عن النقطة B، ونقطة الوصول هي على الطريق المعبدة عند D.



يستطيع هذا المتباري قيادة سيارته بمعدل سرعة 45 km على الرمال وبمعدل سرعة 75 km على الطريق المعبدة (انظر الصورة)، وسوف ينال الجائزة الكبيرة إذا وصل إلى الموقع D الذي يبعد 50 km عن الموقع B في وقت لا يتجاوز 85 دقيقة. المطلوب مساعدة هذا المتباري على تحليل هذه المسألة وإيجاد أقل وقت ممكن لهذه الرحلة.

هل سيربح الجائزة؟

(10) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد $\frac{dy}{dx}$ من $x^2 + 5xy + y^5 = 8$

(11) استخدم الاشتقاق الضمني لتجد ميل المماس عند النقطة $(4- , 1)$ على منحنى: $2xy - 3x - 4y = 5$
واكتب معادلة للخط العمودي على المماس على المنحنى عند النقطة المعطاة.

(12) أثبتت إحدى الدراسات في إحدى الضواحي الصناعية أن متوسط الانبعاث اليومي لأول أكسيد الكربون يمكن نمذجتة بالقانون: $C(P) = \sqrt{0.5p^2 + 17}$ جزء من مليون، حيث p هو عدد السكان بالآلاف، ويقدر عدد السكان انطلاقاً من هذه السنة بدلالة t سنة بالقانون: $p(t) = 0.1t^2 + 3.1$ بآلاف الأشخاص.

(a) ما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t بعد 3 سنوات بدءًا من الآن؟ فسِّر.

(b) إذا تزايد عدد السكان مع الوقت إلى 8 000، فما معدل تغير أول أكسيد الكربون مع الوقت t في السنوات القادمة بدءًا من الآن؟ فسّر.

(13) **إيجاد المماسات.** أوجد معادلات جميع المماسات لمنحنى الدالة $f(x) = 9 - x^2$ التي تمرّ بالنقطة $(1 , 12)$

تمرَّنْ
3–1

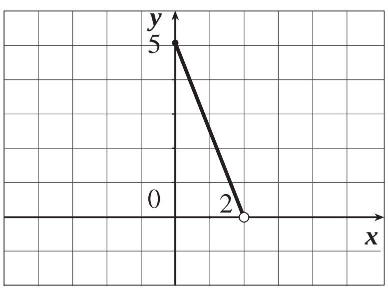
القيم القصوى (العظمى/الصغرى) للدوال

Extreme Values of Functions

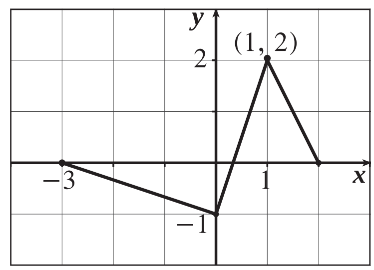
المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، أوجد النقاط التي توجد عندها قيم قصوى.

(1)

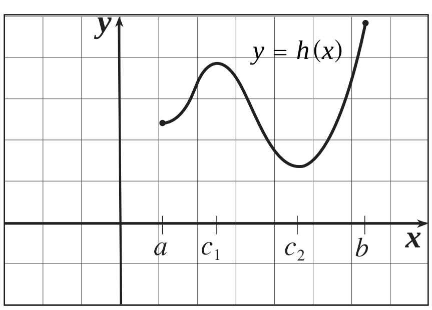


(2)

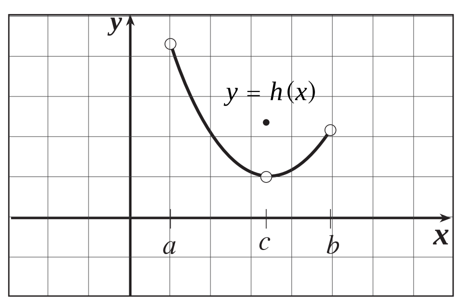


في التمارين (6–3)، حدّد قيمة x التي قد تقع عندها إحدى القيم القصوى المطلقة للدوال الموضح بيانها فيما يلي وأيًّا منها يمكن تطبيق نظريّة القيم القصوى عليها.

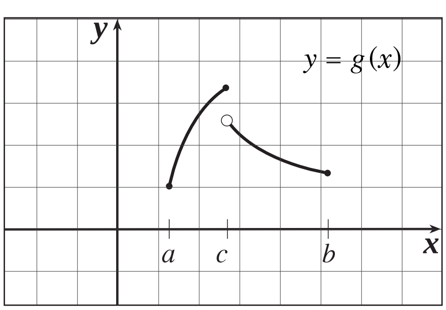
(3)



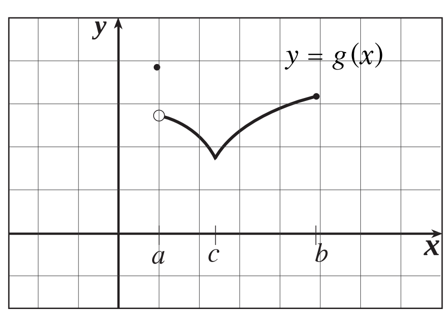
(4)



(5)



(6)



في التمارين (9–7)، حدّد النقاط الحرجة.

(7) $y = x^2(x+2)$

(8) $y = x\sqrt{3-x}$

(9) $y = \begin{cases} 3-x\ , & x<0 \\ 3+2x-x^2\ , & x \geq 0 \end{cases}$

في التمارين (10–14)، أوجد القيم القصوى المطلقة لكلّ دالّة من الدوال التالية في الفترة المبينة.

(10) $y = 2x^2 - 8x + 9 \quad , \quad [0,4]$

(11) $f(x) = x^{\frac{3}{5}} \quad , \quad [-2,3]$

(12) $y = \dfrac{x}{x^2+1} \quad , \quad [-3,0]$

(13) $y = \sqrt{3 + 2x - x^2} \quad , \quad [-1,1]$

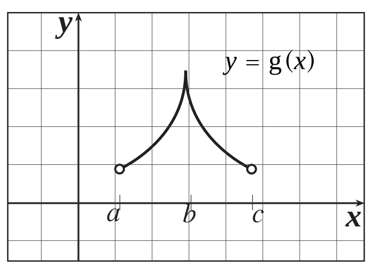
(14) $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–5)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) إذا كانت f دالة متصلة على (a , b) فإن f لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة على هذه الفترة. (a) (b)

(2) في الشكل التالي، للدالة g قيمة قصوى محليّة عند $x = c$. (a) (b)



(3) الدالة g : $g(x) = \sqrt{9 - x^2}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(4) الدالة f : $f(x) = \sqrt{x^2 - 1}$ لها قيمة عظمى في مجالها. (a) (b)

(5) الدالة h : $h(x) = |3x - 5|$ لها قيمة حرجة عند $x = 5$. (a) (b)

في التمارين (6–9)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) لتكن $y = |x|$، فإن الدالة y:

(a) لها قيمة عظمى مطلقة فقط.

(b) لها قيمة صغرى مطلقة فقط.

(c) لها قيمة عظمى مطلقة وقيمة صغرى مطلقة.

(d) ليس لها قيمة صغرى مطلقة وليس لها قيمة عظمى مطلقة.

(7) عدد النقاط الحرجة للدالة: $y = 3x^3 - 9x - 4$ على الفترة $(0 , 2)$ هو:

(a) 3 (b) 2 (c) 1 (d) 0

(8) الدالة k : $k(x) = |x^2 - 4|$ لها:

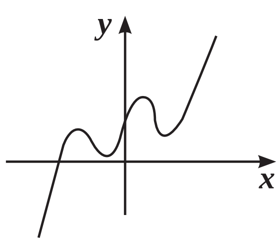
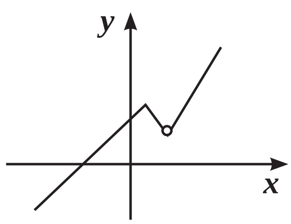
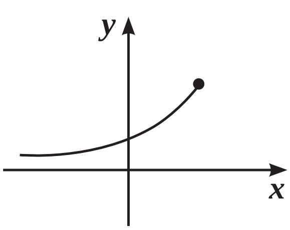
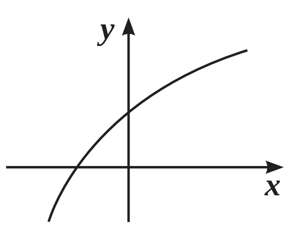
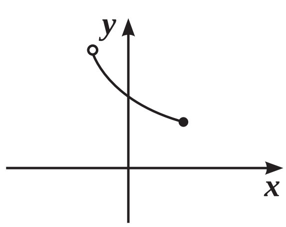
ⓐ قيمة عظمى مطلقة ⓑ قيمة صغرى مطلقة

ⓒ نقطتان حرجتان فقط ⓓ ليس أيّ مما سبق

(9) إذا كانت $f(x) = ax^2 - 25x$ لها قيمة قصوى محلية عند $x = \frac{5}{2}$، فإنّ a تساوي:

ⓐ 2 ⓑ 3 ⓒ 4 ⓓ 5

في التمارين (12–10)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل عبارة في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

القائمة (1)	القائمة (2)
(10) لها قيمة عظمى مطلقة.	ⓐ 
(11) لها أكثر من قيمة قصوى محلية.	ⓑ 
	ⓒ 
(12) ليس لها قيم قصوى محلية أو مطلقة	ⓓ 
	ⓔ 

في التمارين (16–13)، اختر لكل جدول من القائمة (1) الرسم البياني الذي يناسبه في القائمة (2).

