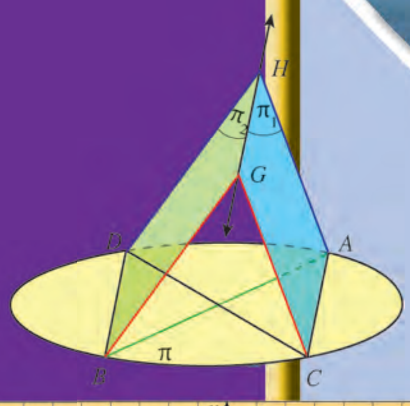
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب الطالب



الصفّ الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الثاني

١١

الطبعة الثانية

وزارة التربية

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الثاني

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. حسين علي عبدالله (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ

٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

الطبعة الأولى ٢٠١٣م
الطبعة الثانية ٢٠١٥م
٢٠١٧م
٢٠١٩م

لجنة فرعية لدراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. حسين اليماني الشامي   أ. مصطفى محمد شعبان محمود
أ. صديقة أحمد صالح الانصاري   أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح

أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها. وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوحدة السابعة

الأعداد المركبة

Complex Numbers

مشروع الوحدة: استخدام الرادار في مراقبة حركة الطائرات

1. **مقدمة المشروع:** يرسل الرادار موجات عالية التردد ويتلقى انعكاسها، ما يسمح بتحديد موقع الطائرة وبعدها عن المطار. وكل هذا يتم باستخدام الإحداثيات القطبية.
2. **الهدف:** إيجاد البعد بين طائرتين باستخدام الإحداثيات القطبية عند رصدهما بواسطة الرادار.
3. **اللوازم:** أوراق رسم بياني – آلة حاسبة علمية – حاسوب – جهاز إسقاط (Data Show).
4. **أسئلة حول التطبيق:**

رصد رادار أحد المطارات طائرتين على الارتفاع نفسه، وكانت إحداثياتهما القطبية $(8\,km , 60^o)$, $(14\,km , 150^o)$.

- a) ضع رسمًا بيانيًّا ينمذج موقع الطائرتين معتبرًا أن المطار هو نقطة الأصل.
- b) أوجد العددين المركبين z_1 , z_2 بالصورة المثلثية اللذين يمثلان موقعي الطائرتين.
- c) احسب القيمة المطلقة للعدد المركب $|z_1 - z_2|$، ثم استنتج البعد بين الطائرتين.

5. **التقرير:** اكتب تقريرًا يبيّن بوضوح خطوات الحل وكيف استفدت من دروس هذه الوحدة للإجابة عن الأسئلة. دعّم تقريرك بملصق أو بعرض على جهاز الإسقاط.

دروس الوحدة

الأعداد المركبة	الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب	حل معادلات
7–1	7–2	7–3

الوحدة السابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة معادلات خطية وحلها.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم دوال تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت استخدام بيان الدوال التربيعية لحل مسائل معادلات تربيعية.

ماذا سوف تتعلم؟

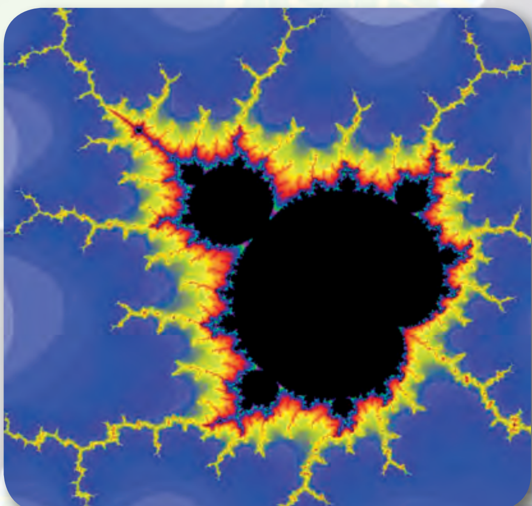
- الوحدة التخيلية i.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مجموعة الأعداد المركبة.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- جمع الأعداد المركبة وطرحها وضربها وقسمتها.
- إيجاد الجذر التربيعي لعدد مركب.
- حل معادلات من الدرجة الأولى ومن الدرجة الثانية تتضمن أعدادًا مركبة.

المصطلحات الأساسية

الوحدة التخيلية – الأعداد المركبة – الصورة الجبرية – العدد التخيلي – مرافق العدد المركب – الإحداثيات القطبية – مقياس العدد المركب – سعة العدد المركب – الصورة المثلثية.

أضف إلى معلوماتك

طوّر عالم الرياضيات بنوا مندلبرو Benoit Mandelbrot (1924 – 2010) مفهوم الكسريات Fractals، مما سمح بنمذجة أشكال طبيعية مثل القرنبيط والرئة والمنحدر الصخري، واستخدم متتاليات تتضمن أعدادًا مركبة لرسم بيانات مجموعات بواسطة الحاسوب.



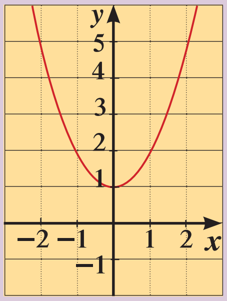
7-1

الأعداد المركبة

Complex Numbers

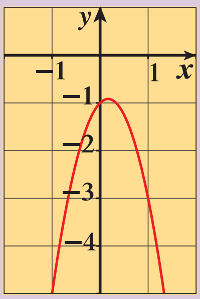
دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات التربيعية التي مميزها عددًا سالبًا ليس لها حل في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ مثل $x^2+1=0$ أو $-3x^2+x-1=0$



$f(x)=x^2+1$

يبيّن الشكل المقابل أن الدالة $f(x)=x^2+1$ ليس لها أصفارًا حقيقية وبالتالي، فالمعادلة التربيعية $x^2+1=0$ ليس لها حل في $\mathbb{R}$.



$f(x)=-3x^2+x-1$

لحل هذه المعادلات اقترح الرياضيون في القرن السابع عشر توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية وذلك بتطوير مفهوم الجذر التربيعي ليتضمن الأعداد الحقيقية السالبة وصولًا إلى مجموعة الأعداد المركبة.

عند حل المعادلة $x^2+1=0$ أو $x^2=-1$ علينا إيجاد عدد مربعه يساوي (-1).

استخدم $\sqrt{-1}$ للدلالة عن هذا العدد غير الحقيقي، ثم استخدم الرمز (i) بدلًا من $\sqrt{-1}$.

الأعداد المركبة Complex Numbers

الوحدة التخيلية Imaginary Unit

هي العدد الذي مربعه (-1) ويرمز إليه بالرمز i

$$i=\sqrt{-1} \quad , \quad i^2=-1$$

الأعداد التخيلية:

- لأي عدد حقيقي موجب m ،

$$\sqrt{-m}=\sqrt{m}\,i$$

- تسمى الأعداد التي على الصورة bi حيث $b\in\mathbb{R}^*$ أعدادًا تخيلية.

مجموعة الجذور التربيعية الموجبة والسالبة للأعداد الحقيقية السالبة تكوّن مجموعة الأعداد التخيلية.

سوف تتعلم

- الوحدة التخيلية.
- الصورة الجبرية للعدد المركب.
- مرافق العدد المركب.
- العمليات على الأعداد المركبة.

المفردات والمصطلحات:

- الوحدة التخيلية The Imaginary Unit
- العدد المركب The Complex Number
- جزء حقيقي Real Part
- جزء تخيلي Imaginary Part
- الصورة الجبرية The Algebraic Form
- مرافق العدد Conjugate Number
- العمليات على الأعداد المركبة The Operations on the Complex Numbers
- قوى العدد المركب Powers of a Complex Number

معلومة رياضية:

يستخدم أيضًا الحرف الأبجدي ت للتعبير عن الوحدة التخيلية i.

مثال (1)

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i :

a $\sqrt{-4}$ **b** $\sqrt{-8}$

الحل:

a $\sqrt{-4} = 2i$ — استخدام $\sqrt{-m} = \sqrt{m}\,i$

b $\sqrt{-8} = \sqrt{8}\,i$ — بسّط $\sqrt{8}$

$= 2\sqrt{2}\,i$

حاول أن تحل

1 بسّط كل عدد مما يلي مستخدمًا الوحدة التخيلية i:

a $\sqrt{-2}$ **b** $-\sqrt{-12}$ **c** $\sqrt{-36}$

تعريف: العدد المركب Complex Number

العدد المركب هو عدد على الصورة $a + bi$ حيث a , b عددان حقيقيان، i الوحدة التخيلية.

يمكن كتابة أي عدد مركب على الصورة $z = a + bi$

الصورة $a + bi$ تسمى **الصورة الجبرية** للعدد المركب.

ويسمى **a الجزء الحقيقي Real Part**

ويسمى **b الجزء التخيلي Imaginary Part**

ويرمز لمجموعة الأعداد المركبة بالرمز $\mathbb{C}$.

$z = a + bi$

الجزء الحقيقي (a) — الجزء التخيلي (b)

في العدد المركب $z = a + bi$:

إذا كان $b = 0$، فإن $z = a$ يسمى **عددًا حقيقيًا**.

إذا كان $b \neq 0$, $a = 0$، فإن $z = bi$ يسمى **عددًا تخيليًا**.

ملاحظة:
يجب التمييز بين الجزء التخيلي b والعدد التخيلي bi

نشاط (1)

أكمل الجدول التالي:

الجزء التخيلي	الجزء الحقيقي	العدد المركب
3	2	$2 + 3i$
-5	4	
		$i - 1$
		7
-1	0	

مثال (2)

اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

ⓐ $\sqrt{-9}+6$ ⓑ $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4}$ ⓒ $1-\sqrt{-20}$

الحل:

$\sqrt{-9}=\sqrt{9}\,i=3i$

الصورة الجبرية $a+bi$

ⓐ $\sqrt{-9}+6=3i+6$

$=6+3i$

$\sqrt{-25}=\sqrt{25}\,i=5i$

الصورة الجبرية

ⓑ $\dfrac{1+\sqrt{-25}}{4}=\dfrac{1+5i}{4}$

$=\dfrac{1}{4}+\dfrac{5}{4}i$

$\sqrt{-20}=\sqrt{20}\,i$

$\sqrt{20}=2\sqrt{5}$

ⓒ $1-\sqrt{-20}=1-\sqrt{20}\,i$

$=1-2\sqrt{5}\,i$

حاول أن تحل

2 اكتب كلًّا من الأعداد المركبة التالية على الصورة الجبرية:

ⓐ $\sqrt{-18}+7$ ⓑ $\dfrac{10-\sqrt{-100}}{5}$ ⓒ $\dfrac{\sqrt{-9}+5}{7}$

- كل عدد حقيقي هو أيضًا عدد مركب: $a=a+0i$.
- مجموعة الأعداد الحقيقية ومجموعة الأعداد التخيلية هما مجموعتان جزئيتان من مجموعة الأعداد المركبة.

يبيّن المخطط أدناه مجموعات الأعداد التي هي مجموعات جزئية من مجموعة الأعداد المركبة إضافة إلى أمثلة على كل مجموعة.

Complex Numbers الأعداد المركبة

$3+2i\ ,\ 1-5i\ ,\ \sqrt{2}\,i+4\ ,\ 2.7+5.1i$

- **Real Numbers الأعداد الحقيقية**
  - **Rational Numbers الأعداد النسبية**

    $\dfrac{4}{7}\ ,\ 0.\overline{3}\ ,\ \dfrac{8}{5}$
    - **Integers الأعداد الصحيحة**

      $-1\ ,\ -2\ ,\ -3$
      - **Whole Numbers الأعداد الكلية**

        $0\ ,\ 1\ ,\ 3\ ,\ 7$
  - **الأعداد غير النسبية Irrational Numbers**

    $-\sqrt{2}\ ,\ \pi\ ,\ e\ ,\ \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$
- **الأعداد التخيلية Imaginary Numbers**

  $2i$

  $-\sqrt{3}\,i$

  $7.3i$

  $-\dfrac{3}{5}i$

تساوي عددين مركبين Equal Complex Numbers

يتساوى عددان مركبان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.

ليكن: $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$$

مثال (3)

أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$ b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$ c $2x + yi = 1$

الحل:

a $12 + 3i = 4x - 9yi$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$

$\therefore \ 12 = 4x \Rightarrow x = 3 \ ,$

بسّط

$3 = -9y \Rightarrow y = -\frac{1}{3}$

b $x^2 - y^2 i = 9 - 25i$

$z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \ , \ b_1 = b_2$

$\therefore \ x^2 = 9 \Rightarrow x = 3 \ , \ x = -3 \ ,$

بسّط

$-y^2 = -25 \Rightarrow y = 5 \ , \ y = -5$

c $2x + yi = 1$

$1 = 1 + 0i$

$\therefore \ 2x = 1 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

$y = 0$

حاول أن تحل

3 أوجد قيم كل من $x , y \in \mathbb{R}$ في كل مما يلي:

a $x + 5i = 7 - 3yi$ b $(x+3) + y^2 i = 5 - yi$ c $3i = 2x - 5yi$

- إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا، والعكس صحيح.

$$x + yi = 0 \Longleftrightarrow (x = 0 \ , \ y = 0)$$

التمثيل البياني لعدد مركب Representation of a Complex Number

يمكن وضع العدد المركب $z = a + bi$ على صورة الزوج المرتب (a, b).

الإحداثي السيني هو الجزء الحقيقي والإحداثي الصادي هو الجزء التخيلي.

وتعرف **بالصورة الديكارتية** للعدد المركب.

$$M(a\,,b) \longleftrightarrow z = a + bi$$

الصورة الديكارتية — الصورة الجبرية

كل نقطة في المستوى الإحداثي تمثل عددًا مركبًا، وكل عدد مركب يناظر (تمثله) نقطة في المستوى الإحداثي.

في هذه الحالة يسمى المستوى الإحداثي **المستوى المركب (مستوى أرجاند)**، ويسمى محور السينات **بالمحور الحقيقي**، ويسمى محور الصادات **بالمحور التخيلي**.

مثال (4)

مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 3 + 2i$ b $z_2 = -1$ c $z_3 = -i - 2$ d $z_4 = i$

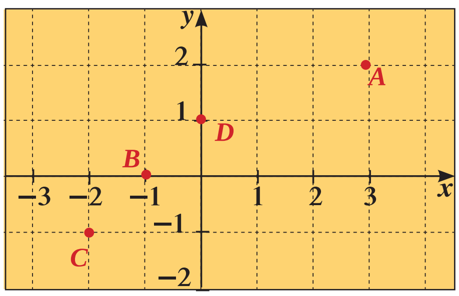
الحل:

a $z_1 = 3 + 2i$ تمثله النقطة $A(3\,,2)$.

b $z_2 = -1$ تمثله النقطة $B(-1\,,0)$.

c $z_3 = -i - 2 = -2 - i$ تمثله النقطة $C(-2\,,-1)$.

d $z_4 = i$ تمثله النقطة $D(0\,,1)$.



حاول أن تحل

4 مثّل كلًّا مما يلي في المستوى المركب:

a $z_1 = 4 - i$ b $z_2 = -3i$ c $z_3 = -4 - 3i$ d $z_4 = 2$

مثال (5)

اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط: $M(3\,,2)$, $L(2\,,-1)$, $J(0\,,-5)$.

الحل:

النقطة $J(0\,,-5)$ تمثل العدد المركب $z_1 = 0 - 5i = -5i$.

النقطة $L(2\,,-1)$ تمثل العدد المركب $z_2 = 2 - i$.

النقطة $M(3\,,2)$ تمثل العدد المركب $z_3 = 3 + 2i$.

حاول أن تحل

5 اكتب العدد المركب المناظر لكل من النقاط $N(-4\,,1)$, $H(1\,,-2)$, $K(7\,,0)$.

أولًا: جمع وطرح الأعداد المركبة Adding and Subtracting Complex Numbers

لجمع عددين مركبين نجمع جزءيهما الحقيقيين معًا ونجمع جزأيهما التخيليين معًا.

كذلك لطرح عددين مركبين نطرح الجزءين الحقيقيين ونطرح الجزءين التخيليين كالتالي:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \ , \ z_2 = a_2 + b_2 i$ عددين مركبين فإن:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$$

خواص عملية الجمع على الأعداد الحقيقية تستمر مع عملية الجمع على الأعداد المركبة كما يلي:

الخاصية	$\forall \ z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 + z_2 = z_2 + z_1$
التجميعية	$z_1 + (z_2 + z_3) = (z_1 + z_2) + z_3$

مثال (6)

إذا كان: $z_3 = 2i \quad , \quad z_2 = 4 - 7i \quad , \quad z_1 = 2 + 3i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_1 - z_2$ c $z_3 + z_2 + z_1$

الحل:

a
$$z_1 + z_2 = (2 + 3i) + (4 - 7i)$$
$$= (2 + 4) + (3 - 7)i$$
$$= 6 - 4i$$

$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i$

بسّط

b
$$z_1 - z_2 = (2 + 3i) - (4 - 7i)$$
$$= (2 - 4) + (3 - (-7))i$$
$$= -2 + 10i$$

$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i$

بسّط

c
$$z_3 + z_2 + z_1 = z_3 + (z_2 + z_1)$$
الخاصية التجميعية
$$= z_3 + (z_1 + z_2)$$
الخاصية الإبدالية
$$= 2i + 6 - 4i$$
$$= 6 - 2i$$

حاول أن تحل

6 إذا كان $z_3 = -0.3i \quad , \quad z_2 = 3.4 - 1.2i \quad , \quad z_1 = -2 + 5i$ فأوجد:

a $z_1 + z_2$ b $z_2 - z_1$ c $z_3 - z_2 - z_1$

ملاحظات:

- الصفر هو العنصر المحايد لعملية الجمع على مجموعة الأعداد المركبة $(0 = 0 + 0i)$.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $-z = -a - bi$

مثلًا: إذا كان $z = 2 + 5i$ فإن $-z = -2 - 5i$

- إذا كان مجموع عددين مركبين يساوي صفرًا فإن كلًّا منهما معكوس جمعي للآخر والعكس صحيح.

أي أن: $z_1 + z_2 = 0 \Longleftrightarrow z_1 = -z_2$

- لإيجاد ناتج طرح: $z_1 - z_2$ يمكن إضافة المعكوس الجمعي لِـ z_2 إلى z_1 أي $z_1 - z_2 = z_1 + (-z_2)$

ثانيًا: ضرب الأعداد المركبة Multiplying Complex Numbers

ويمكن استخدام قاعدة الضرب التالية:

إذا كان $z_1 , z_2 \in \mathbb{C} , c \in \mathbb{R}$

حيث $z_1 = a_1 + b_1 i , z_2 = a_2 + b_2 i$ فإن:

1. $c z_1 = ca_1 + c b_1 i$
2. $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i$

البرهان:

$$
\begin{aligned}
z_1 \cdot z_2 &= (a_1 + b_1 i)(a_2 + b_2 i) \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 i^2 \\
&= a_1 a_2 + a_1 b_2 i + a_2 b_1 i + b_1 b_2 (-1) \\
&= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + a_2 b_1) i
\end{aligned}
$$

خواص عملية الضرب على مجموعة الأعداد المركبة:

الخاصية	$\forall\ z_1 , z_2 , z_3 \in \mathbb{C}$
الإبدالية	$z_1 \times z_2 = z_2 \times z_1$
التجميعية	$z_1 \times (z_2 \times z_3) = (z_1 \times z_2) \times z_3$
التوزيعية	$z_1 \times (z_2 + z_3) = z_1 \times z_2 + z_1 \times z_3$ $z_1 \times (z_2 - z_3) = z_1 \times z_2 - z_1 \times z_3$

العدد 1 هو العنصر المحايد لعملية ضرب الأعداد المركبة $(1 = 1 + 0i)$

لضرب عددين مركبين يمكن:

استخدام الخواص أعلاه وحقيقة $i^2 = -1$ والخطوات نفسها التي تستخدم في عملية ضرب كثيرات الحدود.

مثال (7)

أوجد الناتج:

a) $(5i)(-4i)$

b) $3(7+5i)$

c) $(2+3i)(-3+5i)$

d) $4i\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)$

الحل:

a) $(5i)(-4i)=-20i^2$ خاصية ضرب كثيرات الحدود

$=-20(-1)$ عوّض عن i^2 بـ -1

$=20$ بسّط

b) $3(7+5i)=3\times 7+3\times 5i$ الخاصية التوزيعية

$=21+15i$ بسّط

c) $(2+3i)(-3+5i)=-6+10i-9i+15i^2$ خاصية ضرب كثيرات الحدود

$=-6+i+15(-1)$ عوّض عن i^2 بـ -1

$=-21+i$ بسّط

d) $4i\left(\left(1-\frac{1}{2}i\right)\left(1+\frac{1}{2}i\right)\right)=4i\left((1)^2-\left(\frac{1}{2}i\right)^2\right)$ المتطابقة $(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$=4i\left(1-\frac{1}{4}(-1)\right)$ عوّض عن i^2 بـ -1

$=4i\left(\frac{5}{4}\right)$ بسّط

$=5i$

حاول أن تحل

7 أوجد الناتج:

a) $(6-5i)(4-3i)$

b) $(9+4i)(4-9i)$

c) $(12i)(7i)(i+1)$

مثال (8)

إذا كان $z_2=5-i$ ، $z_1=2+3i$ فأوجد:

a) $-3z_2$

b) $z_1 \cdot z_2$

الحل:

a) $-3z_2=-3(5-i)$

$=-3(5)-3(-i)$

$=-15+3i$

b $z_1 \cdot z_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + (a_1b_2 + a_2b_1)i$

$$= ((2)(5) - (3)(-1)) + ((2)(-1) + (5)(3))i$$

$$= (10 + 3) + (-2 + 15)i$$

$$= 13 + 13i$$

حاول أن تحل

8 إذا كان $z_1 = 2 - 3i \ , \ z_2 = 1 + 4i$ فأوجد:

a $\frac{1}{2} z_1$

b $z_1 \cdot z_2$

قوى العدد المركب — Powers of a Complex Number

نستطيع حساب قوى (i) كما يلي:

$$i^2 = -1 \quad , \quad i^3 = i^2 \cdot (i) = -1 \times i = -i \quad ,$$

$$i^4 = i^2 \cdot i^2 = (-1) \times (-1) = 1$$

بصورة عامة:

إذا كان p عدد كلي فإن:

$$i^{4p} = 1 \ , \ i^{4p+1} = i \ , \ i^{4p+2} = -1 \ , \ i^{4p+3} = -i$$

لاحظ أنه عند رفع (i) لعدد كلي فإن الناتج يكون أحد عناصر المجموعة $\{-1 , 1 , i , -i\}$

فمثلًا:

$$i^{29} = i^{4\times 7+1} = i \quad , \quad i^{15} = i^{4\times 3+3} = -i \quad , \quad i^{2013} = i^{4\times 503+1} = i$$

- لإيجاد قوى عدد مركب نستخدم خطوات ضرب كثيرات الحدود نفسها.