القائمة (1)

(13)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أكبر من الصفر

(14)

x	$f'(x)$
a	0
b	0
c	أصغر من الصفر

(15)

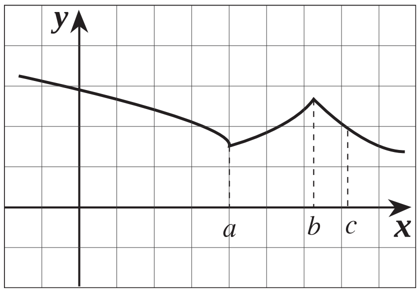
x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	0
c	أصغر من الصفر

(16)

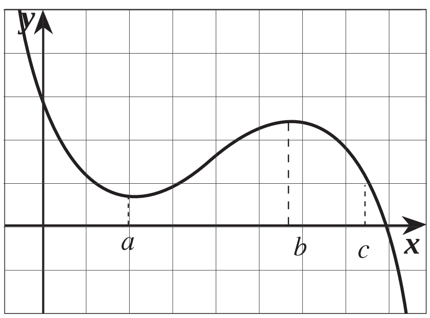
x	$f'(x)$
a	(غير موجودة)
b	(غير موجودة)
c	أصغر من الصفر

القائمة (2)

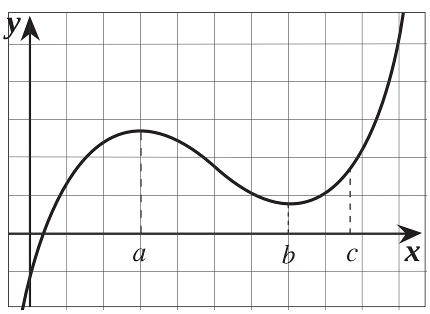
a



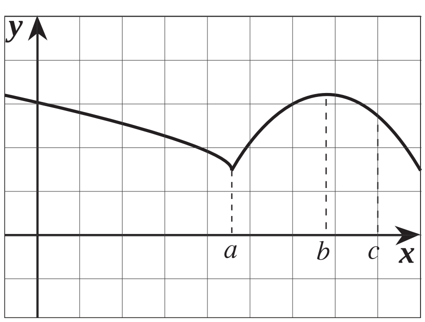
b



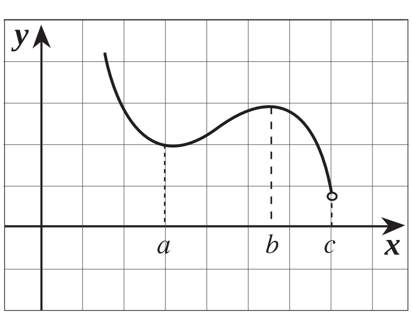
c



d



e



تمرَّنْ
3−2

تزايد وتناقص الدوال

Increasing and Decreasing Functions

المجموعة A تمارين مقالية

(1) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x^2 + 2x - 1$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $[0, 1]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

(2) بيّن أن الدالة f: $f(x) = x + \frac{1}{x}$ تحقّق شروط نظريّة القيمة المتوسطة على $\left[\frac{1}{2}\,,\,2\right]$. ثمّ أوجد قيمة c التي تنبئ بها النظرية. فسّر إجابتك.

في التمارين (7−3)، حدّد الفترات التي تكون فيها الدوال التالية متزايدة والفترات التي تكون فيها متناقصة.

(3) $f(x) = 5x - x^2$

(4) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24$

(5) $k(x) = \frac{1}{x^2}$

(6) $h(x) = \frac{-x}{x^2 + 4}$

(7) $f(x) = x^4 - 2x^2$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (4−1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة g: $g(x) = x^2 - x - 3$ متزايدة على $\left(-\infty\,,\,\frac{1}{2}\right)$ (a) (b)

(2) الدالة f: $f(x) = x^4 - 10x^2 + 9$ متناقصة على كل من الفترة $(-\infty\,,\,-\sqrt{5})$ والفترة $(\sqrt{5}\,,\,\infty)$ (a) (b)

(3) الدالة f: $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$ تحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة على $[0, 1]$ (a) (b)

(4) الدالة f: $f(x) = x^3 + 1$ مطّردة على $\mathbb{R}$.   (a) (b)

في التمارين (8−5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) تكون الدالة k: $k(x) = \frac{x}{x^2 - 4}$

(a) متزايدة على كل فترة من مجال تعريفها.

(b) متناقصة على كل فترة من مجال تعريفها.

(c) متناقصة على الفترة $(-\infty\,,-2)$ والفترة $(-2\,,2)$ ومتزايدة على الفترة $(2\,,\,\infty)$

(d) ليس أيّ مما سبق.

(6) الدالة R : $R(x) = |x|$

a متزايدة على مجال تعريفها.

b متناقصة على مجال تعريفها.

c متزايدة على الفترة $(\infty , 0)$ ومتناقصة على الفترة $(-\infty , 0)$

d متناقصة على الفترة $(\infty , 0)$ ومتزايدة على الفترة $(-\infty , 0)$

(7) إذا كانت f' : $f'(x) = -x^2$ ، فإنّ الدالة f :

a متزايدة على مجال تعريفها.

b متناقصة على مجال تعريفها.

c متزايدة على الفترة $(-\infty , 0)$ فقط

d متناقصة على الفترة $(\infty , 0)$ فقط

(8) إذا كانت f' : $f'(x) = -3x$ ، فإنّ الدالة f:

a متزايدة على الفترة $(0 , \infty)$

b متناقصة على الفترة $(-\infty , 0]$

c متزايدة على مجال تعريفها.

d متزايدة على الفترة $(-\infty , 0)$ ومتناقصة على الفترة $(\infty , 0)$

ربط المشتقّة الأولى f' والمشتقّة الثانية f'' بمنحنى الدالة f

Connecting f' and f'' with the Graph of f

المجموعة A تمارين مقالية

في التمارين (1–6)، أوجد النقاط الحرجة والقيم القصوى المحليّة وعيّن فترات التزايد وفترات التناقص لكل دالة مما يلي:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x$

(2) $g(x) = -2x^3 + 6x^2 - 3$

(3) $h(x) = -x^4 - 4x^3 - 4x^2 + 1$

(4) $g(x) = \frac{3}{2}x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 6x + \frac{9}{2}$

(5) $h(x) = 2 - |x - 1|$

(6) $f(x) = \frac{x}{x-2}$

في التمرينين (7–8)، استخدم مشتقّة الدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي تكون عندها f لها:

(a) قيمة عظمى محليّة **(b)** قيمة صغرى محليّة **(c)** نقطة انعطاف

(7) $y' = (x-1)^2(x-2)$

(8) $y' = (x-1)^2(x-2)(x-4)$

(9) **تفكير ناقد.** إذا كانت الدالّة f قابلة للاشتقاق، $f'(c) = 0$ حيث $x = c$ تنتمي لمجال f، هل f يجب أن يكون لها نقاط عظمى أو صغرى محليّة عند $x = c$؟ اشرح.

في التمرينين (10–11)، أوجد فترات التقعر ونقاط الانعطاف لكل من الدوال التالية:

(10) $f(x) = 3x^2 - 2x^3$

(11) $g(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + x - 5$

(12) بيّن أن منحنى الدالة f: $f(x) = 1 - x^4$ ليس له نقاط انعطاف.

(13) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b, c لمنحنى الدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ الذي يمر بنقطة الأصل وله نقطة حرجة $(4\ ,\ 16)$.

(14) أوجد قيمة كل من الثوابت a, b بحيث يكون للدالة f: $f(x) = x^3 + ax^2 + bx$ نقطة حرجة عند $x = 2$ ونقطة انعطاف عند $x = \frac{1}{2}$.

في التمرينين (15–16)، استخدم اختبار المشتقة الثانية لإيجاد القيم القصوى المحلية للدالة:

(15) $f(x) = x^2 - 6x + 11$

(16) $f(x) = x^4 - 18x^2$

المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمارين (1–6)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) الدالة $y = x^3 - 3x^2 + 5$ على الفترة $(0\ ,\ 3)$ مقعّرة لأسفل. (a) (b)

(2) الدالة $y = \dfrac{x}{x-1}$ على $(-\infty\ ,\ 0)$ مقعّرة لأعلى. (a) (b)

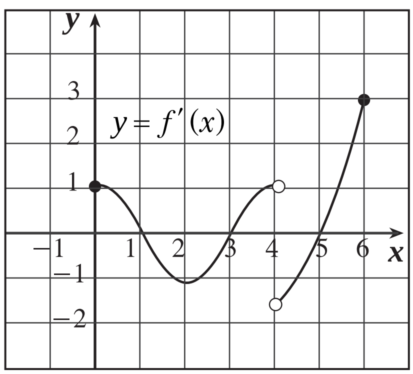
(3) إذا كانت $f''(c) = 0$ ، فإنّ لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,\ f(c))$. (a) (b)

(4) إذا كان لمنحنى الدالة f نقطة انعطاف هي $(c\ ,\ f(c))$ فإن $f''(c) = 0$. (a) (b)

(5) يمكن أن تكون النقطة الحرجة نقطة انعطاف. (a) (b)

(6) منحنى الدالة $y = -3x^8$ مقعّرة للأعلى. (a) (b)

في التمارين (7–12)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.



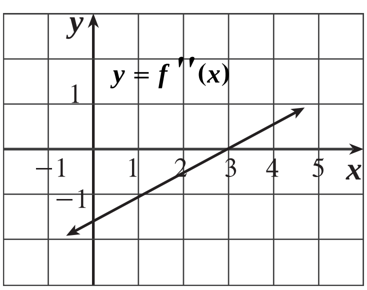
(7) إذا كان الشكل المقابل يمثل بيان دالة المشتقة (f') فإن الدالة f تكون:

(a) متزايدة على كل من $(4\ ,\ 5)$, $(1\ ,\ 3)$.

(b) متناقصة على كل من $(4\ ,\ 5)$, $(1\ ,\ 3)$.

(c) لها قيمة صغرى محلية عند $x = 3$ فقط.

(d) لها نقطة انعطاف عند كل من $x = 2$, $x = 4$.



(8) إذا كانت f دالة كثيرة حدود من الدرجة الثالثة والشكل المقابل يوضح بيان f'' فإن منحنى f مقعرًا للأسفل في الفترة:

(a) $(-\infty\ ,\ 3)$ (b) $(3\ ,\ \infty)$

(c) $(-1\ ,\ 4]$ (d) $(3\ ,\ 5)$

(9) أي من منحنيات الدوال التالية يكون مقعرًا لأسفل في $(-1\ ,\ 1)$:

(a) $f(x) = x^2$ (b) $f(x) = x|x|$ (c) $f(x) = -x^3$ (d) $f(x) = -x^2$

(10) إذا كانت f دالة كثيرة حدود، $(c\ ,\ f(c))$ نقطة انعطاف لها فإن:

(a) $f''(c) = 0$ (b) $f'(c) = 0$ (c) $f(c) = 0$ (d) $f''(c)$ غير موجودة

(11) أي من الدوال التالية ليس لها نقطة انعطاف:

(a) $f(x) = x^3 + 5x$ (b) $f(x) = 4x^2 - 2x^4$ (c) $f(x) = x^3$ (d) $f(x) = (x-2)^4$

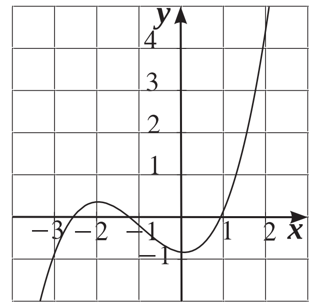
(12) للدالة f : $f(x) = (x^2 - 3)^2$ نقاط انعطاف عددها:

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4

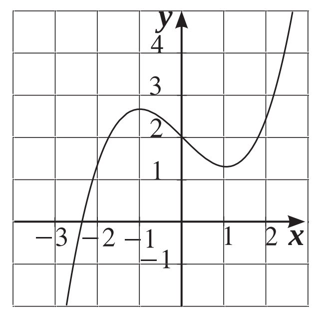
في التمارين (15–13)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.
المنحنيات في التمارين (15) ,(14) ,(13) تمثل الدوال والمنحنيات a, b, c, d, e تمثل دوال المشتقة.

القائمة (1) منحنى الدالة

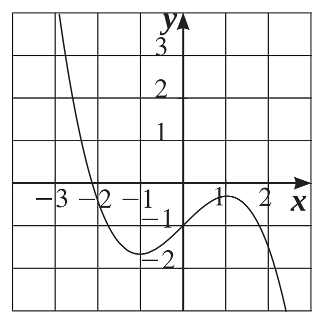
(13)



(14)

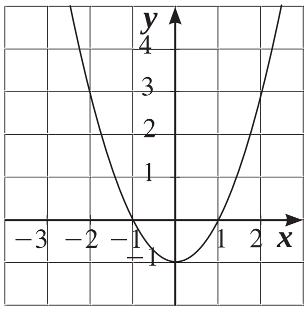


(15)

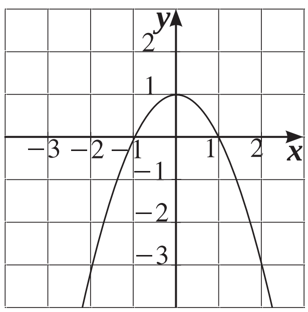


القائمة (2) منحنى دالة المشتقة

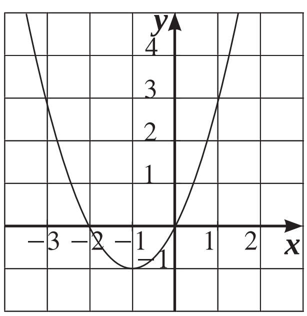
a



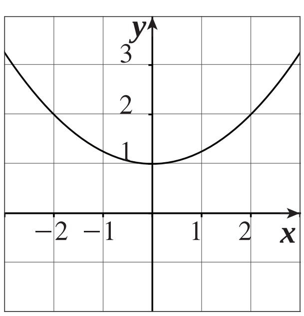
b



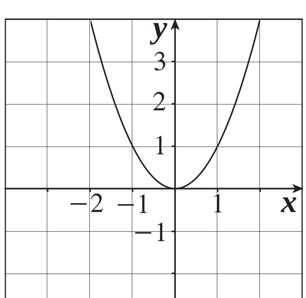
c



d



e



رسم بيان دوال كثيرات الحدود

Graph of Polynomial Functions

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، استخدم جدول دراسة إشارة f' لتحديد مجال f ورسم بيان تقريبي لمنحنى الدالة f.

(1) $-\infty \quad 2 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, 2)$	$(2, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$
سلوك f	↘	↗

علمًا بأن: $f(2) = -2$

(2) $-\infty \quad -3 \quad 0 \quad 5 \quad \infty$

الفترات	$(-\infty, -3)$	$(-3, 0)$	$(0, 5)$	$(5, \infty)$
إشارة f'	$- -$	$+ +$	$+ +$	$- -$
سلوك f	↘	↗	↗	↘

علمًا بأن: $f(-3) = 0$ و $f(0) = 2$ و $f(5) = 4$

في التمارين (6–3)، ادرس تغير كل من الدوال التالية وارسم بيانها.

(3) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 4x + 7$

(4) $g(x) = \frac{x^4}{4} - 2x^2 + 5$

(5) $h(x) = 8x^2 - x^4 - 8$

(6) $f(x) = -x^3 - 3x$

(7) لتكن الدالة f: $f(x) = \frac{2}{3}x^3 - 2x^2 + 1$ لكل عدد حقيقي x وليكن (C) منحنى هذه الدالة.

(a) ضع جدول التغير لـ f.

(b) لتكن A النقطة على (C) التي إحداثيها السيني 1.

أوجد معادلة مستقيم المماس l في A على منحنى الدالة.

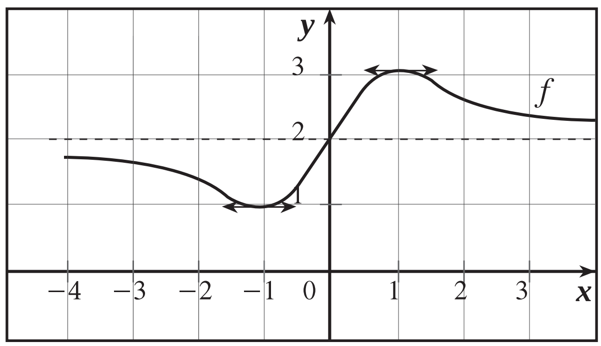
(c) ارسم l و (C).

(8) f دالة معرّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ حيث a, b, c, d أعداد حقيقية.

استخدم جدول التغير التالي لإيجاد قيم a, b, c, d حيث $f(-2) = 5$ ، $f(0) = 1$

x	$-\infty$		-2		0		∞
إشارة f'		$+$	0	$-$	0	$+$	
سلوك f	$-\infty$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$+\infty$

(9) كوّن جدولًا لدراسة إشارة f' من بيان الدالة f الممثلة بالرسم أدناه.

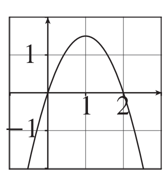


المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

لتكن f : $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{2}x^2 + 2$ و (C) منحناها.