مثال (9)

إذا كان $z_1 = i \ , \ z_2 = -2i \ , \ z_3 = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

فأوجد:

a z_1^{21}

b z_2^{6}

c z_3^{2}

d z_3^{3}

الحل:

a $z_1^{21} = i^{21} = i^{4\times5+1} = i$

b $z_2^6 = (-2i)^6 = (-2)^6 \times i^6$

$= 64 \times i^{4+2} = 64 \times i^2 = 64 \times (-1) = -64$

c $z_3^2 = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^2$

$= \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} i + \frac{3}{4} i^2$ $\quad (a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

$= \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{2} i - \frac{3}{4}$ $\quad$ بسِّط $(i^2 = -1)$

$= -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

d $z_3^3 = z_3^2 \cdot z_3$

$= \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)$ $\quad$ عوّض عن z_3^2 بـ: $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$

$= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{\sqrt{3}}{4} i + \frac{3}{4} i^2$

$= -\frac{1}{4} + 0 + \frac{3}{4}(-1)$

$= -1$

حاول أن تحل

9 أوجد:

a $5(i)^{73}$

b $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} i\right)^3$

c $\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i\right)^4$

ثالثًا: قسمة الأعداد المركبة Dividing Complex Numbers

مرافق العدد المركب Complex Conjugate

ناتج ضرب العددين المركبين $a - bi$, $a + bi$ غير الصفريين هو عدد حقيقي موجب:

$$(a + bi)\cdot(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2$$

للاستفادة من هذه العلاقة الخاصة نعرض ما يلي:

مرافق العدد المركب

مرافق العدد المركب $z = a + bi$ هو العدد المركب $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi$

فمثلًا: مرافق العدد $2 + 3i$ هو $2 - 3i$

والعدد $\overline{-7i + 2}$ هو $2 + 7i$

ملاحظة: لإيجاد المرافق $(\overline{z})$ يجب أن يكون z على الصورة الجبرية $z = a + bi$ حيث $a , b \in \mathbb{R}$.

معلومة:
إذا كان $z = a$ عدد حقيقي
فإن $\overline{z} = z = a$

خواص مرافق العدد المركب:

إذا كان $z_1 = a_1 + b_1 i \quad , \quad z_2 = a_2 + b_2 i$

فإن:

- $z_1 + \overline{z_1} = 2a_1$
- $z_1 - \overline{z_1} = 2bi$
- $z_1 \cdot \overline{z_1} = a_1^2 + b_1^2$
- $\overline{z_1 \pm z_2} = \overline{z_1} \pm \overline{z_2}$
- $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$
- $\overline{(\overline{z_1})} = z_1$

مثال (10)

إذا كان $z_1 = 3 + 4i \quad , \quad z_2 = 5 - 2i$ فأوجد:

a) $z_1 + \overline{z_1}$ b) $z_1 - \overline{z_1}$ c) $\overline{(\overline{z_1})}$

d) $\overline{z_1 + z_2}$ e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$ f) $\overline{z_1 \cdot z_2}$

الحل:

نوجد كل من: $\overline{z}_1 = 3 - 4i \quad , \quad \overline{z}_2 = 5 + 2i$

a) $z_1 + \overline{z_1} = 3 + 4i + 3 - 4i = 6$

b) $z_1 - \overline{z_1} = 3 + 4i - (3 - 4i) = 8i$

c) $\overline{(\overline{z_1})} = \overline{(\overline{3 + 4i})} = \overline{3 - 4i} = 3 + 4i$

d) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{(3 + 4i) + (5 - 2i)} = \overline{3 + 4i + 5 - 2i}$

$= \overline{8 + 2i} = 8 - 2i$

e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2} = \overline{3 + 4i} \cdot \overline{5 - 2i}$

$= (3 - 4i)(5 + 2i)$

$= 15 + 6i - 20i + 8$

$= 23 - 14i$

f) $\overline{z_1 \cdot z_2} = \overline{(3 + 4i)(5 - 2i)}$

$= \overline{15 - 6i + 20i + 8}$

$= \overline{23 + 14i}$

$= 23 - 14i$

حاول أن تحل

10 إذا كان $z_1 = 2 - 7i \quad , \quad z_2 = 3 + 5i$ فأوجد:

a) $\overline{z_1} + \overline{z_2}$ b) $\overline{z_1 - z_2}$ d) $\overline{z_1 \cdot z_2}$ e) $\overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$

تدريب: استخدم خواص المرافق أعلاه في حل المثال (10) السابق.

المعكوس الضربي لعدد مركب غير صفري $z = a + bi$ يرمز له بالرمز z^{-1}:

ويكون: $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{1}{a+bi} \times \frac{a-bi}{a-bi}$

$$z^{-1} = \frac{a}{a^2+b^2} - \frac{b}{a^2+b^2} i$$

مثال (11)

أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = 3 - 5i$ b $z_2 = 2i - 1$ c $z_3 = -7i$

الحل:

اضرب البسط والمقام في مرافق z_1

a $z_1^{-1} = \frac{1}{3-5i} \times \frac{3+5i}{3+5i}$

$= \frac{3}{9+25} + \frac{5}{9+25} i$

$= \frac{3}{34} + \frac{5}{34} i$

اكتب المقام في الصورة الجبرية

b $z_2^{-1} = \frac{1}{2i-1} = \frac{1}{-1+2i}$

$= \frac{1}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i}$

$= \frac{-1}{1+4} - \frac{2}{1+4} i$

$= \frac{-1}{5} - \frac{2}{5} i$

c $z_3^{-1} = \frac{1}{-7i}$

$= \frac{1}{-7i} \times \frac{i}{i}$

$= \frac{i}{-7 \times (-1)} = \frac{i}{7} = \frac{1}{7} i$

حاول أن تحل

11 أوجد المعكوس الضربي لكل من:

a $z_1 = -3i - 7$ b $z_2 = 5 + 11i$ c $z_3 = 6i$

ملاحظة: يمكنك التحقق من أن: $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{a^2+b^2}$

لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب آخر غير صفري z_2، نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر بضرب كلّ من البسط والمقام في مرافق المقام.

مثال (12)

أوجد ناتج قسمة $5-6i$ على $2+3i$

الحل:

$$\frac{5-6i}{2+3i}=\frac{5-6i}{2+3i}\times\frac{2-3i}{2-3i}$$
$$=\frac{10-15i-12i+18i^2}{(2)^2+(3)^2}$$
$$=\frac{10-18}{13}-\frac{15+12}{13}i$$
$$=\frac{-8}{13}-\frac{27}{13}i$$

حاول أن تحل

12 أوجد ناتج قسمة $3-2i$ على $1+2i$

مثال (13)

اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية للعدد المركب:

a $\frac{2}{3-i}$ b $\overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}$

الحل:

a ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$\frac{2}{3-i}=\frac{2}{3-i}\times\frac{3+i}{3+i}$$
$$=\frac{6+2i}{3^2+1^2}$$

بسِّط

$$=\frac{6}{10}+\frac{2}{10}i$$
$$=\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i$$

b ضرب البسط والمقام في مرافق المقام

$$\frac{5+i}{2-3i}=\frac{5+i}{2-3i}\times\frac{2+3i}{2+3i}$$

خاصية ضرب كثيرات الحدود

$$=\frac{10+15i+2i+3i^2}{2^2+3^2}$$

بسِّط

$$=\frac{7+17i}{13}=\frac{7}{13}+\frac{17}{13}i$$
$$\therefore\ \overline{\left(\frac{5+i}{2-3i}\right)}=\overline{\left(\frac{7+17i}{13}\right)}=\frac{7}{13}-\frac{17}{13}i$$

حاول أن تحل

13 اكتب كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $\frac{3+i}{2+5i}$ b $\frac{2-i}{2+i}$ c $\frac{\overline{5+i}}{2-3i}$

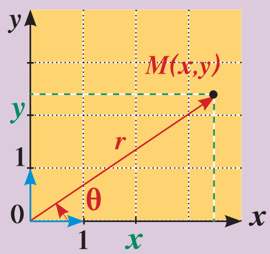
ملاحظة: مرافق ناتج قسمة عدد مركب على عدد مركب آخر غير صفري يساوي ناتج قسمة مرافق العدد المركب الأول على مرافق العدد المركب الثاني. $\overline{\left(\frac{Z_1}{Z_2}\right)}=\frac{\overline{Z_1}}{\overline{Z_2}}$

7-2

الإحداثيات القطبية والصورة المثلثية لعدد مركب

Polar Coordinates and Trigonometric Form of a Complex Number

دعنا نفكر ونتناقش



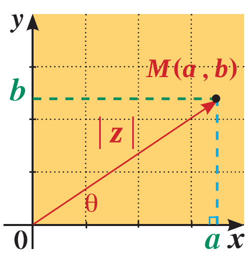
لنأخذ نقطة $M(x, y)$ في المستوى الإحداثي

حيث M ليست نقطة الأصل O

يمكن تحديد موقع النقطة بقياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM}) = \theta$ وبالمسافة r بين النقطتين O، M

1. أوجد x, y بمعلومية θ، r
2. استخدم نظرية فيثاغورث للتعبير عن r بدلالة x, y
3. هل يمكن دائمًا تحديد قياس θ؟
4. أوجد قيمة r وقياس θ لكل من النقاط $M_1(-3,0)$، $M_2(0,1)$، $M_3(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

القيمة المطلقة لعدد مركب Absolute Value of a Complex Number



القيمة المطلقة للعدد المركب هي المسافة بين النقطة التي تمثل هذا العدد ونقطة الأصل في المستوى الإحداثي المركب والتي يمكنك إيجادها باستخدام نظرية فيثاغورث.

بصفة عامة إذا كان $z = a + bi$

فإن: $|z| = |a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$

مثال (1)

أوجد:

(a) $|5i|$ (b) $|3 - 4i|$

الحل:

(a) $5i$ هي 5 وحدات انطلاقًا من نقطة الأصل على المحور التخيلي.

$\therefore\ |5i| = 5$

(b) $|3 - 4i|$

$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$ $= \sqrt{3^2 + (-4)^2}$

بسِّط $= \sqrt{9 + 16}$

$= 5$

سوف تتعلم

- الإحداثيات القطبية.
- تمثيل الأعداد المركبة بيانيًا.
- الصورة المثلثية للعدد المركب.
- التحويل بين الصورة الجبرية والصورة المثلثية.

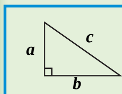
المفردات والمصطلحات:

- إحداثيات قطبية Polar Coordinates
- الصورة المثلثية The Trigonometric Form
- مقياس العدد المركب Norme of the Complex Number
- سعة العدد المركب Magnitude of the Complex Number
- تحويل Transformation

معلومة:

يمكن استخدام التعبير Modulus للدلالة على القيمة المطلقة للعدد المركب.

تذكر:



نظرية فيثاغورث:

$c^2 = a^2 + b^2$,

$c = \sqrt{a^2 + b^2}$

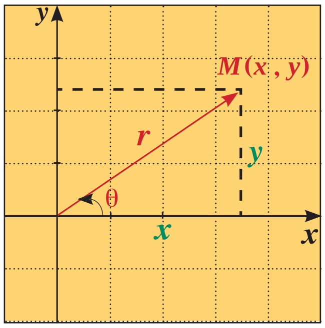
حاول أن تحل

1 أوجد:

a $|6-4i|$ b $|-2+5i|$

الإحداثيات القطبية Polar Coordinates

يمثّل الزوج المرتب (r,θ) الإحداثيات القطبية للنقطة M على المستوى الإحداثي المركب ونعلم أيضًا أن الزوج المرتب (x,y) يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M في نفس المستوى الإحداثي.



يمكن التحويل بين الإحداثيات القطبية والإحداثيات الديكارتية باستخدام:

$$r=\sqrt{x^2+y^2}$$
$$x=r\cos\theta$$
$$y=r\sin\theta$$

حيث θ هي الزاوية الموجهة في الوضع القياسي التي يمر ضلعها النهائي بالنقطة M .

مثال (2)

حوّل الإحداثيات القطبية إلى إحداثيات ديكارتية:

a $M\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$ b $N\left(\sqrt{2},\frac{5\pi}{6}\right)$

الحل:

a $M\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$

الزوج المرتب $\left(5,\frac{\pi}{4}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة M حيث: $r=5$, $\theta=\frac{\pi}{4}$

$$y=r\sin\theta \qquad\qquad x=r\cos\theta$$
$$=5\sin\frac{\pi}{4} \qquad\qquad =5\cos\frac{\pi}{4}$$
$$=5\times\frac{\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad =5\times\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{5\sqrt{2}}{2} \qquad\qquad =\frac{5\sqrt{2}}{2}$$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة M: $\left(\frac{5\sqrt{2}}{2},\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)$

تذكر:

$\cos\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

b $N\left(\sqrt{2}\,,\frac{5\pi}{6}\right)$

الزوج المرتب $\left(\sqrt{2}\,,\frac{5\pi}{6}\right)$ يمثل الإحداثيات القطبية للنقطة N حيث: $r=\sqrt{2}\;,\;\theta=\frac{5\pi}{6}$

$$y = r\sin\theta = \sqrt{2}\sin\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2}\times\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = r\cos\theta = \sqrt{2}\cos\frac{5\pi}{6} = \sqrt{2}\times\frac{-\sqrt{3}}{2} = \frac{-\sqrt{6}}{2}$$

$\therefore$ الزوج المرتب الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية للنقطة N: $\left(\frac{-\sqrt{6}}{2}\,,\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$

حاول أن تحل

2 أوجد الزوج المرتب $(x\,,y)$ الذي يمثل الإحداثيات الديكارتية لكل من النقطتين:

a $A(5\,,300^\circ)$ **b** $B\left(2\,,\frac{2\pi}{3}\right)$

للتحويل من الإحداثيات الديكارتية $(x\,,y)$ إلى الإحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$ نوجد قيمة r باستخدام القاعدة: $r=\sqrt{x^2+y^2}$ ثم نوجد قياس زاوية الإسناد α باستخدام: $\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|$

بعد ذلك تحديد الربع الذي تقع فيه هذه الزاوية θ من إشارة كلٍّ من x, y ونوجدها.

مثال (3)

حوّل من الإحداثيات الديكارتية إلى الإحداثيات القطبية $(r\,,\theta)$ لكل مما يلي:

a $L(1,-\sqrt{3})\;,\;0\le\theta<2\pi$ **b** $M(-3,-4)\;,\;0^\circ\le\theta<360^\circ$

الحل:

a $L(1,-\sqrt{3})$

$$r=\sqrt{(1)^2+(-\sqrt{3})^2}$$
$$=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$$

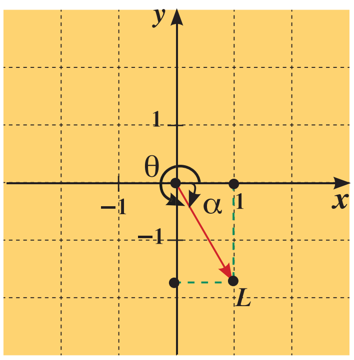
نفرض أن α زاوية الإسناد

$$\therefore\;\tan\alpha=\left|\frac{y}{x}\right|=|-\sqrt{3}|$$
$$=\sqrt{3}$$

وبالتالي: $\alpha=\tan^{-1}\sqrt{3}$

$$\therefore\;\alpha=\frac{\pi}{3}$$

$\because\; x>0\;\;,\;\;y<0$



تذكر:

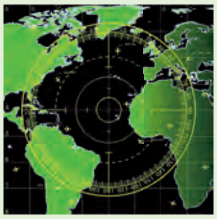
عند استخدام الآلة الحاسبة تأكد من وضعها بما يناسب قياس الزاوية:

الستيني DEG

الدائري: RAD

الربط بالحياة:

يعتمد مراقبو الحركة الجوية في المطارات على أنظمة الرادار لتوجيه مسار الطائرات وللتأكّد من سلامة رحلاتها الجوية، أي الحفاظ على المسافة اللازمة في ما بينها، وإبقائها بعيدًا عن التضاريس الأرضية. وكل ذلك يتم بالاعتماد على شاشة الرادار التي تبيّن قياسات الزوايا، والمسافات بين الطائرات وموقع كل منها.



تذكر:

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية التي قياسها θ فإن:

$$\theta=\begin{cases}\alpha & : x>0\,,y>0\\ \pi-\alpha & : x<0\,,y>0\\ \pi+\alpha & : x<0\,,y<0\\ 2\pi-\alpha & : x>0\,,y<0\end{cases}$$

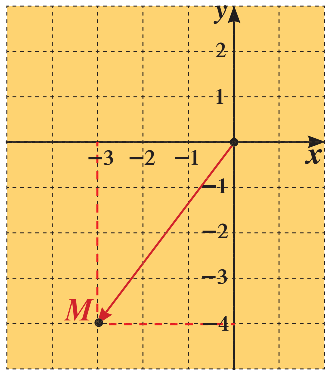
تذكر:

عندما نتحدث عن الإحداثيات القطبية نعني الزوج المرتب $(r\,,\theta)$.

وعندما نتحدث عن الإحداثيات الديكارتية نعني الزوج المرتب $(x\,,y)$.

$\therefore$ L تنتمي إلى الربع الرابع، $\therefore\ \theta = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي: $L\left(2, \frac{5\pi}{3}\right)$



b $M(-3, -4)$

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{9+16}$$
$$= \sqrt{25}$$
$$= 5$$

نفرض أن α زاوية الإسناد

$$\therefore\ \tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-4}{-3}\right| = \frac{4}{3}$$

وبالتالي: $\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\because\ x < 0,\ \ y < 0$

$\therefore$ M تنتمي إلى الربع الثالث

استخدم الآلة الحاسبة $\therefore\ \theta = 180° + \tan^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)$

$\theta = 233°\,7'\,48.37''$

وبالتالي الإحداثيات القطبية هي $M(5,\ 233°\,7'\ 48.37'')$

حاول أن تحل

3 أوجد الزوج المرتب (r, θ) لكل نقطة مما يلي حيث $0 \leqslant \theta < 2\pi$

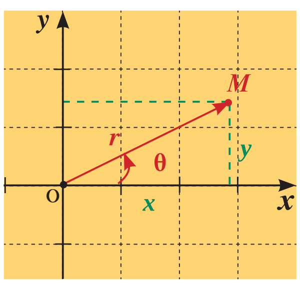
a $D(3\sqrt{3}, 3)$ **b** $C(4, -2\sqrt{5})$

الصورة المثلثية Trigonometric Form

النقطة $M(x, y)$ تمثل العدد المركب $z = x + yi$

المسافة بين نقطة الأصل O والنقطة M هي $OM = r\ ,\ r > 0$

θ هي قياس الزاوية الموجهة $(\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{OM})$



> يمكن كتابة العدد المركب $z = x + yi$ على الصورة:
> $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ وتعرف **بالصورة المثلثية** للعدد المركب z.

معلومة:
يستخدم أحيانًا التعبير «الصورة المثلثية» بدلًا من «الصورة القطبية».

يسمى r **مقياس العدد** أو القيمة المطلقة ويرمز إليه أحيانًا بالرمز $|z|$ ويتعين بالعلاقة:

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

تسمى θ **سعة** العدد المركب وتتعيّن من $\cos\theta = \frac{x}{r}\ ,\ \sin\theta = \frac{y}{r}$

أو تتعين من $\tan\theta = \frac{y}{x}\ ,\ x \neq 0$ وتحديد الربع.

الصورة المثلثية للعدد المركب ليست وحيدة، لأنه إذا كانت θ سعة العدد المركب $x + yi$ فإن كلًّا مما يلي سعة للعدد نفسه: $\theta + 2\pi\ ,\ \theta + 4\pi, \ldots\ ,\ \theta + 2\pi k\ :\ k \in \mathbb{Z}$.

إذا كانت $\theta \in [0, 2\pi)$ أو $0° \leqslant \theta < 360°$ فتسمى السعة في هذه الحالة **بالسعة الأساسية**.

مثال (4)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a $z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$ **b** $z_2 = -2 - 2i$ **c** $z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$

الحل:

a

$$z_1 = 1 + \sqrt{3}\,i$$
$$x_1 = 1, y_1 = \sqrt{3}$$
$$r_1 = |z_1| = \sqrt{(1)^2 + (\sqrt{3})^2} = \sqrt{4} = 2$$

نفرض أن α_1 زاوية الإسناد:

$$\therefore \tan\alpha_1 = \left|\frac{y_1}{x_1}\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{1}\right| = \sqrt{3}$$
$$\therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$$
$$\because x_1 > 0 \;,\; y_1 > 0$$

$\therefore$ θ_1 تقع في الربع الأول من المستوى الإحداثي المركب.

$$\therefore \theta_1 = \alpha_1 = \frac{\pi}{3}$$

الصورة المثلثية هي: $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b

$$z_2 = -2 - 2i$$
$$x_2 = -2, y_2 = -2$$
$$r_2 = |z_2| = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

نفرض أن α_2 زاوية الإسناد: $\tan\alpha_2 = \left|\frac{y_2}{x_2}\right| = \left|\frac{-2}{-2}\right| = 1$

$$\therefore \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$$
$$\because x_2 < 0 \;,\; y_2 < 0$$

$\therefore$ θ_2 تقع في الربع الثالث.

$$\therefore \theta_2 = \pi + \alpha_2 = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

الصورة المثلثية هي: $z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

c

$$z_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$$
$$x_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \;,\; y_3 = \frac{1}{2}$$
$$r_3 = |z_3| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

مراجعة سريعة:

إذا كان مقياس عدد مركب يساوي الواحد أي أن:

$|r| = 1$ فإن النقطة المناظرة تنتمي إلى دائرة الوحدة.

نفرض أن α_3 زاوية الإسناد:

$$\tan\alpha_3 = \left|\frac{y_3}{x_3}\right| = \left|\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}}\right| = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\alpha_3 = \frac{\pi}{6}$$

$$\because\ x_3 < 0\ ,\ y_3 > 0$$

$\therefore$ θ_3 تقع في الربع الثاني.

$$\therefore\ \theta_3 = \pi - \alpha_3 = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

الصورة المثلثية هي: $z_3 = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

حاول أن تحل

4 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية:

a) $z_1 = \frac{5}{\sqrt{2}} - \frac{5}{\sqrt{2}}i$
b) $z_2 = -1 - i$
c) $z_3 = -2 + 2\sqrt{3}i$

مثال (5)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$
b) $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$
c) $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$
d) $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ)$

الحل:

a) $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ $\quad x > 0\ ,\ y < 0$

$$z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$$
$$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

b) $z_2 = \sin\frac{\pi}{6} + i\cos\frac{\pi}{6}$ $\quad x > 0\ ,\ y > 0$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$= \cos\frac{\pi}{3} + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)$$

تذكر:

$\cos(-\theta) = \cos\theta$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta$

تذكر:

$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -\sin\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = \cos\theta$

معلومة:

إذا كانت θ بالقياس السالب فإن السعة الأساسية تساوي:

$\theta + 2k\pi\ ,\ k \in \mathbb{N}$

c $z_3 = -\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

$= \sqrt{2}\left(-\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right) \qquad x < 0 \;,\; y < 0$

$= \sqrt{2}\left(\cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

d $z_4 = \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 390^\circ) \;,\; x > 0 \;,\; y > 0$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin(360^\circ + 30^\circ))$

$= \frac{9}{2}(\cos 30^\circ + i\sin 30^\circ)$

تذكر:

$\cos(\pi - \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$

تذكر:

$\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$

$\sin(\pi + \theta) = -\sin\theta$

حاول أن تحل

5 ضع كلًّا مما يلي في الصورة المثلثية: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

a $3\left(-\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

b $2\left(\sin\frac{\pi}{4} + i\cos\frac{\pi}{4}\right)$

c $-\sqrt{3}\left(-\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

d $3(\cos 50^\circ - i\sin(-130^\circ))$

مثال (6)

ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

الحل:

a $z_1 = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

$z_1 = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_1 = -\sqrt{3} - i$

b $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{-\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{6}\right)\right)$

$z_2 = 3\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)$

$z_2 = \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}i$

حاول أن تحل

6 ضع كلًّا مما يلي في الصورة الجبرية:

a $z_1 = 4\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

b $z_2 = \left(\cos\frac{5\pi}{3} + i\sin\frac{5\pi}{3}\right)$

الصورة المثلثية في حالات خاصة Trigonometric Form In Special Cases

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على المحور الحقيقي (محور السينات). وكل عدد تخيلي يمثل بنقطة على المحور التخيلي (محور الصادات). يمثل الجدول التالي الحالات الأربع الخاصة. a, b عددان حقيقيان موجبان.