(1) يمر المنحنى (C) بنقطة الأصل. (a) (b)



(2) الشكل المجاور يمثّل منحنى الدالة f'. (a) (b)

(3) المماس عند النقطة التي إحداثيها السيني يساوي 2 موازٍ لمحور السينات. (a) (b)

(4) 4 هي قيمة عظمى محلية. (a) (b)

(5) المنحنى (C) مقعر لأعلى على الفترة $(-\infty , 1)$. (a) (b)

في التمارين (11–6)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

في التمارين (8–6)، الدالة f دالة كثيرة حدود جدول تغيرها:

x	$-\infty$		-1		5		∞
$f(x)$	∞	$\searrow$	-5	$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\infty$

(6) العبارة الصحيحة فيما يلي هي:

(a) $f(-2) > f(0)$ (b) $f(0) < f(6)$

(c) $f(-9) > f(-2)$ (d) $f(-1) > f(8)$

(7) للمعادلة $f(x) = 0$:

(a) حل واحد (b) حلّان

(c) ثلاثة حلول (d) لا حل لها.

(8) جدول تغير الدالة f يوضّح أن:

(a) -5 قيمة صغرى مطلقة.

(b) 3 قيمة عظمى مطلقة.

(c) -5 قيمة صغرى محلية، 3 قيمة عظمى محلية.

(d) -1 قيمة صغرى محلية، 5 قيمة عظمى محلية.

(9) لتكن الدالة f : $f(x) = -x^2 + 7x + 1$

(a) لمنحنى f قيمة عظمى محلية.

(b) لمنحنى f نقطة انعطاف.

(c) منحنى f مقعر لأعلى.

(d) لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

(10) لتكن f : $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \ , \ a \neq 0$. لمنحنى f دائمًا:

(a) قيمة عظمى محلية وقيمة صغرى محلية.

(b) نقطة انعطاف.

(c) تقعُّر لأسفل ثم تقعُّر لأعلى.

(d) لا تمر بنقطة الأصل.

(11) الدالة f كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة:

a لمنحنى f دائمًا نقطتي انعطاف.

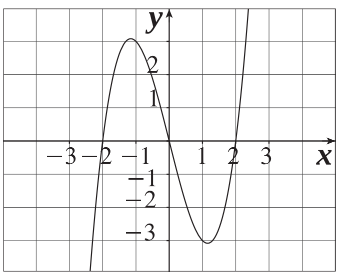
b لمنحنى f أكثر من قيمة عظمى محلية.

c منحنى f يقطع دائمًا محور السينات.

d قد لا يكون لمنحنى f قيمة صغرى محلية.

في التمارين (14–12)، لديك قائمتان. اختر من القائمة (2) ما يناسب كل تمرين في القائمة (1) لتحصل على إجابة صحيحة.

الشكل المقابل يمثّل بيان الدالة f.



القائمة (1)	القائمة (2)
(12) $f'(x) = 0$	**a** $(-\infty , 0)$
(13) $f'(x) > 0$ في	**b** $(-\infty , -1) , (1 , \infty)$
(14) $f''(x) < 0$ في	**c** $-2 , 0 , 2$
	d $-1 , 1$
	e $(0 , \infty)$

تمرَّنْ
3-5

تطبيقات على القيم القصوى

Applications on Extreme Value

المجموعة A تمارين مقالية

(1) مجموع عددين غير سالبين هو 20، أوجد العددين إذا كان:

(a) مجموع مربعيهما أصغر ما يمكن.

(b) أحد العددين مضافًا إليه الجذر التربيعيّ للآخر أكبر ما يمكن.

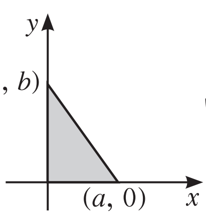
(2) ما أكبر مساحة ممكنة لمثلّث قائم الزاوية وطول وتره يساوي 6 cm؟ وما أبعاده؟

(3) أثبت أنّ من بين المستطيلات التي محيطها 8 m، واحدًا منها يعطي أكبر مساحة ويكون مربعًا.

(4) يراد التخطيط لغلق ركن في الربع الأوّل من المستوى الإحداثي بقطعة مستقيمة طولها 20 وحدة طول.

نبدأ العمل لغلق الركن من نقطة $(a, 0)$ إلى نقطة $(0, b)$.

أثبت أنّ مساحة المثلّث الذي تحدّه القطعة المستقيمة يكون أكبر ما يمكن عندما $a = b$.



(5) مزرعة على شكل قطعة مستطيلة من الأرض تقع على حافة نهر مستقيم. يراد وضع سياج على الجوانب الثلاثة الأخرى، ما أكبر مساحة يمكن إحاطتها بسياج طوله 800 m؟ وما أبعادها؟

(6) يراد تصميم خزّان حديديّ لأحد المصانع على شكل شبه مكعب، قاعدته مربّعة، ومفتوح من أعلى وحجمه $500\ m^3$، لصنع الخزّان يتم وصل ألواح الحديد الصلب مع بعضها من أطرافها.

أوجد أبعاد القاعدة والارتفاع التي تجعل وزن الخزّان أقلّ ما يمكن.

(7) ضلعان في مثلّث طولاهما a و b والزاوية بينهما θ.

ما قيمة θ التي تجعل مساحة المثلث أكبر ما يمكن؟

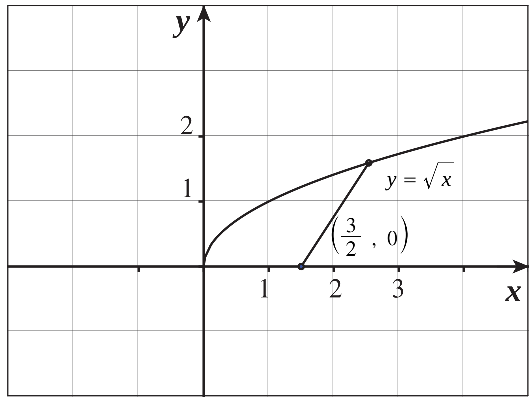
(**إرشاد:** مساحة مثلث $= \frac{1}{2}ab\sin\theta$).

(8) علبة من الصفيح على شكل أسطوانة قائمة مفتوحة من أعلى حجمها $1000\ cm^3$

أوجد أبعاد العلبة بحيث يكون وزنها أقل ما يمكن.

(9) أوجد أكبر حجم لمخروط دائري قائم داخل كرة طول نصف قطرها 3 m.

(10) ما أقصر بعد للنقطة $\left(\frac{3}{2}\ ,\ 0\right)$ عن منحنى الدالة $y=\sqrt{x}$؟



المجموعة B تمارين موضوعيّة

في التمرينين (2–1)، ظلّل (a) إذا كانت العبارة صحيحة و (b) إذا كانت العبارة خاطئة.

(1) أصغر محيط ممكن لمستطيل مساحته $16\,cm^2$ هو $16\,cm$ (a) (b)

(2) أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ الذي معادلته $y=12-x^2$، هي $24\ units^2$ (a) (b)

في التمارين (6–3)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) مستطيل مساحته $36\,cm^2$ فإن أبعاده التي تعطي أصغر محيط هي:

(a) $9\,cm\ ,\ 4\,cm$
(b) $12\,cm\ ,\ 3\,cm$
(c) $6\,cm\ ,\ 6\,cm$
(d) $18\,cm\ ,\ 2\,cm$

(4) أبعاد أكبر مساحة لمستطيل قاعدته على محور السينات ورأساه العلويّان على القطع المكافئ $y=4-x^2$ هي:

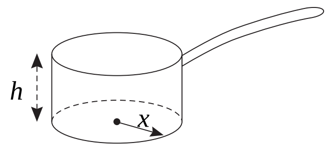
(a) $8\ ,\ \frac{4\sqrt{3}}{3}$
(b) $\frac{8}{3}\ ,\ \sqrt{3}$
(c) $4\ ,\ 4$
(d) $\frac{4\sqrt{3}}{3}\ ,\ \frac{8}{3}$

(5) أردت التخطيط لصنع صندوق على هيئة شبه مكعب بدون غطاء من قطعة ورق مقوى مستطيلة أبعادها $10\,cm, 16\,cm$، وذلك بقطع 4 مربّعات متطابقة عند الرؤوس، ثمّ طيّ الأجزاء البارزة.

أبعاد الصندوق الذي له أكبر حجم يمكن صنعه على أساسها هي:

(a) $2\,cm, 6\,cm, 12\,cm$
(b) $3\,cm, 4\,cm, 12\,cm$
(c) $2\,cm, 8\,cm, 12\,cm$
(d) $3\,cm, 6\,cm, 8\,cm$

(6) تعطى المساحة الكلية لوعاء أسطواني الشكل بالمعادلة $s = \pi x^2 + \frac{2v}{x}$، حيث x طول نصف قطر قاعدته وV حجمه. (**تذكر:** $V = \pi x^2 h$).



إذا كان حجم الوعاء ثابتًا فإن القيمة الدنيا لمساحته هي عندما:

ⓐ $x > h$ ⓑ $x = h$ ⓒ $x < h$ ⓓ ليس أيّ مما سبق

اختبار الوحدة الثالثة

في التمرينين (2—1)، أوجد القيم القصوى المطلقة للدوالّ على الفترات الموضّحة:

(1) $f(x) = x^3 - 9x^2 - 21x - 11 \quad , \quad [-2, 0]$

(2) $f(x) = \dfrac{5}{x^2 + 1} \quad , \quad [-2, 3]$

في التمارين (5—3)، أوجد:

(a) **فترات التزايد وفترات التناقص للدالة.**

(b) **القيم القصوى المحليّة.**

(3) $f(x) = x^3 - 12x + 6$ **(4)** $g(x) = \dfrac{x}{x^2 + 1}$ **(5)** $h(x) = \dfrac{x}{x^2 + 2x + 9}$

في التمارين (8—6)، أوجد:

(a) **فترات التقعر لأعلى وفترات التقعر لأسفل.**

(b) **نقاط الانعطاف إن وجدت.**

(6) $f(x) = 2x^3 - 6x^2 + 3$ **(7)** $g(x) = x^4 - 2x^3 + 5x - 6$ **(8)** $h(x) = \dfrac{3}{x - 1}$

في التمرينين (10—9)، استخدم مشتقة الدالة $y = f(x)$ لإيجاد:

(a) **قيم x التي عندها قيم قصوى محلية للدالة f .**

(b) **فترات التقعر لأعلى.**

(c) **فترات التقعر لأسفل.**

(9) $y' = 6(x+1)(x-2)$ **(10)** $y' = 6(x+1)(x-2)^2$

(11) استخدم المشتقة الثانية للدالّة $y = f(x)$ لإيجاد قيم x التي يكون عندها نقاط انعطاف للدالة f.

$$y'' = x(x-3)^2$$

في التمارين (14—12)، ادرس تغير كل من الدوال التالية ثم ارسم بيانها.

(12) $f(x) = (x+2)(x^2 - 2x + 4)$

(13) $g(x) = x^4 - 6x^2 + 9$

(14) $h(x) = (x^2 + 4x + 4)^2$

(15) لتكن الدالة f : $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5$

(a) بيّن أنّ شروط نظريّة القيم المتوسطة محققة على الفترة $[0, 3]$

(b) أوجد قيم c على (a, b) حيث $f'(c) = \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a}$

(16) لتكن الدالة f : $f(x) = x^2 + bx + c$

أوجد قيم c , b إذا كان منحنى f له قيمة صغرى محلية تساوي -1 عند $x = -2$

تمارين إثرائية

(1) **الحركة على مستقيم.** يتحدد موقع جسيم A على محور السينات بالمعادلة: $S_1 = \sin t$ ويتحدد موقع جسيم B على نفس المحور بالمعادلة: $S_2 = \sin\left(t + \frac{\pi}{3}\right)$ حيث S_2 و S_1 بالمتر وt بالثواني.

(a) في أي وقت بالثواني يتلاقى الجسيم A مع الجسيم B على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$؟

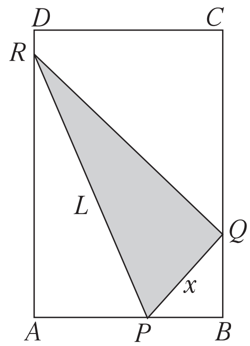
(b) ما أكبر مسافة يمكن أن تفصل بين الجسيم A والجسيم B؟

(c) في أي وقت على الفترة $[0\ ,\ 2\pi]$ تكون المسافة بين الجسيمين تتغير بأقصى سرعة لها؟

(2) **طي ورقة.** قطعة ورق مستطيلة الشكل أبعادها 22 cm ، 28 cm موضوعة على أرض مسطحة.

اطوِ إحدى زواياها المقابلة للضلع الأطول كما ترى في الصورة بحيث ينطبق الرأس A عند Q على $\overline{BC}$.

المطلوب إيجاد أقصر طول للضلع PR.



(a) أثبت أن: $L^2 = \dfrac{x^3}{x-11}$

(b) ما قيمة x التي تعطي أصغر قيمة لـ L^2؟

(c) ما أصغر قيمة لـ L؟

(3) **المبيع.** تبلغ تكلفة تصنيع سلعة وتوزيعها 10 دنانير.

إذا كان سعر مبيع هذه السلعة هو (دنانير) x وعدد السلع المباعة يعطى بالقاعدة:

$$n = \frac{a}{x-10} + b(100 - x)$$

ما هو سعر المبيع الذي يحقق أكبر ربح؟ (a, b ثوابت موجبة في المعادلة).

(4) لتكن f الدالة المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ : $f(x) = -x^4 + 2x^2 + x$.

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) أوجد النقاط على المنحنى (C) حيث يكون ميل المماس يساوي 1.

(c) أثبت أن لنقطتين من هذه النقاط مماس مشترك.

في التمارين (5–7)، أوجد الفترات التي تكون عندها الدالّة:

(a) **متزايدة** **(b)** **متناقصة** **(c)** **مقعّرة لأعلى** **(d)** **مقعّرة لأسفل**

ثمّ أوجد:

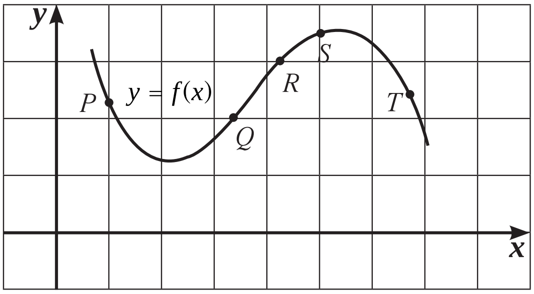
(e) **القيم القصوى المحليّة** **(f)** **نقاط الانعطاف**

(5) $y = 1 + x - x^2 - x^4$ **(6)** $y = \dfrac{1}{\sqrt[4]{1-x^2}}$ **(7)** $y = x^{\frac{4}{5}}(2-x)$

(8) عند أيّ من النقاط الخمس المحدّدة على المنحنى الممثّل للدالّة $y = f(x)$ والمبيّنة في الشكل:

(a) تكون كلّ من y' و y'' سالبة؟

(b) تكون y' سالبة و y'' موجبة؟



(9) لنأخذ الدالة f: $\quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad (a \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) يمر بالنقطة $A(0\ ,\ 3)$

(b) له قيمة عظمى محلية تساوي 3 عند $x = 0$

(c) $I(1\ ,\ 1)$ نقطة انعطاف

(10) الربط بين $f\ ,\ f'\ ,\ f''$: f دالة متّصلة على $[0, 3]$ وتحقّق الآتي:

x	0	1	2	3
f	0	2	0	-2
f'	3	0	غير موجودة	-3
f''	0	-1	غير موجودة	0

x	$0 < x < 1$	$1 < x < 2$	$2 < x < 3$
f	+	+	−
f'	+	−	−
f''	−	−	−

(a) أوجد القيم القصوى المطلقة لـ f وأين تتحقّق.

(b) أوجد أيّ نقاط انعطاف.

(c) ارسم بيانًا تقريبيًّا ممكنًا للدالّة f.

(11) لنأخذ الدالة f : $f(x) = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ $(a \neq 0 \ , \ c \neq 0)$

أوجد قيم a, b, c, d إذا كان منحنى f له الخصائص التالية:

(a) $y = 2$ مقارب أفقي.

(b) $x = \dfrac{1}{2}$ مقارب رأسي.

(c) يمر بالنقطة $A(-1 \ , \ 1)$

(12) لتكن الدالة f المعرَّفة على $\mathbb{R}$ بـ $f(x) = 2x^2 - 4x$ و(C) منحناها.

(a) ادرس تغير f وضع جدول التغير ثم ارسم (C).

(b) استنتج منحنى الدالة g : $g(x) = |2x^2 - 4x|$.

(c) استنتج منحنى الدالة h : $h(x) = 2x^2 - 4|x|$.

(13) **(a)** هل يمكن أن يكون المستقيم $y = 7x + 9$ مماسًا لمنحنى الدالة f : $f(x) = x^3 + 4x + 11$ ؟

(b) في حال الإيجاب حدّد نقاط التماس.

(14) لتكن f : $f(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - x^2$

(a) ادرس تغيّر f وارسم بيانها (C).

(b) حدّد النقاط على (C) حيث يكون المماس موازيًا للمستقيم $y = 3x + 5$

(15) ليكن (C) و(C') منحنيي الدالتين f وg المعرفتين على $\mathbb{R}$ كما يلي:

$f(x) = x^3 - 3x + 2$ و $g(x) = x^2 - 3x$

(a) ادرس تغير كل من الدالتين f وg ونهاياتهما.

(b) أوجد إحداثيات النقطة المشتركة بين منحنيي الدالتين.

(c) أوجد معادلات مستقيمات المماس في هذه النقطة على (C) و(C').

(d) ارسم (C) و(C').