ملاحظة:
إذا كان $z = 0$، فإن:
$x = 0 \ , y = 0 \ , r = 0$
θ غير معيّنة.

العدد	المقياس	سعة (بالراديان) (rad)
a	a	0
$-a$	$\lvert -a \rvert = a$	π
bi	b	$\frac{\pi}{2}$
$-bi$	$\lvert -b \rvert = b$	$\frac{3\pi}{2}$

مثال (7)

ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 3$ b $z_2 = -5$ c $z_3 = i$ d $z_4 = -3i$

الحل:

a $r_1 = |z_1| = |3| = 3$, السعة الأساسية $= 0$ $\Longrightarrow z_1 = 3(\cos 0 + i \sin 0)$

b $r_2 = |z_2| = |-5| = 5$, السعة الأساسية $= \pi$ $\Longrightarrow z_2 = 5(\cos \pi + i \sin \pi)$

c $r_3 = |z_3| = |i| = 1$, السعة الأساسية $= \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_3 = 1\left(\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}\right)$

d $r_4 = |z_4| = |-3i| = 3$, السعة الأساسية $= \frac{3\pi}{2}$ $\Longrightarrow z_4 = 3\left(\cos \frac{3\pi}{2} + i \sin \frac{3\pi}{2}\right)$

حاول أن تحل

7 ضع في الصورة المثلثية كلًّا من الأعداد التالية:

a $z_1 = 2i$ b $z_2 = 5$ c $z_3 = \frac{-3}{4}$ d $z_4 = -\frac{5}{2} i$

7–3

حل معادلات

Solving Equations

سوف تتعلم
- حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$.
- إيجاد الجذرين التربيعيين لعدد مركب.
- حل معادلات تربيعية مع $\Delta < 0$.

المفردات والمصطلحات:
- جذر تربيعي لعدد مركب
Square Root of a Complex Number
- معادلة تربيعية
Quadratic Equation

عمل تعاوني

1 حل في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$ كلًّا من المعادلتين التاليتين:

a $x^2 = -4$

b $x^2 = k$، حيث k عدد حقيقي سالب.

2 لتكن المعادلة: $x^2 - 2x + 5 = 0$

a أثبت أنه لا يوجد حلول حقيقية للمعادلة.

b استخدم طريقة إكمال المربع وأثبت أن: $x^2 - 2x + 5 = (x-1)^2 + 4$.

c حل المعادلة في $\mathbb{C}$.

3 استخدم الطريقة في 2 لحل المعادلة: $z^2 + 4z + 13 = 0$ في $\mathbb{C}$.

أولًا: حل معادلات من الدرجة الأولى في $\mathbb{C}$

Solving First Degree Equations in $\mathbb{C}$

تحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد المركبة بالطريقة نفسها التي تستخدم لحل معادلات الدرجة الأولى في مجموعة الأعداد الحقيقية.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3z + 1 - i = 7 + 3i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

الحل:

$$3z + 1 - i = 7 + 3i$$

افصل المتغير z

$$3z = 7 + 3i - 1 + i$$

بسِّط

$$3z = 6 + 4i$$

$$z = \frac{6+4i}{3}$$

$$z = 2 + \frac{4}{3}i$$

مجموعة الحل = $\left\{2 + \frac{4}{3}i\right\}$

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i = 3 + 2i$ في مجموعة الأعداد المركبة $\mathbb{C}$.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2z + i\bar{z} = 5 - 2i$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

لتكن $z = x + yi$ حيث x, y عددان حقيقيان.

$$2z + i\bar{z} = 5 - 2i$$

عوّض عن z بـ $x + yi$

$$2(x + yi) + i(\overline{x + yi}) = 5 - 2i$$

مرافق $x + yi$ هو $x - yi$

$$2(x + yi) + i(x - yi) = 5 - 2i$$

$$2x + 2yi + xi - y(i)^2 = 5 - 2i$$

$i^2 = -1$

$$2x + 2yi + xi + y = 5 - 2i$$

تجميع الأعداد الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا

$$2x + y + (x + 2y)i = 5 - 2i$$

خاصية تساوي عددين مركبين

$$\begin{cases} 2x + y = 5 \\ x + 2y = -2 \end{cases}$$

بحل المعادلتين نحصل على:

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = -3 \end{cases}$$

مجموعة الحل: $= \{4 - 3i\}$.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z + i = 2\bar{z} + 1$ في $\mathbb{C}$.

تذكر:
يمكن حل نظام معادلتين من الدرجة الأولى في متغيرين باستخدام طريقة الحذف أو التعويض أو باستخدام الآلة الحاسبة.

تذكر:
إن العمليات على الأعداد المركبة مثل العمليات على الأعداد الحقيقية مع اعتبار $i^2 = -1$.

ثانيًا: حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد في $\mathbb{C}$

Solving Quadratic Equations With One Variable in $\mathbb{C}$

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^2 + 100 = 0$ حيث $x \in \mathbb{C}$.

الحل:

$$4x^2 + 100 = 0$$

$$4x^2 = -100$$

$$x^2 = -25$$

$$x = \pm\sqrt{-25}$$

$\sqrt{-a^2} = ai$

$$x = \pm 5i$$

مجموعة الحل $= \{5i, -5i\}$.

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي حيث $x \in \mathbb{C}$:

a $3x^2 + 48 = 0$ b $-5x^2 - 150 = 0$ c $8x^2 + 2 = 0$

مثال (4)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $4z^2 + 16z + 25 = 0$ في $\mathbb{C}$.

الحل:

نحسب أولًا المميز Δ.

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (16)^2 - 4(4)(25)$$

$$= -144$$

$$= (-1) \times (12)^2$$

$$= 12^2 \times i^2$$

$i^2 = -1$

$$z_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 - 12i}{2 \times 4} = -2 - \frac{3}{2}i$$

$$z_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-16 + 12i}{2 \times 4} = -2 + \frac{3}{2}i$$

مجموعة الحل = $\left\{-2 - \frac{3}{2}i, -2 + \frac{3}{2}i\right\}$.

حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2 - 2z + 2 = 0$ في $\mathbb{C}$.

مثال (5)

لتكن المعادلة: $z^2 + z + 1 = 0$

a بدون حل المعادلة : أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الحل:

بالتعويض في الطرف الأيسر

a $z_1^2 + z_1 + 1$

بالتعويض

$$= \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}\right) + 1$$

$$= \frac{1-3+2\sqrt{3}i}{4} + \frac{-1-\sqrt{3}i}{2} + 1$$ خاصية ضرب كثيرات الحدود

$$= \frac{-2+2\sqrt{3}i-2-2\sqrt{3}i+4}{4}$$ بالتبسيط

$$= 0$$

$\therefore$ $z_1 = \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b إذا كان z_2 هو الجذر الثاني فيكون $z_1 + z_2 = \frac{-b}{a}$.

ومنه

$$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2} + z_2 = -1$$

$$z_2 = -1 + \frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_2 = \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$

وبالتالي مجموعة الحل = $\left\{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$

حاول أن تحل

5 لتكن المعادلة: $2z^2 - 6z + 5 = 0$

a أثبت أن العدد المركب $z_1 = \frac{3-i}{2}$ هو جذر لهذه المعادلة.

b أوجد الجذر الثاني.

الجذر التربيعي لعدد مركب Square Root of a Complex Number

لإيجاد جذر تربيعي لعدد مركب z نبحث عن عدد w يكون مربعه يساوي z.

ليكن $z = a + bi$

ابحث عن $w = m + ni$، بحيث يكون $w^2 = z$

$$(m+ni)^2 = a + bi$$

$$m^2 - n^2 + 2mni = a + bi$$

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = a \\ 2mn = b \end{cases}$$

للمساعدة على حل هذا النظام ندخل معادلة ثالثة ناتجة عن كون $|w|^2 = |z|$،

أي $(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{a^2+b^2}$.

مثال (6)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 3 + 4i$

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

تذكر:
في المعادلة التربيعية $ax^2 + bx + c = 0$ حيث $a, b, c \in \mathbb{R}$ ، $a \neq 0$
مجموع الجذرين $\frac{-b}{a}$
حاصل ضرب الجذرين $\frac{c}{a}$

معلومة:
إذا كان $z = a + bi, b \neq 0$ جذرًا لمعادلة معاملاتها أعدادًا حقيقية فإن $\overline{z} = a - bi$ هو جذر آخر لها.

معلومة:
إذا كان z_1, z_2 جذرين تربيعيين للعدد z فإن:
$z_1 + z_2 = 0$

معلومة:
إذا كان $z_1 = z_2$ فيكون:
$|z_1| = |z_2|$.

بالتعويض

$(m+ni)^2 = 3+4i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود

$m^2 - n^2 + 2mni = 3+4i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\begin{cases} m^2 - n^2 = 3 & (1) \\ 2mn = 4 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:

$|w|^2 = |z|$

$(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{(3)^2+(4)^2}$

$m^2 + n^2 = 5 \qquad (3)$

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 5 \\ m^2 - n^2 = 3 \end{cases}$$

بجمع المعادلتين (3), (1) نحصل على:

$2m^2 = 8 \Rightarrow m^2 = 4$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$\therefore \; n^2 = 1$

$$\Rightarrow \begin{cases} m = 2 \;,\; m = -2 \\ n = 1 \;,\; n = -1 \end{cases}$$

من المعادلة $2mn = 4$ نستنتج أن $m\,,n$ لهما الإشارة نفسها

$\therefore \; m = 2 \;,\; n = 1$ أو $m = -2 \;,\; n = -1$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $z = 3+4i$ هما: $w_1 = 2+i \;,\; w_2 = -2-i$

حاول أن تحل

6 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -3-4i$

مثال (7)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7-24i$.

الحل:

ليكن $w = m+ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض

$(m+ni)^2 = 7-24i$

خاصية ضرب كثيرات الحدود

$m^2 - n^2 + 2mni = 7-24i$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = 7 & (1) \\ 2mn = -24 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:

$|w|^2 = |z|$

$(\sqrt{m^2+n^2})^2 = \sqrt{(7)^2+(24)^2}$

$m^2 + n^2 = 25 \qquad (3)$

بجمع المعادلتين (3) ,(1) نحصل على:

$$\begin{cases} m^2 + n^2 = 25 \\ m^2 - n^2 = 7 \end{cases}$$

$$2m^2 = 32 \Rightarrow m^2 = 16 \Rightarrow m = \pm 4$$

بالتعويض في (1) نحصل على:

$$n^2 = 9 \Rightarrow n = \pm 3$$

$$\because 2mn = -24 \quad , \quad -24 < 0$$

من المعادلة $2mn = -24$ نستنتج أن m, n لهما إشارتان مختلفتان.

$\therefore \; m = -4 \; , \; n = 3$ أو $m = 4 \; , \; n = -3$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $7 + 24i$ هما:

$$w_1 = 4 - 3i \; , \; w_2 = -4 + 3i$$

حاول أن تحل

7 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 5 + 12i$.

مثال (8)

أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = -21 - 20i$.

الحل:

ليكن $w = m + ni$ جذرًا تربيعيًّا للعدد z، فيكون $w^2 = z$

بالتعويض

$$(m + ni)^2 = -21 - 20i$$

خاصية ضرب كثيرات الحدود

$$m^2 - n^2 + 2mni = -21 - 20i$$

خاصية المساواة لعددين مركبين

$$\therefore \begin{cases} m^2 - n^2 = -21 & (1) \\ 2mn = -20 & (2) \end{cases}$$

نضيف المعادلة:

$$|w|^2 = |z|$$

$$\left(\sqrt{m^2 + n^2}\right)^2 = \sqrt{(-21)^2 + (-20)^2}$$

$$m^2 + n^2 = 29 \qquad (3)$$

المعادلتان (3) ,(1) تعطيان $m^2 = 4$، $n^2 = 25$ أي $m = \pm 2$، $n = \pm 5$

المعادلة (2) تبين أن m, n مختلفتان في الإشارة.

$\therefore \; m = 2 \; , \; n = -5$ أو $m = -2 \; , \; n = 5$

الجذران التربيعيان للعدد المركب $-21 - 20i$ هما:

$$w_1 = 2 - 5i \; , \; w_2 = -2 + 5i$$

حاول أن تحل

8 أوجد الجذرين التربيعيين للعدد المركب $z = 7 + 24i$

مثال (9)

تطبيق إثرائي

أوجد مجموعة حل المعادلة: $z^2+(2+i)z-1+7i=0$.

الحل:

$$\Delta=(2+i)^2-4(1)(-1+7i)$$
$$\Delta=4-1+4i+4-28i$$
$$\Delta=7-24i$$

لإيجاد $\sqrt{\Delta}$ نبحث عن $w=m+ni$، بحيث يكون $w^2=\Delta$.

بالتعويض $(m+ni)^2=7-24i$

من المثال (7) نستنتج: $w_1=4-3i\ ,\ w_2=-4+3i$

$$z_1=\frac{-(2+i)-(4-3i)}{2}=-3+i$$
$$z_2=\frac{-(2+i)-(-4+3i)}{2}=1-2i$$

مجموعة الحل = $\{-3+i\ ,\ 1-2i\}$

الربط بالحياة

الهواتف الجوالة: آلات سهلة الاستعمال، تخدمنا وتساعدنا في حياتنا اليومية، لكننا ننسى التكنولوجيا التي تكمن وراءها، ووراء هذه التكنولوجيا الأعداد المركبة. في الهاتف الجوال، يتحول الصوت أولًا إلى إشارة كهربائية، ثم إلى سلسلة من الأعداد الثابتة التي تستخدم فقط العددين $+1$ و -1

تعتبر هذه الأعداد معاملات كثيرة حدود وتخضع لعدة تغيرات. تنتقل الإشارة على شكل موجات، فتعترضها معوقات بيئية مثل الأبنية والسيارات...

للتأكد من الحصول على الإشارة الصحيحة تُستخدم عند الاستقبال منظومة تنقية تعتمد الأعداد المركبة.

يحدث كل هذا بسرعة فائقة إذ ينتقل الصوت في الواقع وكأن شيئًا لم يحدث.

المرشد لحل المسائل

يمكن حل المعادلة: $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=0$ في مجموعة الأعداد المركبة.

تذكر:
$i^2=-1$
$i^3=-i$
$i^4=1$

a أثبت أن للمعادلة جذرًا تخيليًا. ثم أوجد هذا الجذر.

b حل المعادلة.

الحل:

a نبحث عن العدد التخيلي ni الذي يحقق المعادلة لذلك نعوّض عن z بـ ni:

$$(ni)^3+(-8+i)(ni)^2+(17-8i)(ni)+17i=0$$

$$-n^3i+(-8+i)(-n^2)+17ni+8n+17i=0$$

$$-n^3i+8n^2-n^2i+17ni+8n+17i=0$$

الصورة الجبرية للعدد المركب

$$(8n^2+8n)+(-n^3-n^2+17n+17)i=0$$

من المعادلة (1): $8n(n+1)=0\Rightarrow n=0\ ,\ n=-1$

من المعادلة (2): $-n^2(n+1)+17(n+1)=0$

$$(n+1)(17-n^2)=0\Rightarrow n=-1\ ,\ n=\sqrt{17}\ ,\ n=-\sqrt{17}$$

قيمة n المشتركة في $(1), (2)$ هي $n=-1$ $\therefore$ $z=-i$ هو جذر تخيلي للمعادلة.

b $(z+i)$ هو عامل من عوامل $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i$.

نستخدم القسمة التركيبية، للقسمة على هذا العامل.

$$\begin{array}{r|rrrr} -i & 1 & -8+i & 17-8i & 17i \\ & & -i & +8i & -17i \\ \hline & 1 & -8 & 17 & 0 \end{array}$$

نحصل على: $z^3+(-8+i)z^2+(17-8i)z+17i=(z+i)(z^2-8z+17)$

وتصبح المعادلة: $(z+i)(z^2-8z+17)=0$

$$\therefore\ z+i=0 \text{ أو } z^2-8z+17=0$$

$$z=-i \text{ أو } z^2-8z+17=0$$

$$\Delta=(-8)^2-4\times(1)\times(17)=-4=4i^2$$

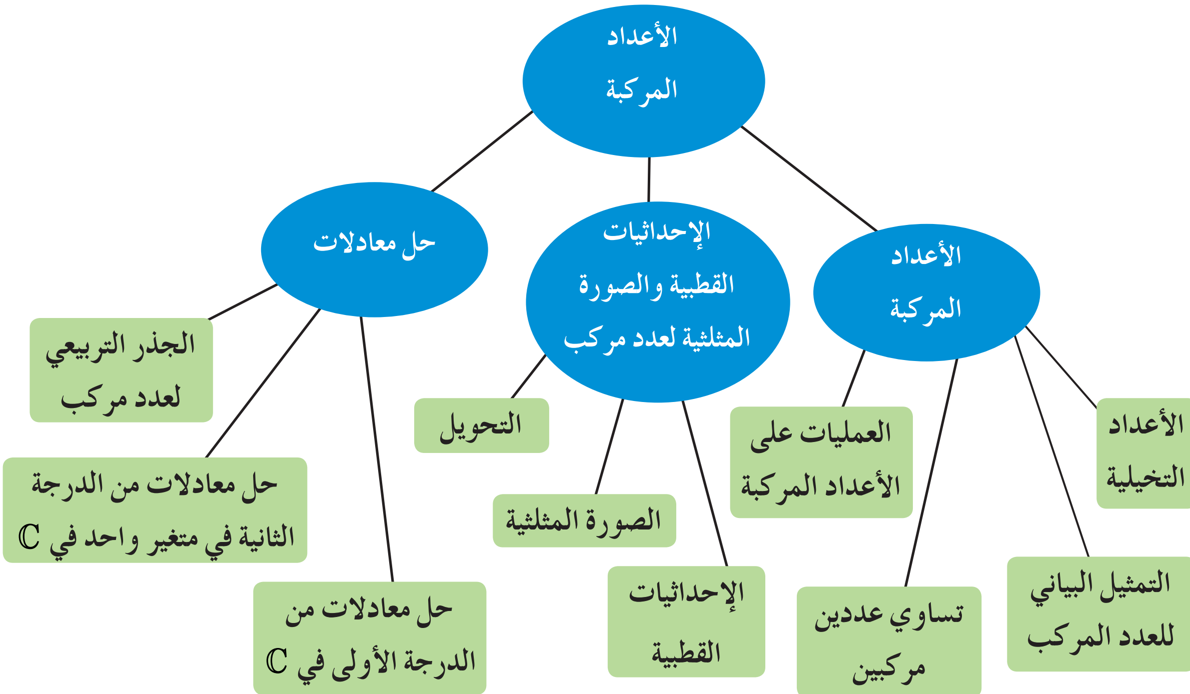
$$z=\frac{8-2i}{2}=4-i \text{ أو } z=\frac{8+2i}{2}=4+i$$

مجموعة حل المعادلة هي: $\{-i\ ,\ 4-i\ ,\ 4+i\}$.

مسألة إضافية

أثبت أن للمعادلة: $z^3+2(\sqrt{2}-1)z^2+4(1-\sqrt{2})z-8=0$ جذرًا حقيقيًا، ثم حل المعادلة.

مخطط تنظيمي للوحدة السابعة



ملخص

- العدد المركب هو عدد على الصورة $a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان.
- لأي عدد حقيقي موجب a، $\sqrt{-a}=\sqrt{a}\,i$
- الصورة الجبرية للعدد المركب: $z=a+bi$ حيث a, b عددان حقيقيان ويسمى a الجزء الحقيقي وb الجزء التخيلي.
- يكون عددان مركبان متساويان إذا وفقط إذا تساوى جزءاهما الحقيقيان وتساوى جزءاهما التخيليان.
- إذا ساوى عدد مركب الصفر فإن جزءه الحقيقي يساوي الصفر وجزءه التخيلي يساوي الصفر أيضًا.
- يمكن تمثيل العدد المركب $z=a+bi$ بالزوج المرتب (a, b) وتعرف بالصورة الديكارتية للعدد المركب.
- لجمع (أو طرح) أعداد مركبة نجمع (أو نطرح) الأجزاء الحقيقية معًا والأعداد التخيلية معًا كل منهما بشكل منفصل عن الآخر.
- المعكوس الجمعي للعدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $-z=-a-bi$
- إذا كان $z_1=a_1+b_1i$, $z_2=a_2+b_2i$ فإن $z_1\cdot z_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)i$
- إذا كان p عدد كلي: $i^{4p}=1$, $i^{4p+1}=i$, $i^{4p+2}=-1$, $i^{4p+3}=-i$
- مرافق العدد المركب $z=a+bi$ هو العدد المركب $\bar{z}=a-bi$
- خواص المرافق:
  - $z\cdot\bar{z}=a^2+b^2$
  - $z-\bar{z}=2bi$
  - $z+\bar{z}=2a$
  - $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$, $z_2\neq 0$
  - $\overline{(\bar{z}_1)}=z_1$
  - $\overline{z_1\cdot z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$
  - $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$
- لقسمة عدد مركب z_1 على عدد مركب z_2 غير صفري نكتبهما على شكل كسر على الصورة $\frac{z_1}{z_2}$، نبسط الكسر ثم نضرب البسط والمقام في مرافق مقام الكسر.
- القيمة المطلقة للعدد المركب $z=a+bi$ هي المسافة بين الصورة الديكارتية (a, b) لهذا العدد ونقطة الأصل $|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$
- الإحداثيات القطبية للنقطة M هي الزوج المرتب (r,θ) حيث $r=OM$، θ قياس الزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- الصورة المثلثية للعدد المركب $z=a+bi$ هي $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$، حيث $r=\sqrt{a^2+b^2}$
  $\sin\theta=\frac{y}{r}$, $\cos\theta=\frac{x}{r}$, $\tan\theta=\frac{y}{x}$

الوحدة الثامنة

حساب المثلثات

Trigonometry

مشروع الوحدة: تغير درجات الحرارة

1. **مقدمة المشروع:** تتغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة وعادة ما تكون متقاربة من سنة إلى أخرى (قبل تأثير الاحتباس الحراري). في بعض البلدان يكون التغيّر واضحًا ومداه كبير وتكون الفصول الأربعة متمايزة.
2. **الهدف:** وضع تمثيل بياني لدالة جيبية تمثل تغيّر درجات الحرارة خلال أشهر السنة في منطقة ما ومقارنتها بتغيّر درجات الحرارة في دولة الكويت.
3. **اللوازم:** ورق رسم بياني، آلة حاسبة مبرمجة، حاسوب.
4. **أسئلة حول التطبيق:**

يبيّن الجدول المقابل معدل درجات الحرارة المسجلة في إحدى المناطق خلال أشهر السنة.

الشهر	معدل درجة الحرارة
يناير	11
فبراير	13
مارس	17
أبريل	19
مايو	25
يونيو	30
يوليو	32
أغسطس	32
سبتمبر	29
أكتوبر	22
نوفمبر	15
ديسمبر	11

(a) على ورقة رسم بياني ضع مخطط انتشار للبيانات. يبيّن محور السينات أشهر السنة (يناير $=1$، فبراير $=2$، ...) محور الصادات معدل درجات الحرارة.

(b) يمكن تمثيل البيانات بدالة جيبية على الشكل: $y = a\sin(wx - \phi) + b$،

حيث: a: السعة $= \dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} - \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

b: الإزاحة الرأسية $= \dfrac{\text{أعلى درجة حرارة} + \text{أدنى درجة حرارة}}{2}$

w: الزمن الدوري $= \dfrac{2\pi}{\text{عدد الأشهر}}$

$\dfrac{\phi}{\omega}$: الإزاحة الأفقية لإيجاد قيمة ϕ يمكن استخدام الزوج المرتب $(1, 11)$ الذي يمثّل معدل درجة الحرارة في شهر يناير والتعويض في المعادلة.

(c) ارسم بيان الدالة التي حصلت عليها على الورقة حيث مخطط الانتشار.

(d) ابحث في المراجع عن درجات الحرارة المسجّلة خلال أشهر إحدى السنوات في دولة الكويت أوجد الدالة الجيبيّة المناظرة ومثّل بيانها.

5. **التقرير:** ضع تقريرًا مفصّلًا يبيّن مراحل عملك على المشروع. ضمّن تقريرك التمثيلات البيانية المطلوبة. اكتب فقرة لا تتعدى 25 كلمة تقارن بين تغيّر درجات الحرارة في الكويت وفي الجدول.

دروس الوحدة

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)	التحويلات الهندسية للدوال الجيبية	قانون الجيب	قانون جيب التمام	مساحة المثلث
8-1	8-2	8-3	8-4	8-5

الوحدة الثامنة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل بعض الدوال بيانيًّا.
- تعلمت إيجاد معادلة الدائرة.
- تعلمت الأنماط والدوال الدورية.
- تعلمت قياس الزاوية بالدرجات وبالراديان.

ماذا سوف تتعلم؟

- التمثيل البياني للدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- التحويلات على الدوال الجيبية.
- خصائص الدوال الجيبية.
- قانون الجيب واستخدامه في حل مسائل متنوعة.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة المثلث بدلالة قياسات زواياه وأطوال أضلاعه.

المصطلحات الأساسية

دالة الجيب – دالة جيب التمام – قيمة عظمى – قيمة صغرى – التمدد الرأسي – الانكماش الرأسي – التمدد الأفقي – الانكماش الأفقي – سعة الدالة – دالة زوجية – دالة فردية – دورة الدالة – قانون الجيب – قانون جيب التمام – قاعدة هيرون.

أضف إلى معلوماتك

علم المثلثات Trigonometry مأخوذة من اللغة اليونانية القديمة.

Trigone: مثلث، Metron: قياس.

يعتبر البابليون أول من درسوا علم المثلثات من خلال عملهم في علم الفلك ومحاولتهم قياس المسافات بين الكواكب ومن هنا يأتي النظام الستيني في قياس الزوايا $(1^\circ = 60' \;,\; 1' = 60'')$.

طوّر العلماء المسلمون علم المثلثات، نذكر منهم الخوارزمي وأبو الوفا، وقد استخدموا جداول مثلثية للجيب والظل على فترات 0.25° وبدقة تصل إلى جزء من مئة من المليون.

8-1

التمثيل البياني للدوال المثلثية (الجيب، جيب التمام، الظل)

Graphs of Trigonometric Functions (Sine, Cosine and Tangent)

سوف تتعلم

- التمثيل البياني لدالة الجيب.
- التمثيل البياني لدالة جيب التمام.
- التمثيل البياني لدالة الظل.

المفردات والمصطلحات:

- دوال جيبية Sinusoidal Functions
- دالة الجيب Sine Function
- دالة جيب التمام Cosine Function
- دالة الظل Tangent Function
- دالة زوجية Even Function
- دالة فردية Odd Function
- محور تناظر Axis of Symmetry
- مركز تناظر Center of Symmetry

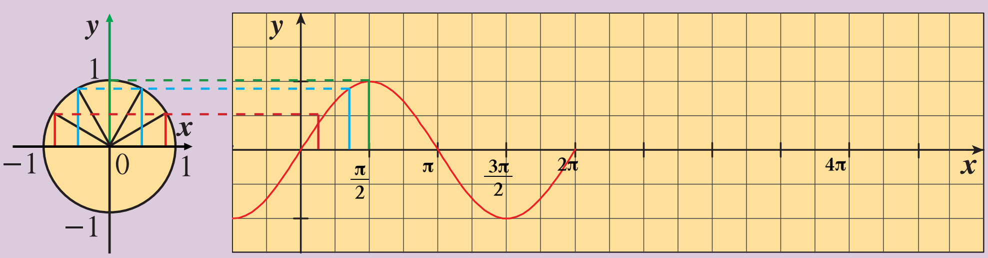
معلومة رياضية:

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن استخدام دائرة الوحدة لإيجاد جيب وجيب تمام الزاوية الموجهة التي قياسها θ والتي في وضع قياسي، حيث الضلع النهائي للزاوية الموجهة يقطع دائرة الوحدة في نقطة مثلثية إحداثيها الصادي يمثل جيب الزاوية وإحداثيها السيني يمثل جيب تمام الزاوية.

في الشكل لاحظ أن دالة الجيب $y = \sin\theta$ تربط القياس θ بالإحداثي الصادي للنقطة المثلثية. وينتج منحنى دالة الجيب:



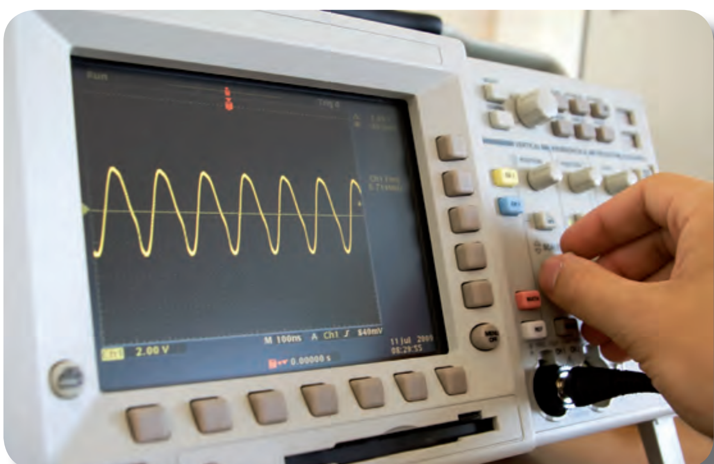
1 لأي قيمة لِـ θ يصل منحنى الدالة إلى القيمة العظمى 1؟

2 أكمل التمثيل البياني ليشمل زوايا قياساتها بين $2\pi, 4\pi$.
هل يصل المنحنى إلى القيمة العظمى 1 مرة ثانية؟ ولأي قيمة لِـ θ؟

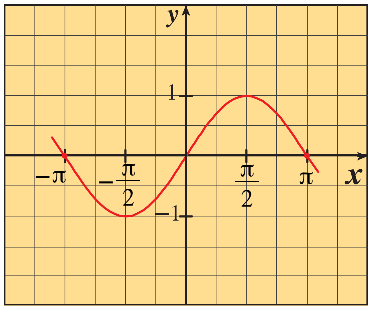
3 هل دالة الجيب دورية (أي أنها تكرر قيمها بعد كل فترة محددة)؟ اشرح.

الدوال الجيبية Sinusoidal Functions

تسمّى الدالة على الصورة $y = a\sin bx$ **دالة الجيب** والدالة على الصورة $y = a\cos bx$ **دالة جيب التمام** حيث $a \neq 0$, $b \neq 0$ وهما دالتان جيبيتان وكل منهما دورية.

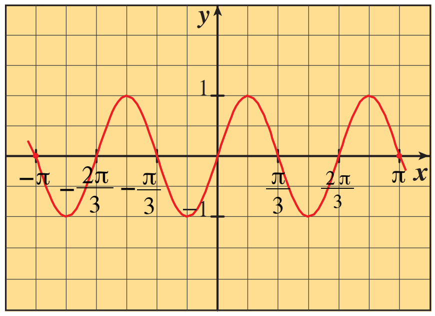


تمثل الأشكال التالية بيانات بعض دوال الجيب:



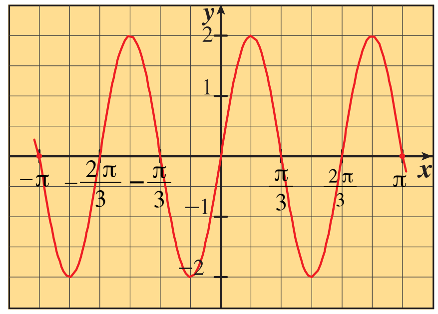
$y = \sin x$

شكل (1)



$y = \sin 3x$

شكل (2)



$y = 2\sin 3x$

شكل (3)

1. تسمى $|a|$ سعة الدالة الجيبية.
2. $|b|$ تمثل عدد الدورات في الفترة $[0, 2\pi]$
3. $\frac{2\pi}{|b|}$ تمثل دورة الدالة.

تدريب (1)

انظر إلى الأشكال السابقة وأكمل الجدول.

بيان الدالة	سعة الدالة	دورة الدالة
شكل (1)		
شكل (2)		
شكل (3)		

وبالمثل يمكننا إيجاد **السعة والدورة** لدالة جيب التمام على الصورة $y = a\cos bx$

مثال (1)

أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a) $y = 2\cos x$

b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$

الحل:

a) $y = 2\cos x$ هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$ فيكون: $b = 1$, $a = 2$

$\therefore$ سعة الدالة: $|a| = 2$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{1} = 2\pi$

b) $y = -5\cos\frac{x}{3}$ هي دالة على الصورة

$y = a\cos bx$ فيكون: $b = \frac{1}{3}$, $a = -5$

$\therefore$ سعة الدالة: $|a| = |-5| = 5$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{\left|\frac{1}{3}\right|} = 6\pi$

حاول أن تحل

1 أوجد الدورة والسعة لكل دالة مما يلي:

a $y=-2\cos 5x$

b $y=\frac{1}{2}\cos(-x)$

مثال (2)

اكتب معادلة الدالة على الصورة $y=a\sin bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$ ، $a=3$

b الدورة هي 2π ، $a=-\frac{1}{2}$

c الدورة هي 3 ، $a=1.5$

الحل:

a الدورة هي $\frac{\pi}{2}$

$$\therefore \frac{2\pi}{|b|}=\frac{\pi}{2}$$

$$|b|=4 \Leftrightarrow b=4 \ , \ b=-4$$

$$\because a=3$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y=3\sin(-4x)$ أو $y=3\sin 4x$

b الدورة هي 2π

$$\therefore \frac{2\pi}{|b|}=2\pi$$

$$|b|=1 \Leftrightarrow b=1 \ , \ b=-1$$

$$\because a=-\frac{1}{2}$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y=-\frac{1}{2}\sin(-x)$ أو $y=-\frac{1}{2}\sin x$

c الدورة هي 3

$$\therefore \frac{2\pi}{|b|}=3$$

$$|b|=\frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow b=\frac{2\pi}{3} \ , \ b=-\frac{2\pi}{3}$$

$$\because a=1.5$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي: $y=1.5\sin\left(\frac{-2\pi}{3}x\right)$ أو $y=1.5\sin\left(\frac{2\pi}{3}x\right)$

حاول أن تحل

2 اكتب معادلة الدالة على الصورة $y=a\cos bx$ إذا كانت:

a الدورة هي $\frac{\pi}{3}$ ، $a=-2$

b الدورة هي π ، $a=0.25$

c الدورة هي 2 ، $a=1$

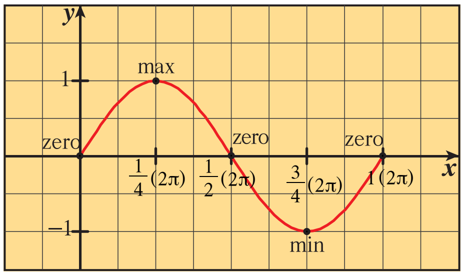
التمثيل البياني للدوال المثلثية Graph of Trigonometric Functions

أوّلًا: دالة الجيب The Sine Function

$y = \sin x$ هي دالة مثلثية مجالها $\mathbb{R}$ ومداها $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.

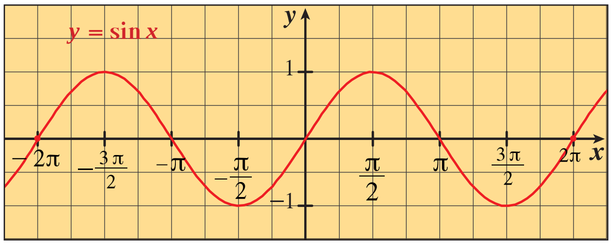
للحصول على التمثيل البياني لِـ $y = \sin x$ في دورة واحدة، تقسم الدورة الواحدة إلى أرباع، ثم نكوّن الجدول في الفترة $[0,2\pi]$ كالتالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin x$	0	1	0	-1	0



وحيث إنها دالة دورية، دورتها 2π فإنها تكرر قيمها ومن ذلك يمكن رسم بيان الدالة: $f(x) = \sin x \ , \ x \in \mathbb{R}$

يمكنك التحقق باستخدام آلة حاسبة.



من بيان دالة الجيب نلاحظ:

1. لأي عدد صحيح n فإن $\sin(n\pi) = 0$
2. لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x) = \sin x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$
3. دالة الجيب دالة فردية لأنّ: $\sin(-x) = -\sin x , \forall x \in \mathbb{R}$
4. منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل.
5. سعة الدالة هي: $\frac{\max f - \min f}{2}$

مثال (3)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = 3\sin 2x$ **b** $y = -2\sin\left(\frac{1}{2}x\right) \ , \ -4\pi \le x \le 4\pi$

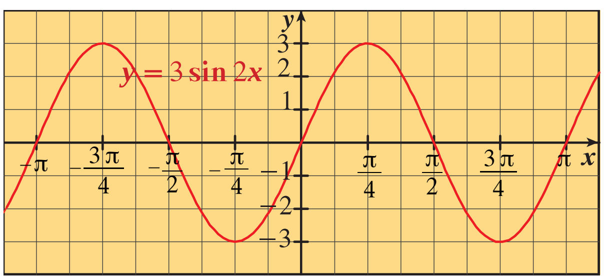
الحل:

a $y = 3\sin 2x$ هي دالة دورية مجالها $\mathbb{R}$.

السعة: $|a| = |3| = 3$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{4}$



x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
$2x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin 2x$	0	1	0	-1	0
$y = 3\sin 2x$	0	3	0	-3	0

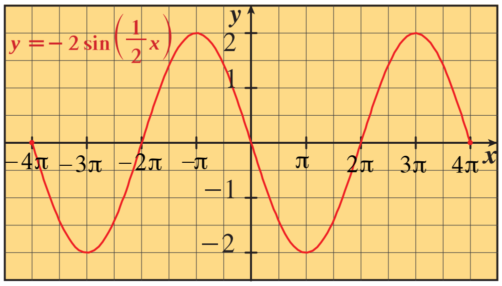
b $y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a|=|-2|=2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $=\pi$

x	0	π	2π	3π	4π
$\frac{1}{2}x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	1	0	-1	0
$y=-2\sin\left(\frac{1}{2}x\right)$	0	-2	0	2	0



وحيث أن منحنى الدالة متناظر حول نقطة الأصل يتم كذلك رسم المنحنى على الفترة $\left[-4\pi,0\right)$

حاول أن تحل

3 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y=\frac{1}{2}\sin 4x$

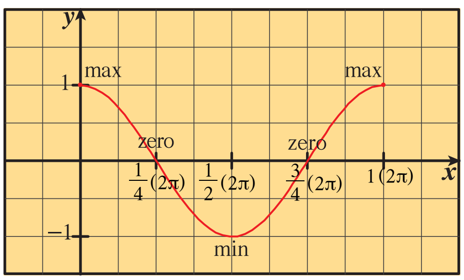
b $y=-4\sin x \ , \ x\in[-\pi \ , \ 2\pi]$

ثانيًا: دالة جيب التمام The Cosine Function

$y=\cos x$ هي دالة مثلثية مجالها هو أيضًا $\mathbb{R}$ ومداها هو $[-1,1]$، وهي دالة دورية ذات دورة 2π وسعتها تساوي واحد.
ونستطيع الحصول على التمثيل البياني للدالة $y=\cos x$ على مجالها عن طريق رسمها على الفترة $[0,2\pi]$ تمامًا مثلما فعلنا في دالة الجيب.

وتكرر نفسها ونحصل على البيان التالي:

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos x$	1	0	-1	0	1



يمكنك التحقق باستخدام الآلة الحاسبة.

من بيان دالة جيب التمام نلاحظ أن:

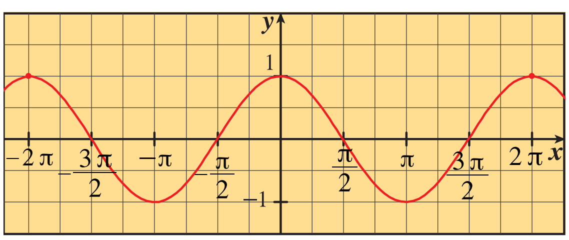
1 لأي عدد صحيح n فإن $\cos\left(\frac{\pi}{2}+n\pi\right)=0$

2 لأي عدد صحيح n فإن للدالة $f(x)=\cos x$ قيمة عظمى تساوي (1) عند $x=2n\pi$ وقيمة صغرى تساوي (-1) عند $x=\pi+2n\pi$

3 دالة جيب التمام دالة زوجية لأن: $\cos(-x)=\cos x \ , \ \forall x\in\mathbb{R}$

4 محور الصادات هو خط تناظر لمنحنى الدالة.

5 سعة الدالة هي: $\frac{\max f-\min f}{2}$



مثال (4)

أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي، ثم ارسم بيانها.

a $y = 2\cos 4x$

b $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)\ ,\ x \in [-3\pi\ ,\ 3\pi]$

الحل:

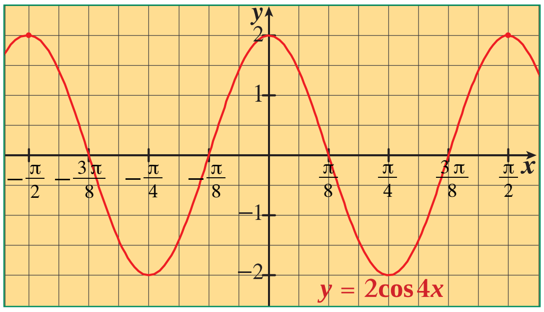
a الدالة $y = 2\cos 4x$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |2| = 2$

الدورة: $\frac{2\pi}{|b|} = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{8}$	$\frac{\pi}{2}$
$4x$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos 4x$	1	0	-1	0	1
$2\cos 4x$	2	0	-2	0	2



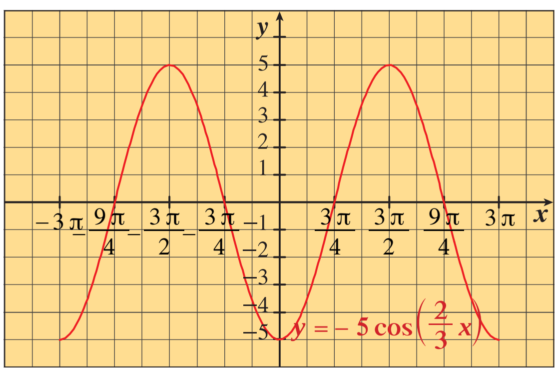
b الدالة $y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$ هي دالة دورية.

السعة: $|a| = |-5| = 5$

الدورة: $\frac{2\pi}{\left|\frac{2}{3}\right|} = \frac{3}{2} \times 2\pi = 3\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{3\pi}{4}$

x	0	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{9\pi}{4}$	3π
$\frac{2x}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
$\cos\left(\frac{2x}{3}\right)$	1	0	-1	0	1
$y = -5\cos\left(\frac{2}{3}x\right)$	-5	0	5	0	-5



حاول أن تحل

4 أوجد السعة والدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a $y = 3\cos 2x$

b $y = -2\cos\left(\frac{3}{4}x\right)\ ,\ 0 \le x \le 2\pi$

ثالثًا: دالة الظل Tangent Function

هي الدالة المثلثية على الصورة $y = \tan x$ وتكتب:

$\tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$: $\cos x \neq 0$

مجالها: $D = \mathbb{R} - \left\{x : x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi \ , \ n \in \mathbb{Z}\right\}$

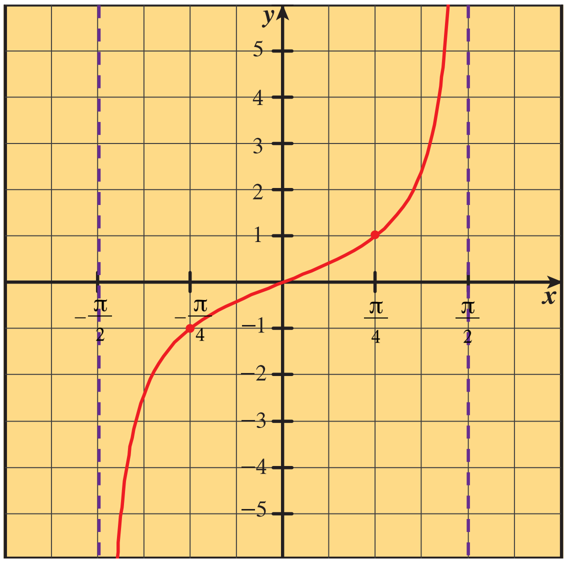
ومداها: $\mathbb{R}$

وهي دالة دورية ذات دورة π

وللحصول على التمثيل البياني لـ: $y = \tan x$

في دورة واحدة $\left(\dfrac{-\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$

نقسم الدورة إلى أرباع كما هو في الجدول التالي:



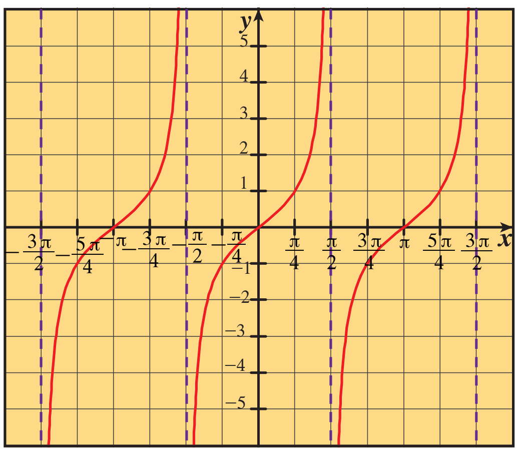
x	$\dfrac{-\pi}{2}$	$\dfrac{-\pi}{4}$	0	$\dfrac{\pi}{4}$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\tan x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

وحيث إنها دالة دورية دورتها π فإنها تكرر قيمتها.