تمرَّنْ
4–1

التقدير
Estimation

المجموعة A تمارين مقالية

(1) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لكل من درجات الثقة التالية، وذلك باستخدام جدول التوزيع الطبيعي المعياري:

(a) 97% **(b)** 99.2%

(2) قامت شركة عالميّة بدراسة لمعرفة مدى أداء سياراتها، فأخذت عينة من 1 000 سيارة. استنتجت أن المتوسط الحسابي لبقاء السيارة في حالة جيدة هو 5 سنوات. أوجد فترة الثقة للمعلمة μ عند درجة ثقة 95%، علمًا أن التباين σ^2 معلوم ويساوي 0.25 وآخذًا بالاعتبار أن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا.

(3) عينة عشوائية حجمها $n = 13$، أعطت $\overline{x} = 30$، $\sigma = 3.5$. أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ المجهولة علمًا أن المجتمع يتبع توزيعًا طبيعيًّا. هل تتضمن هذه الفترة المتوسط الحسابي μ؟

(4) إذا كان المتوسط الحسابي لعينة من 40 شخصًا هو $\overline{x} = 172.5$ والانحراف المعياري $\sigma = 119.5$.

فأوجد تقديرًا لفترة ثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي.

(5) في دراسة للمدّة الزمنيّة المطلوبة من طلاب جامعيين لإنهاء دراستهم، اختير عشوائيًّا 80 طالبًا، فكان متوسط السنوات لهذه العينة (سنوات) $\overline{x} = 4.8$، والانحراف المعياري لهذه العينة $S = 2.2$.

أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% لمعلمة المجتمع μ.

(6) عينة عشوائية حجمها $n = 16$ أُخذت من مجتمع إحصائي حيث التباين $S^2 = 15$، وعلم أن المتوسط الحسابي $\overline{x} = 13$.

أوجد فترة الثقة للمعلمة المجهولة μ عند درجة ثقة 95%.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمرينين (1–2)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) إن القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96% هي 2.055 (a) (b)

(2) إذا أخذنا عينة من 225 هاتفًا، ووجدنا أنّ متوسط صلاحية استخدامها $\overline{x}$ هو 1.7 سنة، والانحراف المعياري $S = 0.5$، ودرجة الثقة 95% فنجد أن فترة الثقة هي: $2.63 < \mu < 2.76$ (a) (b)

في التمارين (8–3)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(3) إنّ القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 96.6% هي:

(a) 2.12 (b) 2.17 (c) 21.2 (d) 21%

(4) المتوسط الحسابي لدرجات 9 طلاب هو $\overline{x} = 2.76$ حيث النهاية العظمى 4 درجات والانحراف المعياري $S = 0.87$. إنّ فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي عند درجة ثقة 95% هي:

(a) (2.1916 , 3.3284) (b) (1.6232 , 3.8968)

(c) (2.1916 , 3.8968) (d) (2.0913 , 3.4287)

(5) لنفترض أن متوسط مجتمع إحصائي يقع ضمن الفترة $69.46 > \mu > 62.84$ فمتوسط هذه العينة يساوي:

(a) 56.34 (b) 62.96 (c) 6.62 (d) 66.15

(6) إن حجم العينة المطلوبة لتقدير المتوسط الحسابي للمجتمع مع هامش خطأ وحدتين، ومستوى ثقة 95%، وانحراف معياري للمجتمع $\sigma = 8$ يساوي:

(a) 65 (b) 62 (c) 8 (d) 26

(7) أنجز 16 طالبًا في كلية الطب قياس ضغط الدم لدى الشخص نفسه فحصلوا على النتائج التالية:

134، 138، 130، 135، 120، 125، 120، 130، 135، 144، 143، 140، 130، 150، 140، 130

على افتراض أن الانحراف المعياري للمجتمع الإحصائي $\sigma = 10$ mm Hg فإن فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع الإحصائي هي:

(a) (129.1 , 131.55) (b) (129.1 , 138.9)

(c) (131.55 , 136.45) (d) (136.45 , 138.9)

(8) تتقارب قيمتي Z , t المتناظرة في جدول التوزيع الطبيعي المعياري إذا زادت درجات الحرية عن:

(a) 29 (b) 28 (c) 27 (d) 26

تمرَّنْ
4−2

اختبارات الفروض الإحصائية

Statistical Hypotheses Testing

المجموعة A تمارين مقالية

(1) يزعم أستاذ مادة الرياضيات أن المتوسط الحسابي لدرجات الطلّاب في مادتّه هو 16 حيث النهاية العظمى 20 درجة. إذا أعطت عيّنة من 25 طالبًا متوسطًا حسابيًّا (درجة) $\overline{x} = 15$، والانحراف المعياري (درجة) $\sigma = 1.4$، فاختبر فرضية الأستاذ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(2) يزعم مسؤول في متجر لبيع الأدوات الكهربائيّة، أنّ متوسّط الأسعار هو 300 دينار. أعطت عينة من 49 آلة (دينارًا) $\overline{x} = 280$ والانحراف المعياري معلوم (دينارًا) $\sigma = 40$. تأكّد من فرضيّة المسؤول عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(3) في عينة من مجتمع إحصائي إذا كانت قيمة $\overline{x} = 40$، والانحراف المعياري $S = 7$، اختبر الفرض إذا $\mu = 35$ مقابل الفرض البديل $\mu \neq 35$ عند مستوى المعنوية 0.05 في الحالات التالية:

(a) حجم العينة $n = 50$.

(b) حجم العينة $n = 20$.

(4) في دراسة لعدد ساعات استخدام الحاسوب، أُخذت عيّنة من 100 شخص يعملون في مختلف المجالات، فوجد أن المتوسط الحسابي لعدد ساعات استخدام الحاسوب هو $\overline{x} = 4.5$، والانحراف المعياري $S = 1$.

اختبر الفرض إذا كان متوسّط عدد الساعات للمجتمع هو $\mu = 5$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 5$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(5) أُخذت عيّنة عشوائية من مجتمع قيد الدراسة حجمها $n = 150$، فوجد أن المتوسّط الحسابي للعينة $\overline{x} = 30.3$ مع انحراف معياري $S = 6.5$. اختبر الفرض إذا كان المتوسّط الحسابي للمجتمع هو $\mu = 30$، مقابل الفرض البديل $\mu \neq 30$ عند مستوى المعنوية $\alpha = 5\%$.

(6) المتوسط الحسابي للراتب السنوي لموظف حكومي في دولة الكويت هو 9 600 دينار، أما المتوسط الحسابي لعينة من 64 موظفًا حكوميًّا في إحدى الدول الخليجية المجاورة (دينارًا) $\overline{x} = 9\,480$ مع انحراف معياري (دينارًا) $S = 640$. اختبر إذا كان بالإمكان اعتبار الراتب السنوي في إحدى الدول الخليجية المجاورة للموظف الحكومي هو الراتب ذاته الذي يحصل عليه الموظف الحكومي في الكويت، مستخدمًا درجة الثقة 95%.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (4—1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) في مجتمع إحصائي إذا كان المتوسط الحسابي $\mu = 860$ وعينة من هذا المجتمع حجمها $n = 25$ والمتوسط الحسابي $\overline{x} = 900$ والانحراف المعياري $S = 125$.
فإن المقياس الإحصائي هو: $t = 1.6$ (a) (b)

(2) متوسط العمر لعينة من 100 مصباح كهربائيّ بالساعات في أحد المصانع هو $\overline{x} = 1600$ بانحراف معياري $S = 125$. يقول صاحب المصنع أن متوسط عمر المصابيح بالساعات هو $\mu = 1640$. إن المقياس الإحصائي هو $Z = 3.2$ (a) (b)

(3) متوسط عمر الإطارات في أحد المصانع $\mu = 25\,000$، في دراسة لعينة عشوائية تبيّن أن المتوسط الحسابي هو $\overline{x} = 27\,000$ مع انحراف معياري $S = 5\,000$.
إذا كان المقياس الإحصائي $t = 2$ فإنّ حجم العينة: $n = 25$ (a) (b)

(4) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 81$ مع متوسط حسابي $\overline{x} = 3.6$ وانحراف معياري $S = 1.8$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -1.5$ فإن المتوسط الحسابي للمجتمع الإحصائي $\mu = 3.3$ (a) (b)

في التمارين (10—5)، ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(5) إذا كان القرار رفض فرض العدم، وفترة الثقة $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن قيمة الاختبار Z ممكن أن تكون:

(a) 1.5
(b) −2.5
(c) 1.87
(d) −1.5

(6) إذا كانت قيمة الاختبار الإحصائي $Z = -1.5$ وفترة القبول $(-1.96\ ,\ 1.96)$ فإن القرار يكون:

(a) رفض فرض العدم
(b) قبول فرض العدم
(c) قبول الفرض البديل
(d) Z لا تنتمي للفترة

(7) في دراسة حول متوسط الإنفاق الشهري على الطعام في منازل مدينة معينة هو (دينارًا) $\mu = 320$ وقد تبيّن أن المتوسط الحسابي لعينة حجمها $n = 25$ منزلًا من هذه المدينة هو (دينارًا) $\overline{x} = 310$ مع انحراف معياري $S = 40$. إن المقياس الإحصائي هو:

(a) 1.25
(b) −1.25
(c) 0.8
(d) −0.8

(8) في دراسة على عينة أسلاك معدنية حجمها $n = 64$ تبيّن أن المتوسط الحسابي لقوة تحمل السلك $\overline{x} = 360\ \text{kg}$ مع انحراف معياري $S = 50\,\text{kg}$ إذا كان المقياس الإحصائي لقوة تحمل كافة الأسلاك المعدنية المصنعة $Z = -2.4$ فإنّ المتوسط الحسابي μ هو:

(a) 346 (b) 396 (c) 376 (d) 326

(9) هدف إحدى الشركات الكبرى هو ربح صاف متوسطه الحسابي (دينار) $\mu = 200\,000$ في كل فرع من فروعها المنتشرة في عدد من الدول. في دراسة لعينة من عدد لهذه الفروع أعطت متوسطًا حسابيًا (دينارًا) $\overline{x} = 195\,000$ مع انحراف معياري (دينارًا) $S = 80\,000$ إذا كان المقياس الإحصائي $Z = -0.625$ فإنّ حجم العينة n هو:

(a) 100 (b) 125 (c) 90 (d) 110

(10) في دراسة لمجتمع إحصائي تبيّن أنّ متوسطه الحسابي $\mu = 125$ أخذت عينة من هذا المجتمع حجمها $n = 36$ فتبيّن أن متوسطها الحسابي $\overline{x} = 130$. إذا كان المقياس الإحصائي $Z = 3.125$ فإنّ الانحراف المعياري σ هو:

(a) -9.6 (b) 6.9 (c) 9.6 (d) -6.9

تمرَّنْ
4–3

الارتباط والانحدار
Correlation and Regression

المجموعة A تمارين مقالية

في التمرينين (2–1)، أجب عن السؤالين التاليين:

(a) استخدم مخطط الانتشار لتوضح ما إذا كان هناك ارتباط خطي واضح بين x و y.

(b) أوجد قيم n، $\sum x$، $\sum x^2$، $(\sum x)^2$، $\sum xy$ ومُعامل الارتباط الخطي r.

(1)

x	2	3	5	5	10
y	6	9	14	16	30

(2)

x	2	3	5	5	10
y	6	0	15	5	2

في التمرينين (4–3)، أجب عن الأسئلة التالية:

(a) اصنع مخطط الانتشار.

(b) أوجد قيمة مُعامل الارتباط الخطي r.

(c) وضّح ما إذا كان هناك ارتباط خطي وثيق بين المتغيرين (استخدم فقط $\alpha = 0.05$).

(3) يوضّح الجدول أدناه وزن البلاستيك المستهلك x بالكيلوجرام (kg) من قبل عدد أفراد أسرة y.

وزن البلاستيك x (kg)	0.12	0.64	1	1.3	1	0.8	0.4	1.4
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(4) توضح البيانات المزدوجة في الجدول أدناه وزن الأوراق x بالكيلوجرام (kg) التي تمّ التخلص منها وعدد أفراد الأسرة y.

وزن الأوراق x (kg)	1.1	3.4	4.3	4	3.9	3	3.1	5.2
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

في التمرينين (6–5)، باستخدام البيانات التالية لقيم x و y أوجد:

(5)

x	1	2	4	5
y	3	5	9	11

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 7$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 2$.

(6)

x	5	3	2	1	0	2
y	-2	0	1	2	3	1

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) قيم y عندما $x = 8$.

(c) مقدار الخطأ عندما $x = 5$.

(7) باستخدام البيانات التالية لقيم $\boldsymbol{x}$ و$\boldsymbol{y}$ أوجد:

وزن البلاستيك x (kg)	0.12	0.64	1	1.3	1	0.8	0.4	1.4
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) تنبؤ عدد أفراد الأسرة التي تتخلّص من 0.2 kg من البلاستيك.

(8) باستخدام البيانات التالية لقيم $\boldsymbol{x}$ و$\boldsymbol{y}$ أوجد:

وزن الأوراق x (kg)	1.1	3.4	4.3	4	3.9	3	3.1	5.2
عدد أفراد الأسرة y	2	3	3	6	4	2	1	5

(a) معادلة خط الانحدار.

(b) تنبؤ عدد أفراد الأسرة التي تتخلّص من 4.5 kg من الأوراق.

المجموعة B تمارين موضوعية

في التمارين (5–1)، ظلّل الدائرة (a) إذا كانت الإجابة صحيحة و (b) إذا كانت الإجابة خاطئة.

(1) الارتباط هو علاقة بين متغيرين. (a) (b)

(2) إذا كان r مُعامل الارتباط بين متغيرين فإن $-1 < r < 1$ (a) (b)

(3) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = -1$ كان الارتباط تامًّا. (a) (b)

(4) الانحدار هو وصف العلاقة بين متغيرين. (a) (b)

(5) إذا كان مُعامل الارتباط $r = 0$ فإن الارتباط منعدم. (a) (b)

في التمارين (15–6)، لكل تمرين 4 خيارات واحد فقط منها صحيح. ظلّل رمز الدائرة الدّال على الإجابة الصحيحة.

(6) قيمة مُعامل الارتباط (r) التي تجعل الارتباط طردي (موجب) تام بين المتغيرين x, y هي:

(a) -1 (b) -0.5 (c) 0.5 (d) 1

(7) إذا كانت قيمة مُعامل الارتباط (r) بين متغيرين حيث $r \in (-1, -0.5]$ فإن العلاقة يمكن أن تكون:

(a) عكسية تامة (b) عكسية قوية

(c) طردية تامة (d) طردية قوية

(8) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين x, y هي $\hat{y} = 5.5 + 3.4x$ فإن قيمة y المتوقعة عندما $x = 6$ هي:

(a) 0.5 (b) 6.8 (c) 29.98 (d) 25.9

(9) إذا كان مُعامل الارتباط بين متغيرين $r = 0.85$ فإن الارتباط يكون:

(a) طردي قوي (b) طردي ضعيف

(c) طردي متوسط (d) طردي تام

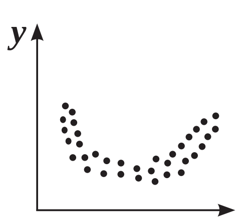
(10) إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين x, y. هي $\hat{y} = 1 + 1.4x$ فإن مقدار الخطأ عند $x = 5$ علمًا بأن القيمة الجدولية هي $y = 9$ يساوي:

(a) -1 (b) 1 (c) 17 (d) 8

(11) الشكل أدناه يمثل علاقة بين متغيرين x, y نوع هذه العلاقة هو:

(a) علاقة خطية طردية (b) علاقة خطية عكسية

(c) علاقة غير خطية (d) ليس أيّ مما سبق



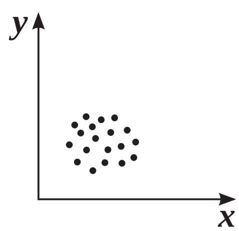
(12) من الجدول التالي:

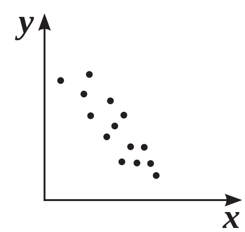
x	1	2	3	4	5	6	7	8
y	23	18	17	14	10	6	5	1

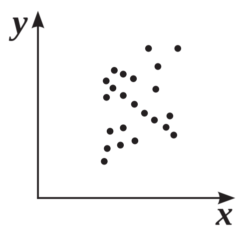
فإذا كانت معادلة خط الانحدار هي $\hat{y} = -3.05x + 25.5$، فإن مقدار الخطأ عندما $x = 5$ يساوي:

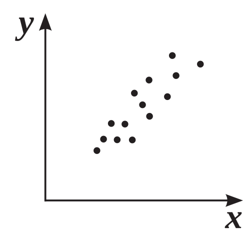
(a) 0.25 (b) -0.25 (c) 20.25 (d) 10.25

(13) الشكل الذي يمثل ارتباط عكسي قوي بين متغيرين x, y هو:

(a)


(b)


(c)


(d)


(14) قيمة مُعامل الارتباط لا يمكن أن تساوي:

(a) 0 (b) 1 (c) -0.5 (d) 1.5

(15) إذا كان مُعامل الارتباط بين المتغيرين x, y يساوي صفر فإن الارتباط يكون:

(a) قوي (b) ضعيف (c) منعدم (d) تام

اختبار الوحدة الرابعة

(1) أخذت عينة من 324 موظفًا حكوميًا فتبيّن أن المتوسط الحسابي للكلفة الشهرية لانتقال الموظف من منزله إلى العمل بسيارته الخاصة ومن ثم العودة بسيارته أيضًا هو (دينارًا) $\overline{x} = 68.5$ والانحراف المعياري (دينارًا) $S = 11$.

(a) أوجد القيمة الحرجة $Z_{\frac{\alpha}{2}}$ لدرجة الثقة 93%.