ومن ذلك يمكننا رسم الدالة $y = \tan x$ على مجالها.

من بيان دالة الظل نلاحظ أن دالة الظل:

1. ليس لها سعة.
2. لأي عدد صحيح n فإن $\tan(n\pi) = 0$
3. لأي عدد صحيح n فإن $\tan\left(\dfrac{\pi}{2} + n\pi\right)$ غير معرف.
   وتسمى المستقيمات $x = \dfrac{\pi}{2} + n\pi$ محاذيات رأسية لبيان الدالة $y = \tan x$
4. دالة فردية لأن: $\tan(-x) = -\tan x \ , \ \forall x \in D$
5. منحناها متناظر حول نقطة الأصل.



وبصفة عامة: الدالة $y = a \tan bx$،

دورتها: $\dfrac{\pi}{|b|}$ أي في الفترة $\left(\dfrac{-\pi}{2b} \ , \ \dfrac{\pi}{2b}\right)$ وتكرر منحناها على مجالها.

مثال (5)

أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها.

a) $y = \tan 2x \ , \ x \in \left(\dfrac{-\pi}{4} \ , \ \dfrac{3\pi}{4}\right)$

b) $y = 2\tan\left(\dfrac{1}{2}x\right)$

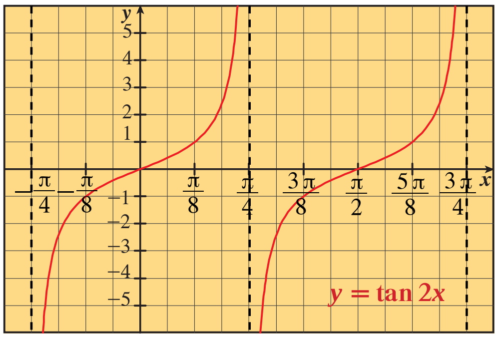
الحل:

a) الدالة $y = \tan 2x$ هي دالة دورية.

الدورة: $\dfrac{\pi}{|b|} = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{8}$

x	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{4}$
$2x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$y = \tan 2x$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف

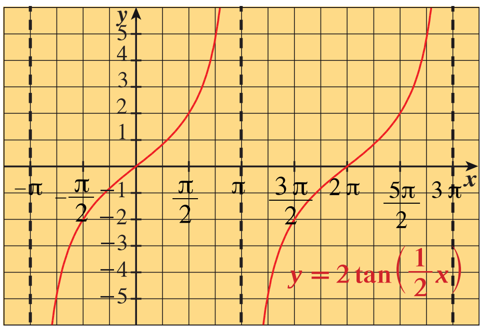


b الدالة $y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$ هي دالة دورية.

الدورة: $\frac{\pi}{|b|} = \frac{\pi}{\frac{1}{2}} = 2\pi$

$\therefore$ ربع الدورة $= \frac{\pi}{2}$

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\frac{1}{2}x$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-1	0	1	غير معرف
$y = 2\tan\left(\frac{1}{2}x\right)$	غير معرف	-2	0	2	غير معرف



حاول أن تحل

5 أوجد الدورة لكل دالة مما يلي ثم ارسم بيانها:

a $y = -\tan x$

b $y = \frac{1}{2}\tan x$

خصائص الدوال المثلثية باعتبار $n \in \mathbb{Z}$

الخاصية	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
الدورة	2π	2π	π
المجال	$(-\infty , \infty)$	$(-\infty , \infty)$	$\mathbb{R} - \left\{x , x = \frac{\pi}{2} + n\pi\right\}$
المدى	$[-1 , 1]$	$[-1 , 1]$	$(-\infty , \infty)$
الأصفار	$x = n\pi$	$x = \frac{\pi}{2} + n\pi$	$x = n\pi$
زوجية أو فردية	فردية	زوجية	فردية

8–2

التحويلات الهندسية للدوال الجيبية

Geometric Transformations of Sinusoid Functions

سوف تتعلم

- التحويلات على الدوال الجيبية.
- خصائص الدوال الجيبية.

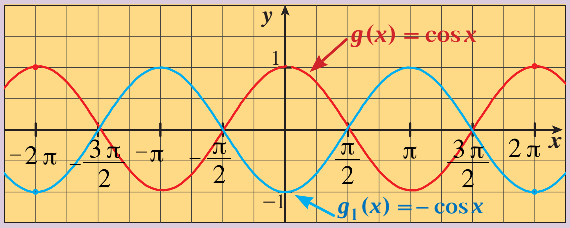
المفردات والمصطلحات:

- تحويلات هندسية Geometric Transformations
- تمدد Stretch
- انكماش Shrink
- سعة Amplitude
- دورة Period
- إزاحة Translation
- انعكاس Reflection
- إزاحة أفقية Horizontal Translation

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت أن الدالتان الجيبيّتان: $f(x) = \sin x$ ، $g(x) = \cos x$ هما دالتان دوريتان وأن دورة كل دالة منهما هي: 2π

أوّلًا: يبيّن الشكل (1) التمثيل البياني للدالتين g ، g_1 حيث $g(x) = \cos x$ ، $g_1(x) = -\cos x$



شكل (1)

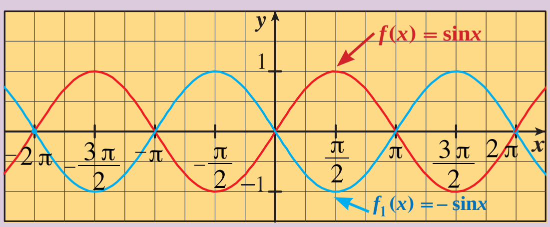
أكمل:

a التمثيل البياني للدالة g_2 حيث $g_2(x) = \cos(-x)$ ينطبق على التمثيل البياني للدالة ....

b التمثيل البياني للدالة g_1 حيث $g_1(x) = -\cos x$ هو .... للتمثيل البياني للدالة g حيث $g(x) = \cos x$ في المحور ....

c التمثيل البياني للدالة g_2 حيث $g_2(x) = \cos(-x)$ هو .... للتمثيل البياني للدالة g حيث $g(x) = \cos x$ في المحور ....

ثانيًا: يبيّن الشكل (2) التمثيل البياني للدالتين f ، f_1 حيث $f(x) = \sin x$ ، $f_1(x) = -\sin x$



شكل (2)

a التمثيل البياني للدالة f_2 حيث $f_2(x) = \sin(-x)$ ينطبق على التمثيل البياني للدالة ....

b التمثيل البياني للدالة f_1 حيث $f_1(x) = -\sin x$ هو .... للتمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sin x$ في المحور ....

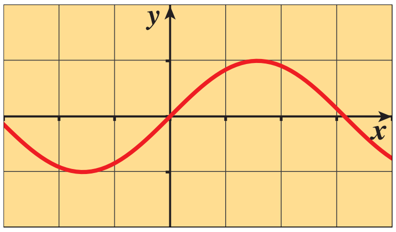
c التمثيل البياني للدالة f_2 حيث $f_2(x) = \sin(-x)$ هو .... للتمثيل البياني للدالة f حيث $f(x) = \sin x$ في المحور ....

Horizontal Translation
الإزاحة الأفقية

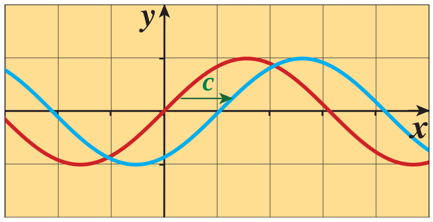
بيان الدالة $y = f(x - c)$ ينتج من **إزاحة أفقية** لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار c

إذا كان c موجبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليمين.

إذا كان c سالبًا فإن الإزاحة تكون جهة اليسار.

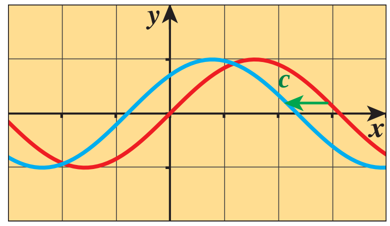


$y = f(x)$



$y = f(x - c)$

$c > 0$



$y = f(x - c)$

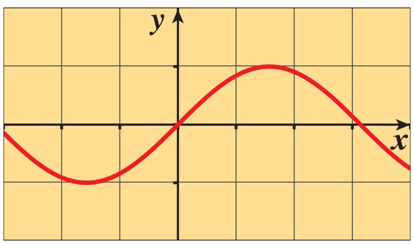
$c < 0$

Vertical Translation
الإزاحة الرأسية

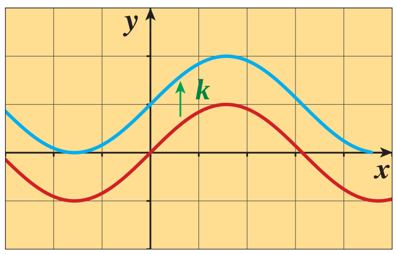
بيان الدالة $y = f(x) + k$ ينتج من **إزاحة رأسية** لبيان الدالة $y = f(x)$ بمقدار k

إذا كان k موجبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأعلى.

إذا كان k سالبًا فإن الإزاحة تكون إلى الأسفل.

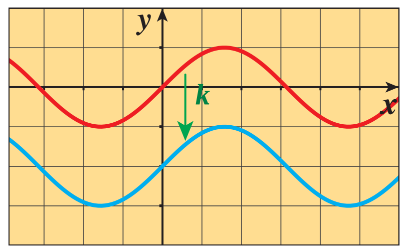


$y = f(x)$



$y = f(x) + k$

$k > 0$



$y = f(x) + k$

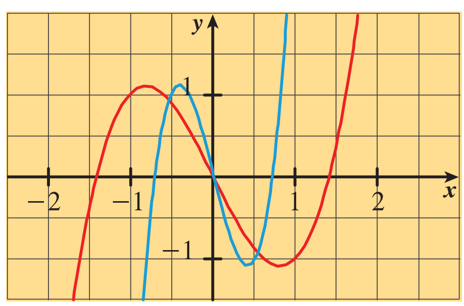
$k < 0$

Horizontal Stretch or Shrink
التمدد / الانكماش الأفقي

ليكن b عددًا موجبًا.

بيان الدالة $y = f(bx)$ ينتج من انكماش / تمدد أفقي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $b > 1$: انكماش بمعامل $\frac{1}{b}$

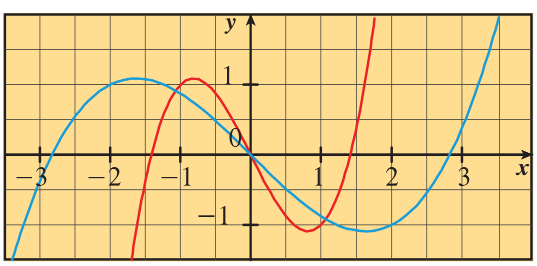


$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = f(2x) = (2x)^3 - 2(2x)$

انكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

إذا كان $b < 1$: تمدد بمعامل $\frac{1}{b}$



$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = f(0.5x) = (0.5x)^3 - 2(0.5)x$

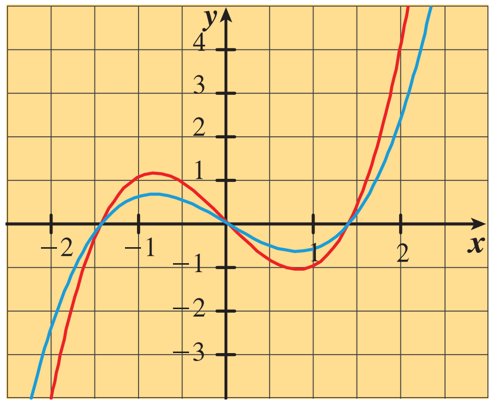
تمدد أفقي بمعامل $\frac{1}{0.5}$

التمدد/الانكماش الرأسي Vertical Stretch or Shrink

ليكن a عددًا موجبًا $a \neq 0$

بيان الدالة $y = af(x)$ ينتج من انكماش/تمدد رأسي لبيان الدالة $y = f(x)$

إذا كان $|a| < 1$: انكماش بمعامل $|a|$

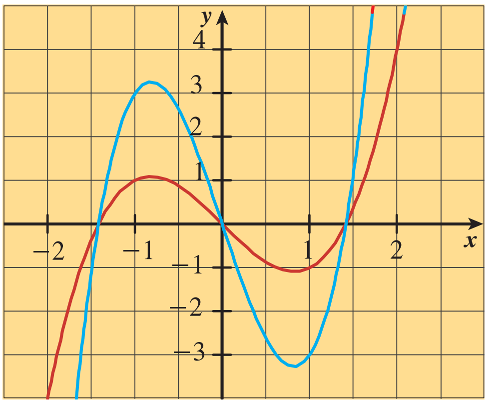


$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = 0.6f(x) = 0.6x^3 - 1.2x$

انكماش رأسي بمعامل 0.6

إذا كان $|a| > 1$: تمدد بمعامل $|a|$



$y = f(x) = x^3 - 2x$

$y = 3f(x) = 3x^3 - 6x$

تمدد رأسي بمعامل 3

تطبيق التحويلات على الدوال الجيبية Applying Transformations to Sinusoids

يمكن أن تطبق التحويلات السابقة على أي دالة بما في ذلك الدوال المثلثية.

والتمثيلات البيانية التي نحصل عليها من تطبيق هذه التحويلات على دالتي الجيب وجيب التمام هي دوال جيبية.

تكون الدالة جيبية إذا أمكن كتابتها على الشكل التالي:

$$f(x) = a\sin(bx - h) + k$$

أو $$f(x) = a\cos(bx - h) + k$$

حيث a, b, h, k ثوابت $b \neq 0$, $a \neq 0$

سوف نرى في مثال لاحق أن $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ،

لذلك فإن رسم دالة جيب التمام هو نفسه رسم دالة الجيب بعد إزاحتها إلى اليسار بمقدار $\frac{\pi}{2}$ وحدة.

بسبب هذه العلاقة يمكن أن نعيد كتابة كل الدوال الجيبية على الصورة:

$$f(x) = a\sin(bx - h) + k$$

التمدد/الانكماش الرأسي وسعة الدالة الجيبية

Vertical Stretch/Shrink and the Amplitude of a Sinusoid

عند تطبيق التمدد الرأسي أو الانكماش الرأسي على دالة جيبية، فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **السعة** حيث:

سعة الدالة $f(x) = a\sin(bx - h) + k$ أو $f(x) = a\cos(bx - h) + k$ هي $|a|$.

مثال (1)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \cos x$, $y_2 = -2\cos x$.

الحل:

سعة الدالة y_2، هي: $|a| = |-2| = 2$

$\because |a| > 1$

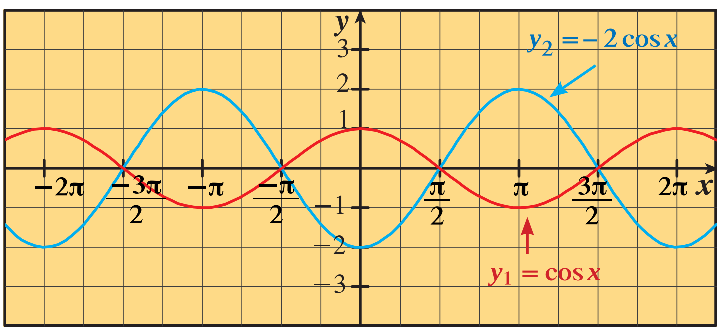
$\therefore$ التمثيل البياني للدالة: $y_2 = -2\cos x$ هو تمدد رأسي لمنحنى الدالة $y_1 = \cos x$ بمعامل 2،

$\because$ a سالبة $\therefore$ يوجد انعكاس في محور السينات.

حاول أن تحل

1 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \sin x$, $y_2 = \frac{1}{3}\sin x$.

ملاحظة: الشكل أدناه يمثل بيان الدالة في مثال (1).



التمدد/الانكماش الأفقي ودورة الدالة

Horizontal Stretch/Shrink and the Period

عند تطبيق التمدد الأفقي أو الانكماش الأفقي على دالة جيبية فإن خاصية الدالة التي تتغير تسمى **دورة الدالة** حيث:

دورة كلّ من: $y = a\cos(bx)$ ، $y = a\sin(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

فمثلًا، التمثيل البياني للدالة: $y_2 = \sin 2x$، هو انكماش أفقي للتمثيل البياني للدالة: $y_1 = \sin x$ بمعامل: $\frac{1}{|b|} = \frac{1}{2}$

تذكر:

سعة الدالة = $\frac{\text{القيمة العظمى} - \text{القيمة الصغرى}}{2}$

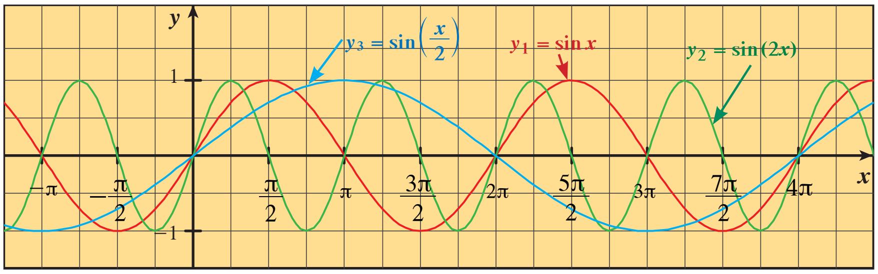
$= \frac{\max f - \min f}{2}$

معلومة:

انعكاس بيان $f(x)$ في محور الصادات هو بيان $f(-x)$

وانعكاس بيان $f(x)$ في محور السينات هو بيان $-f(x)$

وهذا بدوره يؤدي إلى انكماش لدورة الدالة بمعامل $\left(\frac{1}{2}\right)$، أي من 2π إلى π. والتمثيل البياني $y_3 = \sin\left(\frac{x}{2}\right)$ هو تمدد أفقي للتمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin x$ بمعامل: $2 = \frac{1}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{|b|}$



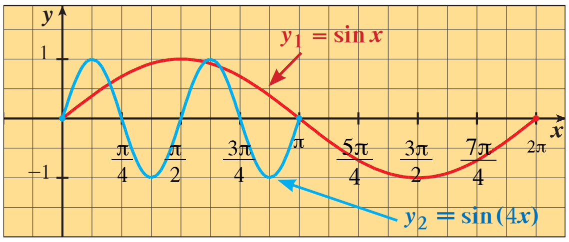
وهذا بدوره يمد دورة الدالة بمعامل 2 أي من 2π إلى 4π

مثال (2)

صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من:

$y_1 = \sin x$ ، $y_2 = \sin 4x$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2 = \sin 4x$



الحل:

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة: $y_2 = \sin 4x$ من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin x$، وذلك بانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{4}$

حاول أن تحل

2 صف العلاقة بين التمثيلين البيانيين لكل من: $y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \cos\left(\frac{x}{2}\right)$

ارسم دورتين من الدالة: $y_2 = \cos\frac{x}{2}$

مثال (3)

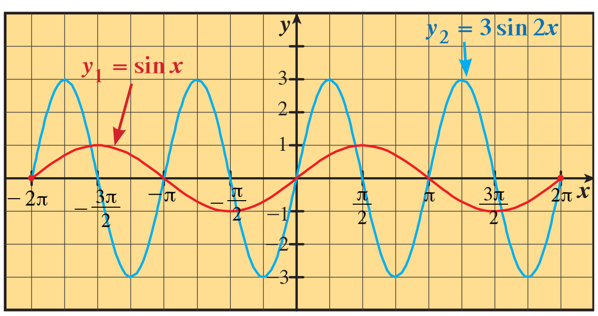
صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \sin x \ , \ y_2 = 3\sin 2x$

الحل: يمكن الحصول على التمثيل البياني لـ $y_2 = 3\sin 2x$ من التمثيل البياني لـ $y_1 = \sin x$، بتمدد رأسي بمعامل 3 وانكماش أفقي بمعامل $\frac{1}{2}$

حاول أن تحل

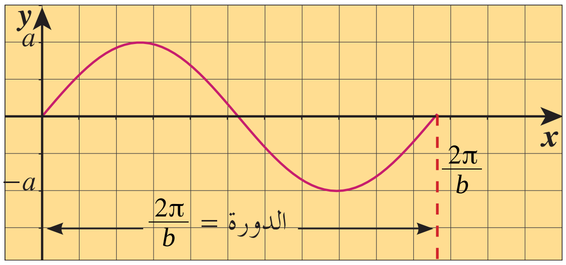
3 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_1 = \cos x \ , \ y_2 = 2\cos\left(-\frac{1}{3}x\right)$

ملاحظة: الشكل المقابل يوضح بيان الدوال في مثال (3).



Horizontal Translation

الإزاحة الأفقية



في دراستنا لدالة الجيب $y = a\sin bx$،

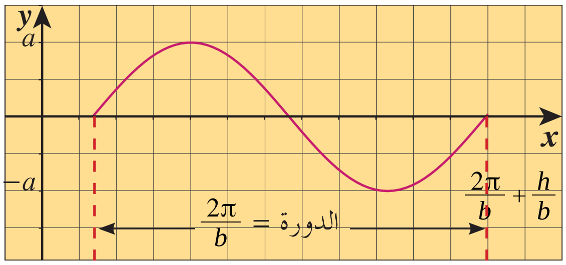
تبيّن لنا أن السعة: $|a|$ والدورة: $\frac{2\pi}{|b|}$

رسمت في الشكل المقابل دورة واحدة لبيان هذه الدالة

عندما $b > 0$، حيث تتغير x من 0 إلى $\frac{2\pi}{b}$ أو تتغير bx من 0 إلى 2π

سنناقش الآن بيان الدالة:

$$y = a\sin(bx - h) \implies y = a\sin\left(b\left(x - \frac{h}{b}\right)\right) \ , \ \alpha, h \in \mathbb{R}^* \ , \ b > 0$$



سيكون هذا البيان بيان دالة جيبية، السعة: $|a|$

بما أن $(bx - h)$ تتغير من 0 إلى 2π، سنرسم دورة واحدة.

تبدأ هذه الدورة عندما: $x = \frac{h}{b}$ ، $bx - h = 0$ وتنتهي عندما:

$x = \frac{2\pi}{b} + \frac{h}{b}$ ، $bx - h = 2\pi$ (انظر الشكل المقابل).

نرى أن بيان $y = a\sin(bx - h)$

ينتج من إزاحة أفقية لبيان $y = a\sin bx$، بمقدار $\frac{h}{b}$ إلى جهة اليمين عندما $h > 0$، وإلى جهة اليسار عندما $h < 0$

وبالمثل لبيان الدالة: $y = a\cos(bx - h)$

مثال (4)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

a) $y_1 = \sin x \ , \ y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

b) $y_1 = \cos 2x \ , \ y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

الحل:

a) $y_1 = \sin x, \ y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

$\because \ h = \frac{\pi}{3}$

$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2 = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right)$

من التمثيل البياني للدالة $y_1 = \sin x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{3}$ لجهة اليمين.

b) $y_1 = \cos 2x \ , \ y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$

$$y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$$
$$= \cos\left(2\left(x + \frac{\pi}{8}\right)\right)$$
$$= \cos\left(2\left(x - \left(\frac{-\pi}{8}\right)\right)\right)$$

يمكن الحصول على التمثيل البياني لِـ $y_2 = \cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right)$ من التمثيل البياني لِـ $y_1 = \cos 2x$ بإزاحة أفقية مقدارها $\frac{\pi}{8}$ لجهة اليسار.

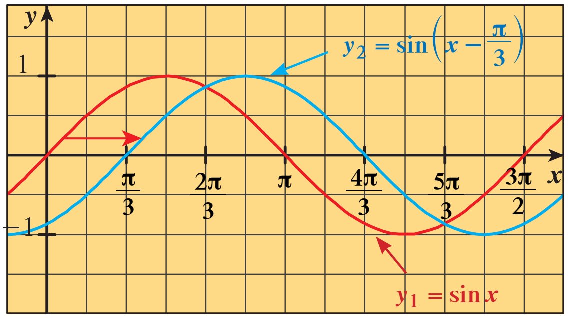
حاول أن تحل

4 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين:

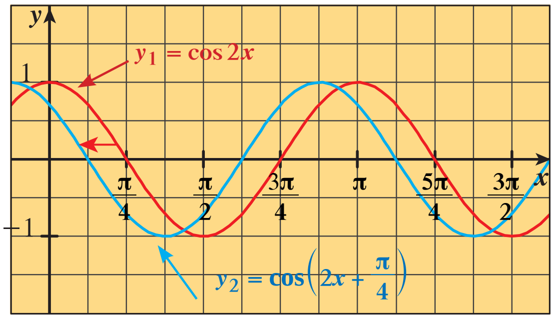
b $y_1 = \sin 3x \ , \ y_2 = \sin(3x - 7)$

a $y_1 = \cos x \ , \ y_2 = \cos\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

ملاحظة: الشكل (1) والشكل (2) يوضحان بيان الدوال في مثال (4) السابق.



شكل (1)



شكل (2)

مثال توضيحي

بيّن أن التمثيل البياني للدالة:

a $y_2 = \cos x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1 = \sin x$ بمقدار $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ أي أن $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

b $y_2 = \sin x$ هو إزاحة أفقية للتمثيل البياني لِـ $y_1 = \cos x$ بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أي أن $\sin x = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

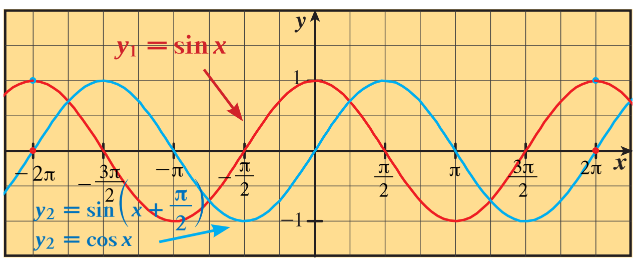
الحل:

a التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:

$y_1 = \sin x$، بمقدار $-\frac{\pi}{2}$ أفقيًّا

أي مسافة $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليسار. (انظر الشكل).



التمثيلات البيانية لكل من $\cos x$، $\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$, $\sin x$ لها الشكل نفسه.

نلاحظ أن بيان $y_2 = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2 = \cos x$.

$$\therefore \ \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$

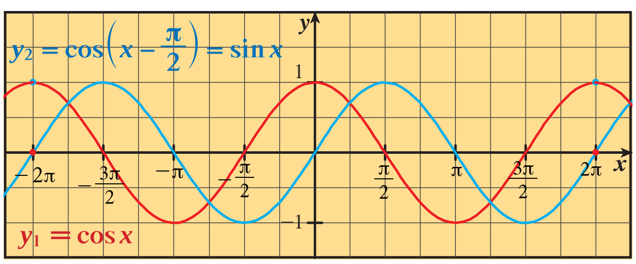
b التمثيل البياني لمنحنى الدالة $y_2 = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$

ينتج عن إزاحة أفقية لمنحنى الدالة:

$y_1 = \cos x$، بمقدار $\frac{\pi}{2}$ أفقيًّا

أي $\frac{\pi}{2}$ وحدة جهة اليمين.

(انظر الشكل).



التمثيلات البيانية لكل من $\sin x$, $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$, $\cos x$ لها الشكل نفسه.

نلاحظ أن بيان $y_2=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ ينطبق مع بيان $y_2=\sin x$

$\therefore\ \sin x=\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$

المثال التوضيحي السابق يفسر صحة المتطابقات التي سبق دراستها وهي:

لكل قيم x يكون التالي صحيحًا:

3 $\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ 2 $\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$ 1 $\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sin x$

6 $\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ 5 $\sin(x\pm 2\pi)=\sin x$ 4 $\cos(x\pm 2\pi)=\cos x$

الإزاحة الرأسية

بيان الدالة $y=a\sin(bx-h)+k$ ينتج عن إزاحة رأسية لبيان الدالة $y=a\sin(bx-h)$ بمقدار k (إلى أعلى إذا كانت k موجبة، وإلى أسفل إذا كانت k سالبة).

مثال (5)

صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=3\cos x-2$, $y_1=3\cos x$

الحل:

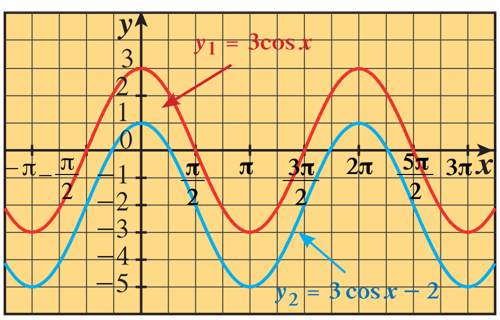
حيث إن $k=-2$

$\therefore$ يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة $y_2=3\cos x-2$ من التمثيل البياني للدالة $y_1=3\cos x$ بإزاحة رأسية بمقدار 2 إلى الأسفل.

حاول أن تحل

5 صف العلاقة بين التمثيل البياني لكل من الدالتين: $y_2=\frac{3}{4}\sin x+2$, $y_1=\frac{3}{4}\sin x$

ملاحظة: الشكل أدناه يوضّح بيان الدوال في مثال (5).



ويمكننا التعبير عن الإزاحة الرأسية بالصورة التالية: $k=\dfrac{\max f+\min f}{2}$

ملخص التحويلات على الدوال الجيبية
Transformations Sinusoid Functions

التحويل	بالتطبيق على $y=\cos x$	بالتطبيق على $y=\sin x$
التمدد الرأسي/الانكماش (السعة)	$y=a\cos x$	$y=a\sin x$
التمدد الأفقي/الانكماش (الدورة)	$y=\cos bx$	$y=\sin bx$
الإزاحة الأفقية	$y=\cos(x-h)$	$y=\sin(x-h)$
الإزاحة الرأسية	$y=\cos x+k$	$y=\sin x+k$
الانعكاس في محور السينات	$y=-\cos x$	$y=-\sin x$
الانعكاس في محور الصادات	$y=\cos(-x)=\cos x$	$y=\sin(-x)=-\sin x$

ملاحظة:
تساعد التحويلات في الدوال المثلثية على فهم التغير في بعض الحالات الفيزيائية مثل قوة التيار الكهربائي المتردد وغيرها.

مثال (6)

وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التحويلات للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$ ثم أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

a $f(x)=3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1$

b $g(x)=\sin(2-x)+4$

الحل:

a $f(x)=3\cos\left(\frac{x}{2}-\frac{\pi}{6}\right)+1 \implies f(x)=3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$

بالمقارنة مع $y=a\cos\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right)+k$،

نجد أن: $a=3\ ,\ b=\frac{1}{2}\ ,\ \frac{h}{b}=\frac{\pi}{3}\ ,\ k=1$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة f من التمثيل البياني لدالة $\cos x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب التالي:

أولًا: تمدد أفقي بمعامل: $\frac{1}{|b|}=\frac{1}{\frac{1}{2}}=2$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$

ثانيًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{\pi}{3}$ للحصول على $\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

ثالثًا: تمدد رأسي بمعامل: $|a|=|3|=3$ للحصول على $3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)$

رابعًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار: $k=1$ للحصول على:

$$f(x)=3\cos\left(\frac{1}{2}\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\right)+1$$

وتكون السعة: $|a|=|3|=3$

دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{\left|\frac{1}{2}\right|}=4\pi$

b $g(x)=\sin(2-x)+4 \implies g(x)=\sin(-(x-2))+4$

$$\implies g(x)=-\sin(x-2)+4$$

بالمقارنة مع: $y=a\sin\left(b\left(x-\frac{h}{b}\right)\right)+k$،

نجد أن: $a=-1\ ,\ b=1\ ,\ \frac{h}{b}=2\ ,\ k=4$

يمكن الحصول على التمثيل البياني للدالة g من التمثيل البياني للدالة $\sin x$ عن طريق تطبيق التحويلات التالية بحسب الترتيب الآتي:

أولًا: إزاحة أفقية إلى اليمين بمقدار $\frac{h}{b}=2$ للحصول على $\sin(x-2)$

ثانيًا: انعكاس في محور السينات للحصول على $-\sin(x-2)$

ثالثًا: إزاحة رأسية إلى الأعلى بمقدار $k=4$ للحصول على:

$$g(x)=-\sin(x-2)+4$$

وتكون السعة: $|a|=|-1|=1$ ، دورة الدالة: $\frac{2\pi}{|b|}=\frac{2\pi}{1}=2\pi$

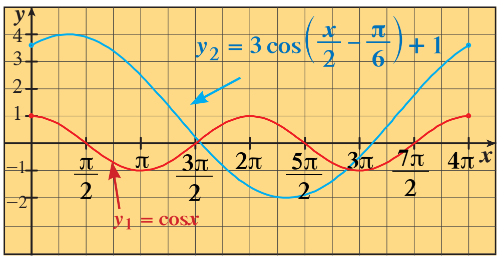
حاول أن تحل

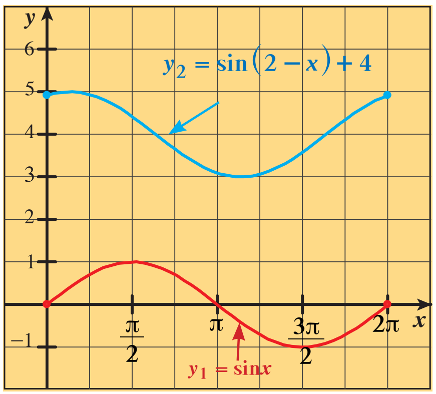
6 وضّح كيف يمكن الحصول على التمثيل البياني لكل من الدالتين التاليتين عن طريق التمثيلات البيانية للدوال المثلثية: $\sin x$ أو $\cos x$. أوجد أيضًا سعة كل دالة ودورتها.

a $y=\cos(1-x)+2$

b $y=2\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{\pi}{4}\right)-1$

والشكلان فيما يلي يوضحان الدوال من مثال (6).



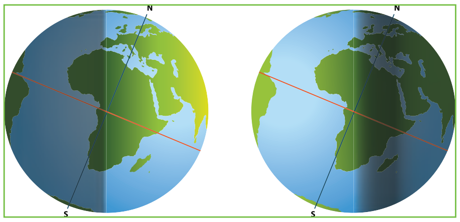


مثال (7) **تطبيق حياتي إثرائي**

تبيّن الدراسات أن في إحدى المدن، يبلغ معدل الساعات حيث الشمس مشرقة خلال الانقلاب الصيفي 15.283 وخلال الانقلاب الشتوي 9.067

a أوجد دالة جيبية على الصورة $f(x)=a\sin(bx-h)+k$ تنمذج هذه البيانات.

b استخدم هذه الدالة لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في هذه المدينة في أول أبريل أي في اليوم 91 من العام.



معلومة:
يحدث الانقلاب الصيفي في نصف الكرة الشمالي في 21 يونيو وفي هذا اليوم يكون أطول نهار وأقصر ليل.
ويحدث الانقلاب الشتوي في نصف الكرة الشمالي في 21 ديسمبر حيث يكون أقصر نهار وأطول ليل.

الحل:

a الخطوة 1:

السعة:

$$a = \frac{1}{2}(\max f - \min f)$$

$$= \frac{15.283 - 9.067}{2} = 3.108$$

الخطوة 2:

الإزاحة الرأسية:

$$k = \frac{\max f + \min f}{2} = 12.175$$

الخطوة 3:

تتكرر البيانات كل 365 يومًا

$$\because \ T = 365 \ , \ T = \frac{2\pi}{b}$$

$$\therefore \ \frac{2\pi}{b} = 365 \implies b = \frac{2\pi}{365}$$

ومنه نحصل على:

$$f(x) = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365}x - h\right) + 12.175 \quad (1)$$

الخطوة 4:

لإيجاد الإزاحة الأفقية نحل المعادلة (1) في h بالتعويض عن $f(x)$ بـ 9.067 وعن x بـ 355 (يقع الانقلاب الشتوي في 21 ديسمبر أي في اليوم 355 من العام).

$$9.067 = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right) + 12.175$$

اطرح 12.175 من طرفي المعادلة

$$-3.108 = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right)$$

اقسم طرفي المعادلة على 3.108

$$-1 = \sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 355 - h\right)$$

$\sin\theta = -1 \ : \ \theta = -\frac{\pi}{2}$

$$\frac{2\pi}{365} \times 355 - h = -\frac{\pi}{2}$$

حل في h

$$h = \frac{357}{146}\pi$$

$\therefore$ معادلة الدالة هي:

$$f(x) = 3.108 \sin\left(\frac{2\pi}{365}x - \frac{357}{146}\pi\right) + 12.175 \quad (2)$$

b لتوقع عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل نعوّض عن x بـ 91 في المعادلة (2) فنحصل على:

$$f(91) = 3.108\sin\left(\frac{2\pi}{365} \times 91 - \frac{357}{146}\pi\right) + 12.175$$

$$f(91) \approx 12.69$$

يتوقع أن يكون عدد الساعات حيث الشمس مشرقة في 1 أبريل في هذه المدينة حوالى 12.69

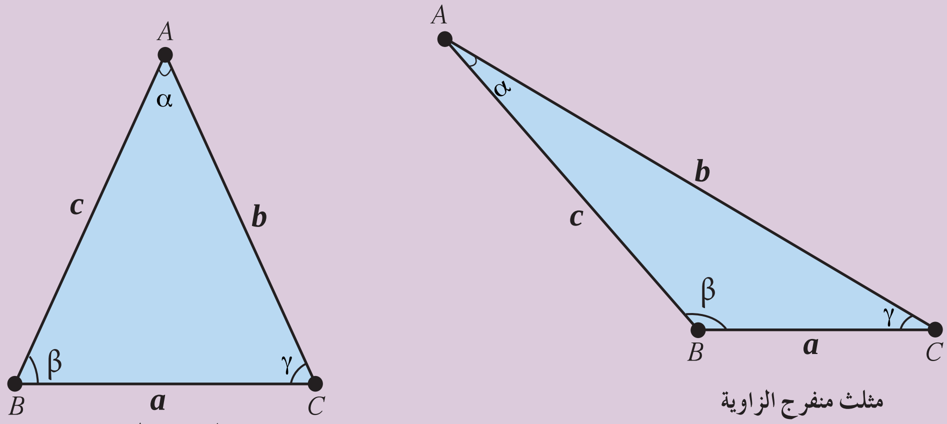
8–3

قانون الجيب

Law of Sine

دعنا نفكر ونتناقش

في هذا الدرس نستخدم الرموز α, β, γ للتعبير عن قياسات زوايا المثلث ABC على الترتيب، وكذلك a, b, c لأطوال الأضلاع المقابلة لهذه الزوايا. على الترتيب أيضًا ونشير أيضًا إلى رؤوس المثلث بالرموز A, B, C



مثلث حاد الزوايا   مثلث منفرج الزاوية

حل مثلث تعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث أيضًا، ثم معرفة عدد المثلثات الموجودة. ولتأمين ذلك علينا معرفة طول ضلع واحد في المثلث على الأقل، لأن معرفة قياسات الزوايا الثلاث فقط تعطينا «عائلة» من المثلثات المتشابهة. أي أن لها الشكل نفسه لكن بأطوال أضلاع مختلفة.

قانون الجيب Law of Sine

ينص قانون الجيب على أنه بالنسبة لكل زاوية من زوايا المثلث تكون النسبة بين جيب الزاوية وطول الضلع المقابل لها هي نسبة ثابتة، أي أن جيوب زوايا المثلث تتناسب مع أطوال الأضلاع المقابلة لها.

قانون الجيب

في أي مثلث ABC :

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

البرهان:

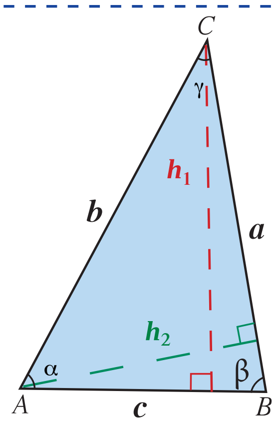
في الشكل (1) أو الشكل (2)

في المثلث ABC، نرسم العمود النازل من رأس المثلث C

وليكن h_1 طول هذا العمود.

$$\therefore\ \sin\beta = \frac{h_1}{a} \implies h_1 = a\sin\beta\ ,$$

$$\sin\alpha = \frac{h_1}{b} \implies h_1 = b\sin\alpha$$



شكل (1)

سوف تتعلم

- قانون الجيب.
- استخدام قانون الجيب لحل المثلث.
- تحديد عدد المثلثات والحالة الغامضة.

المفردات والمصطلحات:

- قانون الجيب Law of Sine
- الحالة الغامضة Ambiguous Case
- حل المثلث Solving Triangle

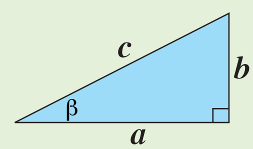
معلومة:

الرمز α يقرأ ألفا.

الرمز β يقرأ بيتا.

الرمز γ يقرأ جاما.

تذكر:



$\sin\beta = \frac{b}{c}$

$\cos\beta = \frac{a}{c}$

$\tan\beta = \frac{b}{a}$

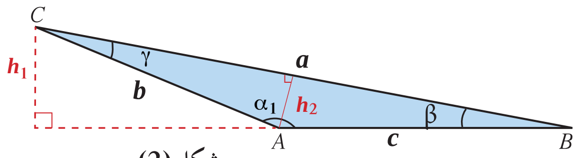
تذكر:

$\sin(180^\circ - \alpha) = \sin\alpha$

نستنتج مما سبق أن:

$$a\sin\beta = b\sin\alpha$$

ومنه:
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} \quad (1)$$



شكل (2)

نرسم الآن العمود النازل من A وليكن h_2 طول هذا العمود

$$\therefore\ \sin\beta = \frac{h_2}{c} \Longrightarrow h_2 = c\sin\beta$$

$$\sin\gamma = \frac{h_2}{b} \Longrightarrow h_2 = b\sin\gamma$$

ونستنتج مما سبق أن: $c\sin\beta = b\sin\gamma$

ومنه:
$$\frac{\sin\gamma}{c} = \frac{\sin\beta}{b} \quad (2)$$

المعادلتان (1), (2) تعطيان:

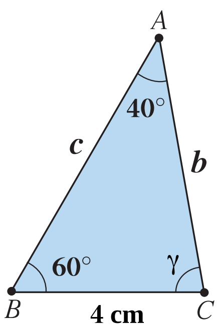
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

استخدام قانون الجيب — Using the Law of Sine

يسمح قانون الجيب بحل مثلث إذا علم طول ضلع وقياس زاويتين.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $a = 4$ cm



الحل:

يبيّن الشكل المقابل المثلث المطلوب حله.

يجب إيجاد: γ , b , c

مجموع زوايا المثلث 180°

$$\gamma = 180^\circ - (40^\circ + 60^\circ) = 80^\circ$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{4} = \frac{\sin 60^\circ}{b} = \frac{\sin 80^\circ}{c}$$

$$b = \frac{4\times\sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} \Longrightarrow b \approx 5.389$$

$$c = \frac{4\times\sin 80^\circ}{\sin 40^\circ} \Longrightarrow c \approx 6.128$$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $\alpha = 36^\circ$, $\beta = 48^\circ$, $a = 8$ cm

معلومة إثرائية:

الحالة الغامضة The Ambiguous Case

الحالة الغامضة هي الحالة التي يكون معلوم فيها طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

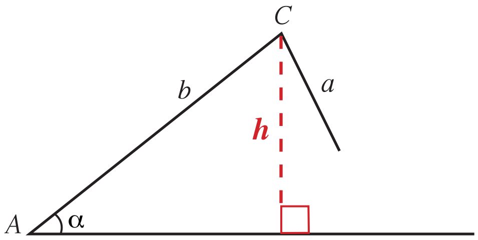
لأن البيانات المعروفة قد تعطي صفر مثلث أو مثلث واحد أو مثلثين.

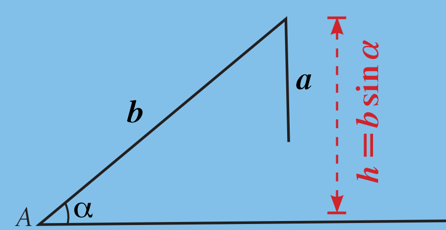
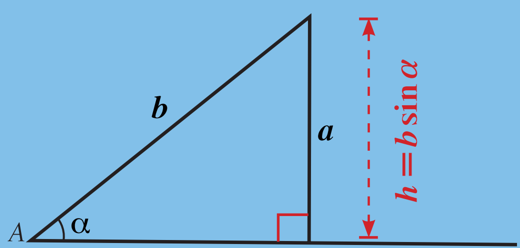
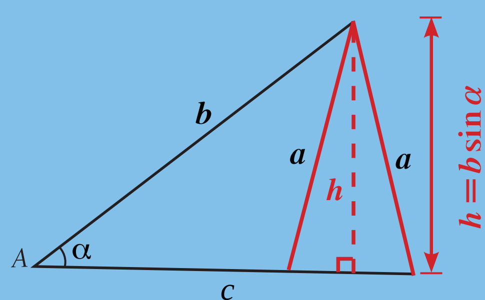
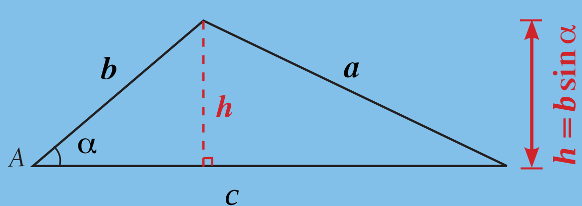
لنفرض أن الأجزاء المعلومة هي: a, b, α

كما هو مبين في الشكل المقابل.