(b) أوجد بنسبة 95% فترة الثقة للمتوسط الحسابي μ للكلفة الشهرية لانتقال الموظف من منزله إلى العمل بسيارته ومن ثم العودة في المجتمع الإحصائي الذي أخذت منه هذه العينة.

(c) لقد افترض أحد الخبراء الاقتصاديين أن متوسط الكلفة الشهرية لانتقال الموظف الحكومي من منزله إلى العمل بسيارته الخاصة ومن ثم العودة هو (دينارًا) $\mu = 69.6$. استخدم فترة الثقة التي توصلت إليها في الجزء **(b)** لاختبار رفض أو عدم رفض الفرضية عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(d) إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع تحت الدراسة هو (دنانير) $\sigma = 9.5$، أوجد حجم العينة اللازم لإيجاد فترة ثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي لكلفة النقل الشهري μ للموظف الحكومي بهامش خطأ لا يتجاوز الدينار الواحد.

(2) في مجتمع الزائرين لمجمع تجاري كبير، يعتبر الانحراف المعياري (دنانير) $\sigma = 8.16$ ما ينفقه كل زائر على مشترياته في الزيارة الواحدة.

(a) أوجد عدد القيم لأخذ عينة من مجتمع الزائرين للمجمع التجاري لإيجاد فترة ثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي لما ينفقه كل زائر على مشترياته في الزيارة الواحدة بهامش خطأ لا يتجاوز 2 دينار.

(b) إذا أعطت العينة الحجم ذاته الذي أعطاه الجزء **(a)** من السؤال والمتوسط الحسابي (دينارًا) $\overline{x} = 25.5$ لما ينفقه كل زائر في الزيارة الواحدة، استنتج فترة الثقة بنسبة 95% للمتوسط الحسابي μ للمجتمع تحت الدراسة.

(3) في الجدول أدناه، المتغير المستقل x يمثّل سنوات الخبرة لموظف في شركة تجارية كبرى في وظيفة معينة، أما المتغير التابع y فيمثّل الأجر الشهري للموظف بمئات الدنانير، وn عدد الموظفين في العينة الذين يقومون بالوظيفة نفسها:

سنوات الخبرة x	2	4	5	7	9	10	4	5
الأجر الشهري y (بمئات الدنانير)	7.5	8.2	8	8.7	10.7	10.5	8.4	8.6

(a) ارسم مخطط الانتشار.

(b) أوجد قيم: $n\ ,\ \sum x\ ,\ \sum x^2\ ,\ \left(\sum x\right)^2\ ,\ \sum xy$.

(c) أوجد قيمة مُعامل الارتباط الخطي. هل هناك ارتباط خطي بين x وy؟ استخدم $\alpha = 0.05$.

(d) أوجد معادلة خط الانحدار.

(e) ما هو أفضل تنبؤ للراتب الشهري بالدينار لموظف في الوظيفة نفسها لديه 8 سنوات خبرة.

(4) يبيّن الجدول أدناه إجمالي وزن النفايات بالكيلوجرام (kg) الذي تتخلّص منه أسرة بحسب عدد أفرادها يوميًا.

وزن النفايات x (kg)	6	2.8	8.2	5	4.1	5.3	8.8	7.1
عدد أفراد الأسرة y	3	4	5	4	6	5	4	2

(a) أوجد معادلة خط الانحدار.

(b) ما هو أفضل تنبؤ لعدد أفراد أسرة تتخلص من 11 kg من النفايات يوميًا؟

(5) في عينة عشوائية حجمها 9 والمتوسط الحسابي $\overline{x} = 20$ min والانحراف المعياري $S = 1.2$ min.

أوجد فترة الثقة عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

تمارين إثرائية

(1) إذا كانت الدرجة القصوى في امتحان الرياضيات هي 20. أوجد فترة ثقة بنسبة 90% للمتوسط الحسابي μ لعلامة الطالب في امتحان بناءً على نتائج عينة من 36 طالبًا خضعوا للامتحان حيث المتوسط الحسابي للعينة هو $\overline{x} = 11.6$ مع انحراف معياري $S = 2.5$.

(2) أوجد عدد القيم اللازمة لحجم عينة لإيجاد فترة ثقة بدرجة ثقة 99% للمتوسط الحسابي μ لما تنفقه وزارة الصحة سنويًّا لدعم مريض مصاب بأحد الأمراض المزمنة. إذا كان الانحراف المعياري للمجتمع تحت الدراسة هو (دينار) $\sigma = 800$ بهامش خطأ لا يتجاوز 150 دينارًا.

(3) افترض أحد خبراء الاتصالات أن المتوسط الحسابي لعدد زوار إحدى الصفحات على الإنترنت هو $\mu = 4.325$ ألف زائر يوميًّا، أما عند أخذ عينة من 64 يومًا تبيّن أن المتوسط الحسابي للعينة $\overline{x} = 4.101$ ألف زائر يوميًّا مع انحراف معياري $S = 0.842$ ألف زائر.

اختبر إمكانية رفض أم عدم رفض فرضية الخبير عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(4) قرر أصحاب أحد متاجر الأجهزة الكهربائية إقامة تجربة لمدة خمسة أشهر لمعرفة مدى تأثير الإنفاق الإعلاني على حجم المبيعات فكانت النتائج كما في الجدول التالي:

الأشهر	1	2	3	4	5
الإنفاق الإعلاني x بآلاف الدنانير	1	2	3	4	5
حجم المبيعات y بعشرات آلاف الدنانير	1	1	2	2	4

(a) أوجد معادلة خط الانحدار التي تربط حجم المبيعات بالإنفاق الإعلاني في أحد الأشهر.

(b) أنفق المتجر 500 4 دينار على الإعلانات، فما حجم مبيعاته في هذا الشهر؟

(5) أعطت عيّنة عشوائية متوسطًا حسابيًّا $\overline{x} = 17$، أوجد التقدير بنقطة للمعلمة المجهولة μ.

(6) أخذت عينة عشوائية من مجتمع إحصائي حجمها $n = 130$، فأعطت متوسط حسابي $\overline{x} = 28$، إذا كان تباينها معلوم وهو $\sigma^2 = 9$، فأوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمعلمة المجهولة μ.

(7) ينتظر زبائن شركة التأمين على السيّارات مدة طويلة قبل التمكن من التواصل مع مندوب خدمة الزبائن حين يتصلّون ليتقدّموا بشكاوى مختلفة. تعطي عيّنة عشوائيّة من 25 اتصالًا مماثلًا متوسطًا حسابيًّا $\overline{x} = 22$ min وانحرافًا معياريًّا من 6 دقائق.

أوجد فترة الثقة عند درجة ثقة 95% للمتوسط الحسابيّ الإحصائي μ لأوقات الانتظار. افترض أن هذه الأوقات تتبع توزيعًا طبيعيًّا.

(8) تمّ بيع عينة من 1500 منزل مؤخّرًا حيث إن المتوسط الحسابي لسعر المنزل الواحد 000 300 دينار. الانحراف المعياري معلوم وهو 000 70 دينار.

اختبر الفرض القائل إنّ متوسّط الأسعار 000 290 دينار مع مستوى معنوية $\alpha = 0.05$.

(9) تزعم مديرية التعليم العالي أن متوسّط سنوات الخبرة للمعلّمين في كل الجامعات هو 10 سنوات.

تأكّد من هذا الفرض عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$، علمًا أنّ عيّنة من 40 معلّمًا أعطت متوسطًا حسابيًا $\overline{x} = 9$ سنوات مع انحراف معياري $S = 4$.

(10) (a) إذا كانت قيمة $\overline{x} = 143$، $\sigma = 10$، $n = 40$، فاختبر الفرض $H_0 : \mu = 150$ مقابل الفرض البديل $H_1 : \mu \neq 150$ عند مستوى معنوية $\alpha = 5\%$.

(b) اختبر الفرض نفسه مع عيّنة حجمها $n = 7$ و $S = 8$، عند مستوى المعنوية $\alpha = 0.05$.

(11) إذا كانت الدرجة العظمى في اختبار الرياضيات هي 20 درجة، فأوجد فترة ثقة عند درجة ثقة 90% للمتوسط الحسابي μ لدرجة طالب في اختبار، بناءً على نتائج عيّنة من 36 طالبًا خضعوا للاختبار حيث المتوسط الحسابي للعيّنة هو $\overline{x} = 11.6$ وانحراف معياري $S = 2.5$.

في التمارين (15–12)، أوجد مُعامل الارتباط r وحدّد نوعه وقوته، إن وجد، للمتغيرين x , y حيث:

(12)

x	8	6	5	10	7	4
y	14	10	6	2	5	8

(13)

x	3	10	9	8	5	4
y	5	8	10	6	4	3

(14)

x	3	10	8	6	5	2	4	7
y	7	12	6	11	9	6	8	10

(15)

x	9	8	6	5	10	7	4
y	11	10	5	9	8	6	7

شركة مطابع الرسالة - الكويت

أودع في مكتبة الوزارة تحت رقم (٣١٨) بتاريخ ٣١/ ١٢/ ٢٠١٥م