يكمن الحل في معرفة الارتفاع h،

ومنه $h = b\sin\alpha$ وربطه بالأجزاء المعروفة.



لا يوجد مثلث	يوجد مثلث واحد قائم
إذا كان $h = b\sin\alpha$ و كان $a < h$، يكون طول الضلع a غير كاف لتكوين مثلث. 	إذا كان $h = b\sin\alpha$ و كان $a = h$ طول الضلع a يكفي لتكوين مثلث قائم. 
يوجد مثلثان	**يوجد مثلث واحد**
إذا كان $h < a < b$ يمكن تكوين مثلثين مختلفين. 	إذا كان $a \geq b$ يمكن تكوين مثلث واحد. 

كما ذكرنا يسمح قانون الجيب بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المقابلة لأحدهما.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 3\text{ cm}\ ,\ b = 2\text{ cm}\ ,\ \alpha = 40^\circ$

الحل:

نستخدم قانون الجيب لإيجاد β

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

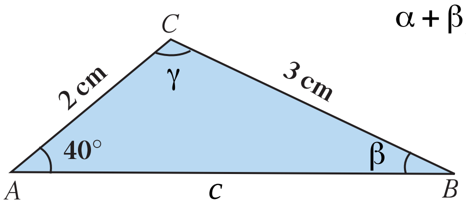
$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin\beta}{2}$$

$$\sin\beta = \frac{2\times\sin 40^\circ}{3} \implies \sin\beta \approx 0.43$$

توجد زاويتان β، $0^\circ < \beta < 180^\circ$ تحققان $\sin\beta = 0.43$

$\beta_2 \approx 154.6^\circ$ أو $\beta_1 \approx 25.4^\circ$

الحالة $\beta_2 \approx 154.6^\circ$ مرفوضة، لأن $\alpha + \beta_2 \approx 194.6^\circ$ وهو أكبر من 180°



باستخدام $\beta_1 \approx 25.4^\circ$ نحصل على:

$$\gamma = 180^\circ - \alpha - \beta_1$$
$$\approx 180^\circ - 40^\circ - 25.4^\circ$$
$$\gamma \approx 114.6^\circ$$

يمكن الآن معرفة طول الضلع الثالث c

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 40^\circ}{3} = \frac{\sin 114.6^\circ}{c}$$

$$c = \frac{3\sin 114.6^\circ}{\sin 40^\circ}$$

$$c \approx 4.24\text{ cm}$$

حاول أن تحل

2 حل ΔABC حيث: $a = 7\text{ cm}\ ,\ b = 6\text{ cm}\ ,\ \alpha = 26.3^\circ$

معلومة:

إذا كانت $\sin\alpha > 0$ فإن α تقع في الربع الأول وتكون حادة أو تقع في الربع الثاني وتكون منفرجة.

مثال (3)

حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}$, $b = 8\text{ cm}$, $\alpha = 30^\circ$

الحل:

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b}$$

عوّض

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin\beta}{8}$$

$$\sin\beta = \frac{8\times\sin 30^\circ}{5} \Rightarrow \sin\beta = 0.8\ ,\ \sin\beta > 0$$

$$\therefore\ \beta_1 \approx 53.13^\circ\ ;\ \beta_2 \approx 180^\circ - 53.13^\circ \approx 126.87^\circ$$

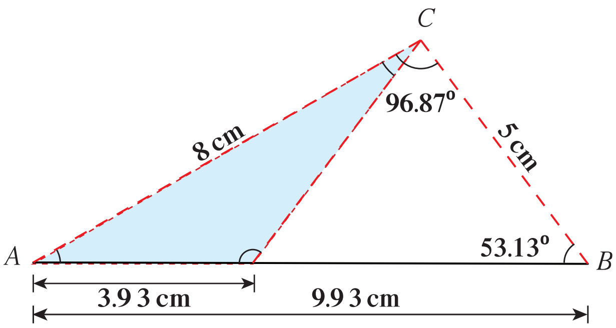
$$\alpha + \beta_1 \approx 30^\circ + 53.13^\circ \approx 83.13^\circ$$

$$\alpha + \beta_2 \approx 30^\circ + 126.87^\circ \approx 156.87^\circ$$

$\therefore$ لكل من قيمتي β نحصل على: $\alpha + \beta < 180^\circ$

$\therefore$ يوجد مثلثان يحققان المعطى.

كذلك يوجد قياسان للزاوية γ



$$\gamma_1 = 180 - (\alpha + \beta)$$

$$\gamma_1 \approx 180^\circ - 83.13^\circ$$

$$\approx 96.87^\circ$$

$$\gamma_2 = 180 - 156\cdot 87^\circ \approx 23.13^\circ$$

يبقى إيجاد c

في المثلث الثاني

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_2}{c_2}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 23.13^\circ}{c_2}$$

$$c_2 = \frac{5\times\sin 23.13^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$c_2 \approx 3.93\text{ cm}$$

في المثلث الأوّل

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\gamma_1}{c_1}$$

$$\frac{\sin 30^\circ}{5} = \frac{\sin 96.87^\circ}{c_1}$$

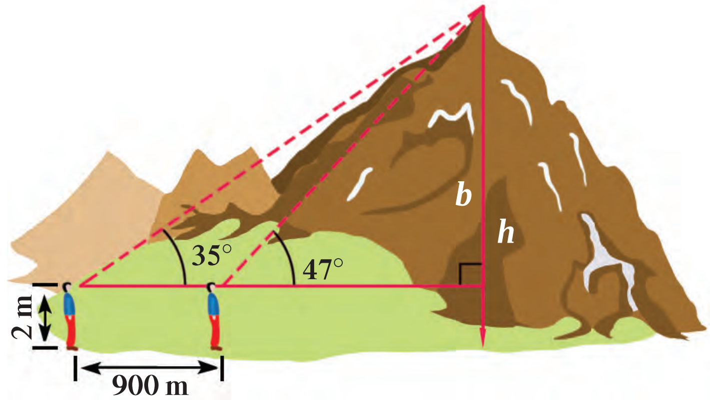
$$c_1 = \frac{5\times\sin 96.87^\circ}{\sin 30^\circ}$$

$$c_1 \approx 9.93\text{ cm}$$

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}$, $b = 7\text{ cm}$, $\alpha = 45^\circ$

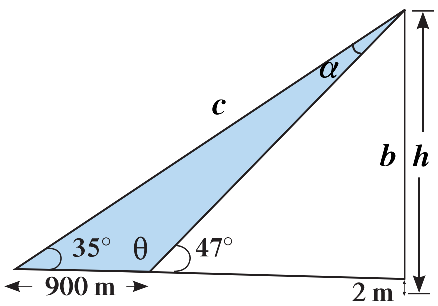
مثال (4) تطبيقات حياتية



لمعرفة ارتفاع جبل، قام طوبوغرافي بأخذ قياسين للذروة من نقطتين تبعدان 900 m عن بعضهما بعضًا حيث بلغ قياس كل من الزاويتين 47° ، 35°

إذا كان ارتفاع مستوى النظر الأفقي عن سطح الأرض 2 m، فما ارتفاع الجبل؟

الحل:



$$\theta = 180^{\circ} - 47^{\circ} = 133^{\circ}$$

$$\alpha = 180^{\circ} - (133^{\circ} + 35^{\circ}) = 12^{\circ}$$

باستخدام قانون الجيب في المثلث المنفرج الزاوية:

$$\frac{\sin\alpha}{900} = \frac{\sin\theta}{c}$$

$$\Longrightarrow c = \frac{900 \times \sin\theta}{\sin\alpha}$$

$$c = \frac{900 \times \sin 133^{\circ}}{\sin 12^{\circ}}$$

$$c \approx 3\ 165.86$$

في المثلث القائم الزاوية الأكبر:

$$\sin 35^{\circ} = \frac{b}{c}$$

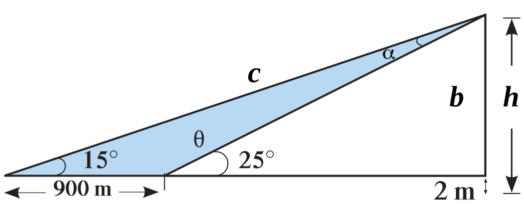
$$b = c \times \sin 35^{\circ} = 3165.86 \times \sin 35^{\circ}$$

$$b \approx 1815.86 \approx 1816$$

$$h = b + 2 = 1816 + 2 = 1818$$

يبلغ ارتفاع الجبل عن سطح البحر حوالي 1818 m

حاول أن تحل



4 في المثال (4)، أوجد ارتفاع الجبل إذا كان قياس الزاويتين 25° ، 15°

مثال (5) تطبيقات حياتية

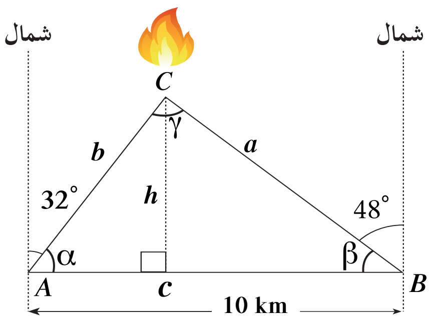
رأى حارس الغابة عند موقع الحراسة A حريقًا في اتجاه $32°$ شرق الشمال.

في حين رأى حارس آخر في موقع الحراسة B على بعد $10\ km$ شرق الموقع A الحريق نفسه في اتجاه $48°$ غرب الشمال.

أوجد المسافة بين كل حارس وموقع الحريق.

الحل:

نمذج



لتكن C هي موقع الحريق.

$\alpha = 58°\ ,\ \beta = 42°$،

وتحتاج إلى حساب b, a في المثلث ABC

$$\gamma = 180° - (\alpha + \beta)$$

$$= 180 - (58° + 42°) = 80°$$

قانون الجيب

$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$

$$\frac{\sin 58°}{a} = \frac{\sin 80°}{10} \quad , \quad \frac{\sin 42°}{b} = \frac{\sin 80°}{10}$$

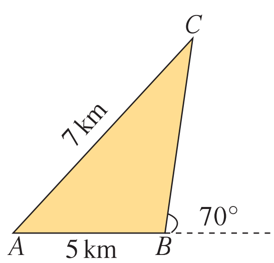
$$a = \frac{10\sin 58°}{\sin 80°} \Longrightarrow a \approx 8.611\,\text{km} \quad , \quad b \approx \frac{10\sin 42°}{\sin 80°} \Rightarrow b \approx 6.794\ \text{km}$$

يبعد موقع الحريق حوالي $6.79\ km$ عن موقع الحراسة A وحوالي $8.61\ km$ عن موقع الحراسة B

حاول أن تحل

5 يمثل الشكل المقابل مسار اليخوت في أحد السباقات انطلاقًا من النقطة A إلى النقطة B ثم النقطة C ثم إلى النقطة A

أوجد مسافة السباق.



قانون جيب التمام

Law of Cosine

سوف تتعلم

- قانون جيب التمام.
- استخدام قانون جيب التمام في حل المثلث.
- إيجاد مساحة مثلث.

المفردات والمصطلحات:

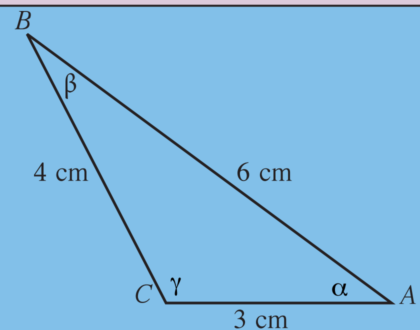
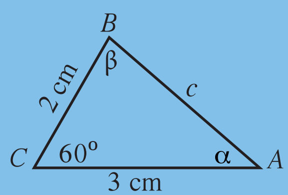
- قانون جيب التمام
Law of Cosine

دعنا نفكر ونتناقش

يمكننا حل المثلث بمعرفة ثلاثة من عناصره الستة (3 زوايا، 3 أضلاع) باستثناء الحالة (3 زوايا).

استخدمنا في بعض تلك الحالات قانون الجيب.

هل يمكنك حل المثلثين التاليين باستخدام قانون الجيب؟

<table>
<tr><td>الشكل</td><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>طبّق قانون الجيب</td><td></td><td></td></tr>
</table>

قانون جيب التمام

في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش» لاحظنا أن:

هناك حالات أخرى لا يمكن استخدام قانون الجيب فيها مثل:

- إذا علم طولا ضلعين وقياس الزاوية بينهما (ض. ز. ض)
- إذا علم أطوال الأضلاع الثلاثة (ض. ض. ض)

في حالات كهذه نستخدم قانونًا آخر هو قانون جيب التمام والذي يعرف أيضًا باسم قانون الكاشي.

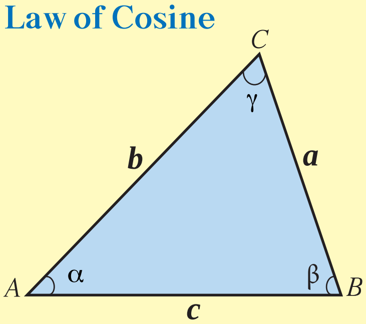
قانون جيب التمام **Law of Cosine**

في ΔABC

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$



معلومة:

غياث الدين بن مسعود بن محمد الكاشي (توفي سنة 1436) من المفكرين البارزين في الإسلام.

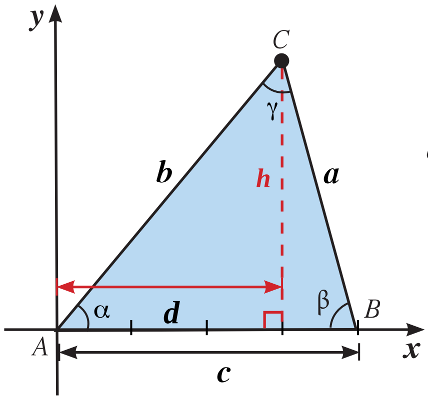
اشتهر بالرياضيات والفلك، ويقال إنه أول من ابتكر الكسور العشرية.

البرهان:

سوف نثبت أن: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$

نضع ΔABC في مستوى الإحداثيات حيث الزاوية A في الوضع القياسي، والرأس B على الاتجاه الموجب لمحور السينات.

$\cos\alpha = \frac{d}{b}$, $\sin\alpha = \frac{h}{b}$



بتطبيق نظرية فيثاغورث

$d = b\cos\alpha$, $h = b\sin\alpha$

$$a^2 = |c-d|^2 + h^2$$
$$= (c - b\cos\alpha)^2 + (b\sin\alpha)^2$$
$$= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2\cos^2\alpha + b^2\sin^2\alpha$$
$$= c^2 - 2bc\cos\alpha + b^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)$$
$$= b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$\cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$

$$\therefore\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

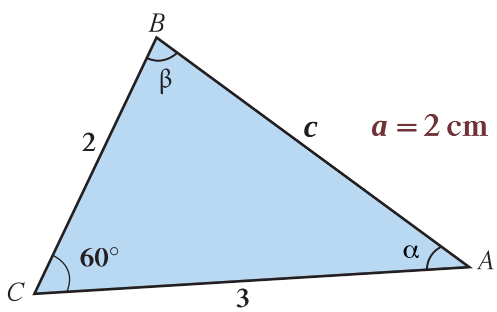
وبالمثل يمكن إثبات المعادلتين الأخريين بوضع الزاوية B ثم الزاوية C في الوضع القياسي كما سبق.

استخدام قانون جيب التمام — Using the Law of Cosine

يسمح قانون جيب التمام بحل مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

مثال (1)

حل ΔABC حيث: $a = 2\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $\gamma = 60^\circ$



الحل:

يجب إيجاد β, α, c

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$
$$= 4 + 9 - 12\cos 60^\circ$$
$$= 13 - 12 \times \frac{1}{2}$$
$$= 7$$
$$c = \sqrt{7}\text{ cm}$$

لإيجاد قياسي الزاويتين α , β يمكن استخدام قانون الجيب ولكن قانون جيب التمام يسمح بالتمييز بين الزاوية الحادة والزاوية المنفرجة.

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$
$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

معلومة:

$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$
$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$
$$\cos\gamma = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$$

$$= \frac{9+7-4}{2 \times 3 \times \sqrt{7}}$$

$$= \frac{12}{6\sqrt{7}}$$

$$\alpha \approx 40.9^{o}$$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{4+7-9}{4\sqrt{7}} = \frac{2}{4\sqrt{7}}$$

$$\beta \approx 79.1^{o}$$

حاول أن تحل

1 حل ΔABC حيث: $a = 11\,\text{cm}\ ,\ b = 5\,\text{cm}\ ,\ \gamma = 20^{o}$

يسمح قانون جيب التمام أيضًا بحل مثلث بمعلومية أطوال أضلاعه الثلاثة.

مثال (2)

حل ΔABC حيث: $a = 4\,\text{cm}\ ,\ b = 3\,\text{cm}\ ,\ c = 6\,\text{cm}$

الحل:

يتوجب علينا إيجاد قياسات الزوايا الثلاث في ΔABC

نستخدم قانون جيب التمام:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{9+36-16}{2 \times 3 \times 6} = \frac{29}{36}$$

$$\therefore\ \alpha \approx 36.4^{o}$$

كذلك:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

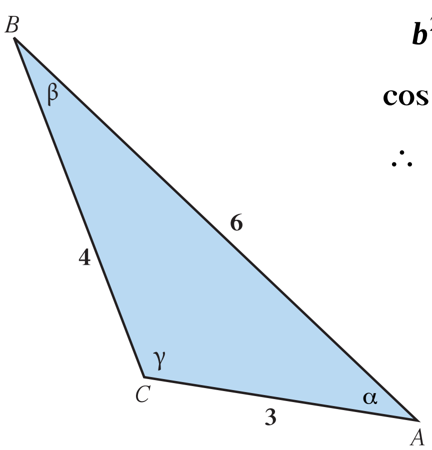
$$\cos\beta = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac} = \frac{16+36-9}{2 \times 4 \times 6} = \frac{43}{48}$$

$$\therefore\ \beta \approx 26.4^{o}$$

$$\gamma = 180^{o} - \alpha - \beta$$

$$\gamma \approx 180^{o} - 36.4^{o} - 26.4^{o}$$

$$\approx 117.2^{o}$$



حاول أن تحل

2 في ΔABC حيث: $a = 9\,\text{cm}\ ,\ b = 7\,\text{cm}\ ,\ c = 5\,\text{cm}$

أوجد قياس الزاوية الأكبر.

تذكر:

إذا كانت $\cos\theta = k$

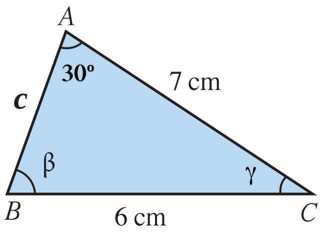
فإن: $\theta = \cos^{-1}(k)$

تذكر:

في أي مثلث يكون الضلع الأكبر طولًا مقابلًا للزاوية الأكبر قياسًا والعكس صحيح.

يقدم قانون جيب التمام مدخلًا بديلًا للحالة (ض. ض. ز) والتي يكون معلوم فيها طولا ضلعي مثلث وقياس زاوية ليست محصورة بينهما. ولإيجاد طول الضلع الثالث وباستخدام قانون جيب التمام نحصل على معادلة تربيعية (من الدرجة الثانية) ويكون عدد المثلثات هو عدد الحلول الموجبة لهذه المعادلة.

مثال (3)



حل ΔABC حيث: $a = 6\text{ cm}$ ، $b = 7\text{ cm}$ ، $\alpha = 30°$

الحل:

علينا إيجاد γ ، β ، c

حل جبريًّا:

قانون جيب التمام

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

$$6^2 = 7^2 + c^2 - 2(7)c\cos 30°$$

$\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$0 = c^2 - 7\sqrt{3}c + 13$$

قانون المعادلة التربيعية

$$c = \frac{7\sqrt{3} \pm \sqrt{(-7\sqrt{3})^2 - 4 \times 1 \times 13}}{2}$$

$$c \approx 10.935 \quad \text{أو} \quad c \approx 1.188$$

كل قيمة موجبة لـ c تقابل مثلثًا واحدًا.

ولذلك لدينا مثلثان. نوجد $\cos\beta$

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$$

في المثلث الأول

$$\cos\beta = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}$$

$$c \approx 10.935$$

$$\cos\beta_1 = \frac{6^2 + (10.935)^2 - 7^2}{2(6)(10.935)}$$

$$\cos\beta_1 \approx 0.812$$

$$\beta_1 = 35.685°$$

$$\gamma_1 = 180° - [\alpha + \beta_1]$$

$$\approx 114.314°$$

في المثلث الثاني

$$c \approx 1.188$$

$$\cos\beta_2 = \frac{6^2 + (1.188)^2 - 7^2}{2(6)(1.188)}$$

$$\cos\beta_2 \approx -0.812$$

$$\beta_2 \approx 144.292°$$

$$\gamma_2 = 180° - [\alpha + \beta_2]$$

$$\approx 5.7080°$$

ملاحظة: يمكن استخدام قانون الجيب في حل المثال (3) كحل آخر.

حاول أن تحل

3 حل ΔABC حيث: $a = 5\text{ cm}$ ، $b = 6.5\text{ cm}$ ، $\alpha = 25°$

معلومة:

يمكن حل أي مثلث معلوم فيه ضلعين وزاوية ليست محصورة بينهما باستخدام قانون الجيب أو جيب التمام.

8–5

مساحة المثلث

Area of Triangle

سوف تتعلم

- إيجاد مساحة المثلث باستخدام جيب إحدى زواياه.
- إيجاد مساحة مثلث باستخدام قاعدة هيرون.

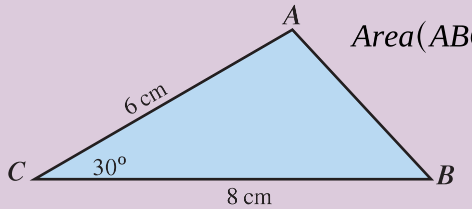
المفردات والمصطلحات:

- مساحة المثلث Area of Triangle
- قاعدة هيرون Heron's Formula

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمت سابقًا أنه يمكن إيجاد مساحة مثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما كما يلي:

$$Area(ABC) = \frac{1}{2}bc\sin\alpha = \frac{1}{2}ac\sin\beta = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$$



استخدم ما تعلمته لإيجاد مساحة المثلث ABC حيث إن:

$\gamma = 30°$, $b = 6\,cm$, $a = 8\,cm$ وذلك بطريقتين مختلفتين.

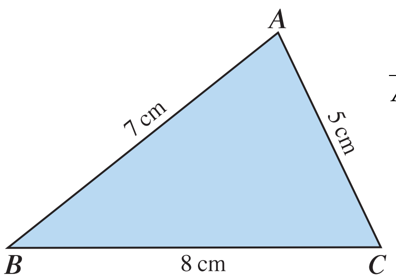
مثال (1)

أوجد مساحة المثلث ABC حيث $a = 8\,cm$ ، $b = 5\,cm$ ، $c = 7\,cm$

الحل:

ليكن α قياس الزاوية المحصورة بين الضلعين $\overline{AC}$, $\overline{AB}$

باستخدام قانون جيب التمام يمكننا إيجاد $\cos\alpha$:



$$\cos\alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

$$\cos\alpha = \frac{25 + 49 - 64}{2 \times 5 \times 7} = \frac{10}{70} = \frac{1}{7}$$

$$\because \cos^2\alpha + \sin^2\alpha = 1$$

$$\therefore \sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$$

في كل مثلث، جيب الزاوية هو موجب

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$$

$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{49}} = \sqrt{\frac{48}{49}} = \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

معلومة:

في المثلث الثلاثيني الستيني طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها 30° يساوي نصف طول الوتر.

ملاحظة:

يمكن أخذ أي ضلعين في المثلث وإيجاد قياس الزاوية المحصورة بينهما، ومن ثم إيجاد مساحة المثلث بمعلومية طولي ضلعين وقياس الزاوية المحصورة بينهما.

نوجد مساحة المثلث ABC باستخدام:

$$\text{Area} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \frac{4\sqrt{3}}{7}$$

$$\text{Area} = 10\sqrt{3} \approx 17.32$$

تبلغ مساحة المثلث ABC حوالي 17.32 cm^2

حل آخر:

$$\therefore \alpha \approx 81.78^\circ$$

$$\therefore \text{Area} = \frac{1}{2} bc \sin\alpha$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \times 5 \times 7 \times \sin(81.78)$$

$$\text{Area} \approx 17.32 \text{ cm}^2$$

حاول أن تحل

1 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $a = 5\text{ cm}\ ,\ b = 6\text{ cm}\ ,\ c = 8\text{ cm}$

معلومة:

هيرون الاسكندري عالم رياضيات ومخترع، عاش في الاسكندرية في العصر البطلمي. كتب عن قياس الأشكال الهندسية، واشتهر بدراساته في علم الميكانيكا.

قاعدة هيرون Heron's Formula

يمكننا أيضًا إيجاد مساحة مثلث بمعرفة أطوال أضلاعه الثلاثة بالقاعدة التالية:

قاعدة هيرون

تعطى مساحة مثلث ABC أطوال أضلاعه a, b, c بالقاعدة:

$$\text{Area}(ABC) = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

حيث: $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \text{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث)

مثال (2)

أوجد مساحة سطح مثلث أطوال أضلاعه: 8 cm ، 5 cm ، 7 cm

الحل:

$$s = \frac{1}{2}(a+b+c) = \frac{1}{2}(8+5+7) = 10$$

باستخدام قاعدة هيرون

$$\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$
$$= \sqrt{10(10-8)(10-5)(10-7)} = \sqrt{10(2)(5)(3)}$$
$$= 10\sqrt{3}$$
$$\text{Area} \approx 17.32$$

مساحة سطح المثلث تساوي $10\sqrt{3}\text{ cm}^2$ أي حوالي 17.32 cm^2

حاول أن تحل

2 أوجد مساحة المثلث ABC حيث: $c = 3\text{ cm}$ ، $b = 4\text{ cm}$ ، $a = 4\text{ cm}$

مثال (3)

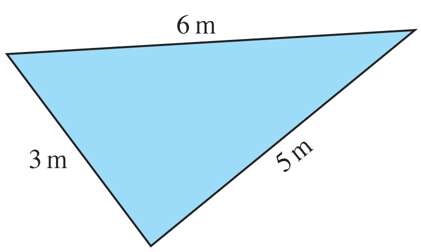
في أحد سباقات المراكب الشراعية وضعت اللجنة المنظمة شرطًا ألا تتعدى مساحة شراع المركب 7.5 m^2.

إذا كان شراع أحد المراكب على شكل مثلث أبعاده: 3 m ، 5 m ، 6 m

فهل يسمح له بالمشاركة في السباق؟

الحل:

محيط المثلث يساوي:



$$3+5+6 = 14\text{ m}$$
$$\therefore\ s = \frac{14}{2} = 7\text{ m}$$

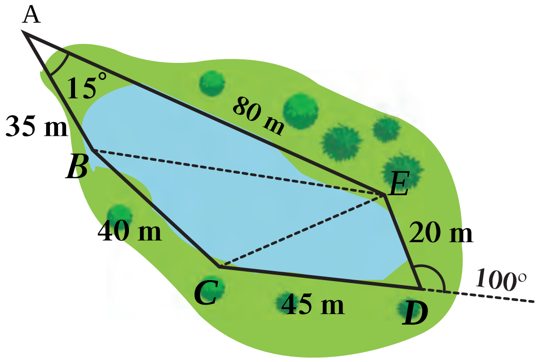
باستخدام قاعدة هيرون:

$$\text{Area} = \sqrt{7(7-3)(7-5)(7-6)}$$
$$= \sqrt{7\times4\times2\times1}$$
$$= \sqrt{56}$$
$$\approx 7.48\text{ m}^2$$

تبلغ مساحة الشراع حوالي 7.48 m^2 وبالتالي يسمح له بالمشاركة.

حاول أن تحل

3 في مثال (3)، هل يسمح لمركب شراعه على شكل مثلث أبعاده 6 m , 4 m , 4 m بالاشتراك في السباق؟



المطلوب:

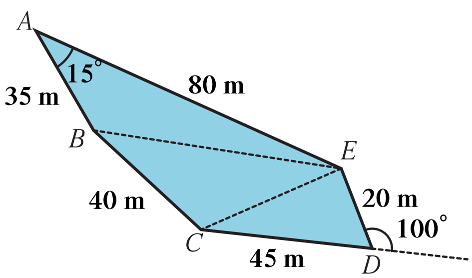
مستخدمًا معطيات الشكل المقابل أوجد مجموع مساحات المثلثات الثلاثة لتقدير مساحة البحيرة.

الحل:

- نبدأ بالمثلث ABE:

$$\text{Area}(ABE) = \frac{1}{2} \times AB \times AE \times \sin 15° = \frac{1}{2} \times 35 \times 80 \times \sin 15°$$

$$\therefore \quad \text{Area}(ABE) \approx 362.347 \text{ m}^2$$



- BE

نستخدم قانون جيب التمام

$$(BE)^2 = AB^2 + AE^2 - 2AB \times AE \times \cos 15°$$

$$= 35^2 + 80^2 - 2 \times 35 \times 80 \times \cos 15°$$

$$\approx 2215.815$$

$$BE \approx \sqrt{2215.815} \approx 47.07 \text{ m}$$

- ننتقل إلى المثلث CDE:

$$\text{Area}(CDE) = \frac{1}{2} \times DC \times DE \times \sin(180° - 100°) = \frac{1}{2} \times 45 \times 20 \times \cos 80°$$

$$\therefore \quad \text{Area}(CDE) \approx 443.163 \text{ m}^2$$

- EC

نستخدم قانون جيب التمام

$$(EC)^2 = DC^2 + DE^2 - 2 \times DC \times DE \times \sin 80° = 45^2 + 20^2 - 2 \times 45 \times 20 \times \cos 80°$$

$$\therefore \quad (EC)^2 \approx 2112.433 \text{ m}^2$$

$$EC \approx \sqrt{2112.433} \approx 45.961 \text{ m}$$

- ننتقل إلى المثلث BCE:

نستخدم قاعدة هيرون

$$\text{Area}(BCE) = \sqrt{s(s-c)(s-b)(s-e)}$$

حيث: $s \approx 66.515 \text{ m}$

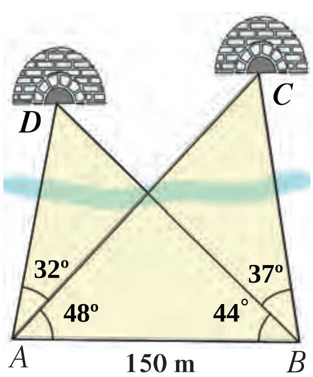
بالتعويض نحصل على: $\text{Area}(BCE) = 839.603 \text{ m}^2$

مجموع مساحات المثلثات الثلاثة: $362.347 + 839.603 + 443.163 = 1\ 645.113$

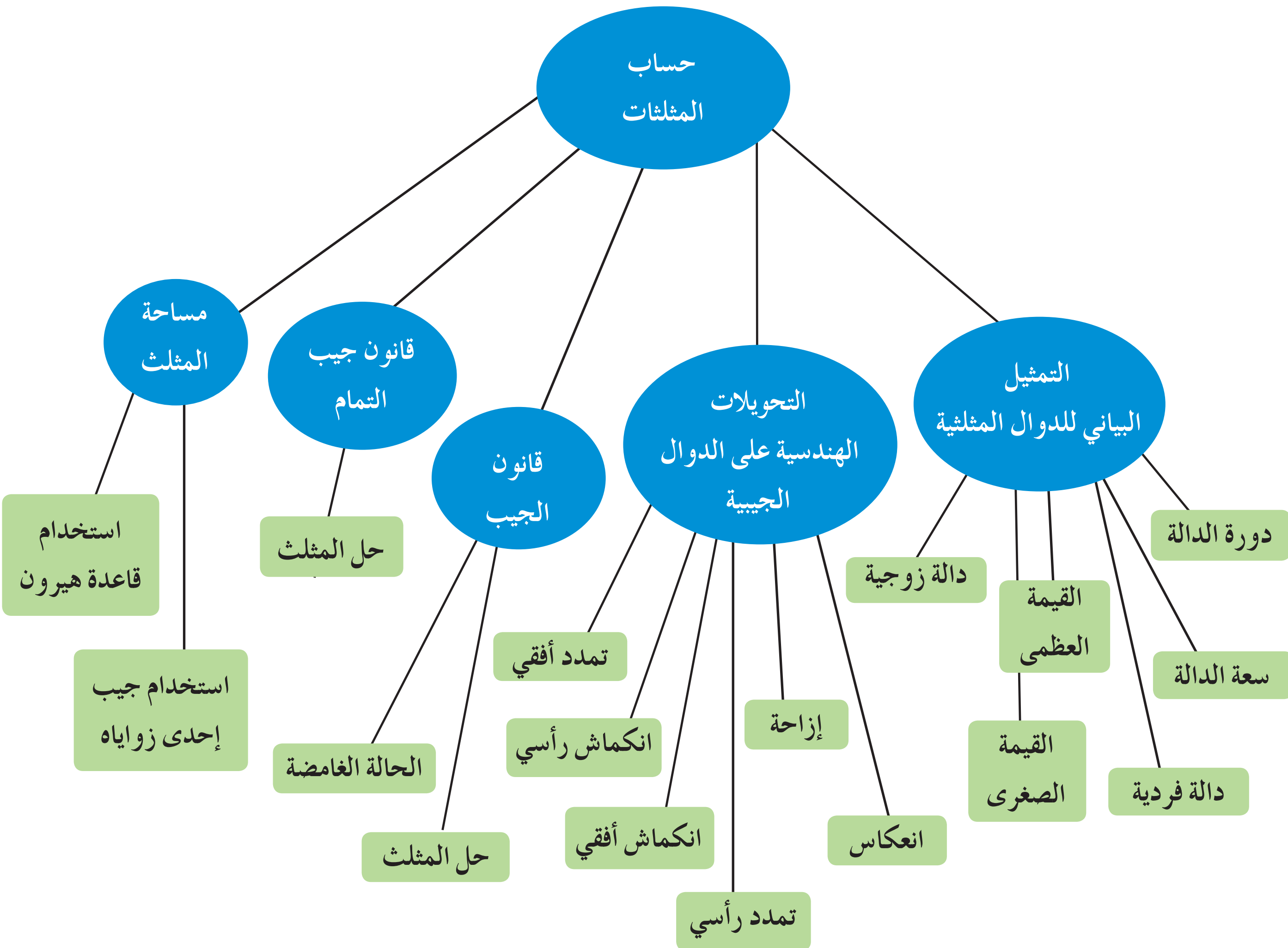
أي حوالي 1645 m^2 ومنه تساوي مساحة البحيرة حوالي 1645 m^2

مسألة إضافية

مستخدمًا معطيات الشكل المقابل، أوجد: DA, CA, DC



مخطط تنظيمي للوحدة الثامنة



ملخص

- دالة الجيب دالة دورية ذات دورة 2π. المقاطع السينية: $x = \pm n\pi$، القيمة العظمى $= 1$ عند $x = \frac{\pi}{2} + 2n\pi$ حيث n عدد صحيح. والقيمة الصغرى $= -1$ عند $x = \frac{3\pi}{2} + 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
- دالة جيب التمام دالة دورية ذات دورة 2π، المقاطع السينية: $x = \pm\frac{\pi}{2} + 2n\pi$، القيمة العظمى $= 1$ عند $x = +2n\pi$، حيث n عدد صحيح والقيمة الصغرى $= -1$ عند $x = \pi \pm 2n\pi$، حيث n عدد صحيح.
- التحويلات: تمدد رأسي: $|a| > 1$ انكماش رأسي: $|a| < 1$
  تمدد أفقي: $\frac{1}{|b|} > 1$ انكماش أفقي: $\frac{1}{|b|} < 1$
- سعة الدالة: $f(x) = a\sin(bx - h) + k$ أو $f(x) = a\cos(bx - h) + k$ هي $|a|$
- دورة $y = a\sin(bx)$ أو $y = a\cos(bx)$ هي $\frac{2\pi}{|b|}$

- دالة الظل دالة دورية ذات دورة π، الأصفار: $x = \pm n\pi$
- دالة الجيب، دالة الظل هما دالتان فرديتان. نقطة الأصل مركز تناظر.
- دالة جيب التمام دالة زوجية. محور الصادات محور تناظر.
- قانون الجيب: $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$
- قانون جيب التمام: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$
- مساحة المثلث $= \frac{1}{2}ab\sin\gamma$
- قاعدة هيرون: $\text{Area} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

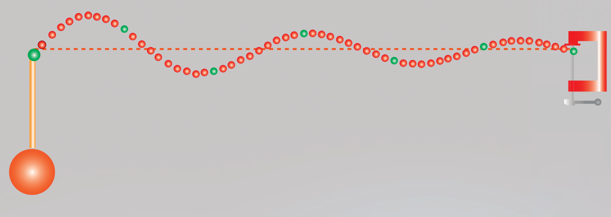
حيث $s = \text{semiperimeter}$ (نصف محيط المثلث).

الوحدة التاسعة

تطبيقات على حساب المثلثات

Applications of Trigonometry

مشروع الوحدة: الموجات الصوتية



1 **مقدمة المشروع:** أنت تسمع في الإذاعات عن تردد الموجات الصوتية وقياساتها وكيف تصل إلى مسامعك من خلال موجات متتالية لها قوانين ووحدات قياس معروفة.

2 **الهدف:** قياس بعض الموجات البسيطة.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني — آلة حاسبة علمية.

4 **أسئلة حول التطبيق:** نربط خيطًا مطاطيًّا من طرفيه بوتدين ثابتين. إذا ضغطنا على الخيط عموديًّا في نقطة، ثم تركناه نلاحظ أنه يهتز محدثًا موجات صوتية متتالية وخفيفة. لنفرض أنه لا يوجد أي احتكاك أو صدى، يمكن نمذجة هذه الموجات بالمعادلة:

$y = y_m \sin(kx - wt)$، حيث: y_m هي السعة بالأمتار (m)؛ k و w هما كميتان ثابتتان؛ t هو الزمن؛ x هي المسافة من أحد طرفي الخيط إلى نقطة الضغط.

يتأثر تردد الموجة الصوتية بالمسافة x وبالزمن t، لذلك للموجة حركتان أفقية وعمودية عبر الزمن. لنأخذ المعادلة:

$$y = 0.00421 \sin(68.3x - 2.68t)$$

a ما سعة الموجة y_m؟ وما الثابت w بالراديان في الثانية؟

b إنّ تردد الموجات الصوتية هو عدد الاهتزازات في الثانية ويعطى بالقانون: $f = \frac{w}{2\pi}$ ووحدته هرتز Hertz.
أوجد تردد الموجة أعلاه.

c طول الموجة الصوتية λ هو أقصر مسافة تتكرر فيها الموجة في فترة زمنية محددة t. يعطى طول الموجة بالقانون: $\lambda = \frac{2\pi}{k}$.
فما طول الموجة أعلاه؟

d مثّل بيان الدالة إذا كانت $x = 1\,\text{m}$

e تتردد موجتان معًا على الخيط نفسه. وينمذج تردد الموجتين معًا بالمعادلة:
$y = y_1 + y_2$، حيث: $y_1 = y_m \sin(kx - wt)$، $y_2 = y_m \sin(kx - wt + \varphi)$، حيث φ تمثّل الفرق بين الموجتين بإزاحة أفقية ثابتة.
مستخدمًا المتطابقات المثلثية اكتب: $y = y_1 + y_2$ كناتج ضرب. [إرشاد: $\sin p + \sin q = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$]

f أوجد y_1 ، y_2 ثم y في حالة: $f = 2.3\,\text{hertz}$ ، $\lambda = 0.09\,\text{m}$ ، $\varphi = 2.5\,\text{radians}$ ، $y_m = 0.0045\,\text{m}$.
مثّل بيان كل من y_1، y_2، y في نظام إحداثي واحد، علمًا أن $x = 1\,\text{m}$.

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن خطوات العمل التي قمت بها وأشر إلى المتطابقات المثلثية التي استعنت بها.
أرفق تقريرك بالتمثيلات البيانية الملونة.

دروس الوحدة

الوحدة التاسعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تحديد الدوال المثلثية.
- تعلمت التمثيلات البيانية لدوال: الجيب، جيب التمام، الظل.
- تعلمت القيم المثلثية لبعض الزوايا الخاصة.
- تعلمت مجال ودورة وسعة الدوال المثلثية: الجيب، جيب التمام، الظل.

ماذا سوف تتعلم؟

- استخدام المتطابقات الأساسية في تبسيط المقادير المثلثية وتحليلها.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًّا وبيانيًّا.
- حل المعادلات المثلثية جبريًّا وبيانيًّا.
- متطابقات مجموع زاويتين.
- متطابقات الفرق بين زاويتين.
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المصطلحات الأساسية

المتطابقات المثلثية الأساسية – متطابقات المقلوب – متطابقات الظل وظل التمام – متطابقات فيثاغورث – متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية – متطابقة الدوال المتكافئة – متطابقات المجموع والفرق – متطابقات الضعف والنصف.

أضف إلى معلوماتك

احتل علم المثلثات مكانة مرموقة في الرياضيات عند العلماء العرب والمسلمين.

وقد شكل نقطة وصل بين الرياضيات وعلم الفلك. فأطلق أولئك العلماء عليه اسم «علم النسب».

وساعد كثيرًا من خلال المسائل المتعلقة به على تطوير «الحساب التقريبي».

من الأسباب الرئيسة التي دفعت العلماء المسلمين إلى حساب المثلثات، وبصورة خاصة المثلثات الكروية، هي ضرورة إكمال حسابات النجوم والفلك والشمس وتحديد جهة القبلة لتأدية الصلاة، أي تحديد اتجاه مدينة مكة المكرمة بالنسبة إلى كل مدينة أو قرية.

9–1

المتطابقات المثلثية

The Trigonometric Identities

سوف تتعلم
- المتطابقات المثلثية الأساسية.
- تبسيط المقادير المثلثية.
- تحليل المقادير المثلثية.

المفردات والمصطلحات:
- متطابقة Identity
- متطابقة فيثاغورث Pythagorian Identity
- متطابقات مثلثية Trigonometric Identities
- تبسيط Simplify
- تحليل Analysing

دعنا نفكر ونتناقش

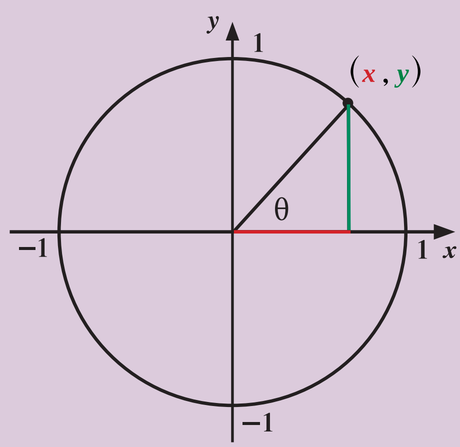
المتطابقة هي معادلة تمثل عبارة صحيحة لجميع قيم المتغير ما عدا القيم التي يكون فيها أي طرف من طرفي المعادلة غير معرّف.

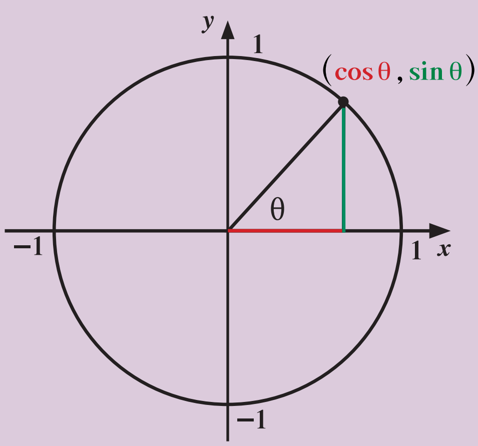
المتطابقة المثلثية هي متطابقة تتضمن تعبيرًا مثلثيًا.

باستخدام نظرية فيثاغورث ودائرة الوحدة، يمكن أن نكتب: $x^2 + y^2 = 1$

إذا عوّضنا عن x بـ $\cos\theta$ وعن y بـ $\sin\theta$ نحصل على $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ لكل قيم θ.

المعادلة: $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$ هي من متطابقات فيثاغورث.





تستخدم المتطابقات المثلثية الأساسية لتحويل المقادير المثلثية إلى شكل أبسط.

المتطابقات المثلثية الأساسية Trigonometric Identities

- متطابقات القسمة (الظل وظل التمام) Quotient Identities (Tangent and Cotangent)

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$

- متطابقات المقلوب Reciprocal Identities

$$\sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \quad , \quad \csc\theta = \frac{1}{\sin\theta} \quad , \quad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

- متطابقات فيثاغورث Pythagorian Identities

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1 \quad , \quad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \quad , \quad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

ملاحظة:
سنعتبر المقام لا يساوي صفرًا في جميع المقادير الكسرية.

مثال (1)

بسّط المقدار: $\sin\theta - \sin^3\theta$

الحل:

$\sin\theta$ عامل مشترك

متطابقة فيثاغورث

$$\sin\theta - \sin^3\theta = \sin\theta(1-\sin^2\theta)$$
$$= \sin\theta\cos^2\theta$$

حاول أن تحل

1 بسّط المقادير التالية:

a $3\cos^2\theta + 3\sin^2\theta$

b $\cos^2\theta + \tan^2\theta\cos^2\theta$

مثال (2)

بسّط التعبير المثلثي التالي: $\csc\theta\tan\theta$

الحل:

استخدم متطابقتي المقلوب وناتج القسمة

$$\csc\theta\tan\theta = \frac{1}{\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

اضرب

$$= \frac{\cancel{\sin\theta}^{1}}{\cancel{\sin\theta}_{1}\cos\theta}$$

بسّط

$$= \frac{1}{\cos\theta}$$
$$= \sec\theta$$

حاول أن تحل

2 بسّط التعبير المثلثي التالي: $\sec\theta\cot\theta$

تستخدم المتطابقات المثلثية لتبسيط مقادير تتضمن كسورًا.

مثال (3)

بسّط: $\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x}$

الحل:

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} - \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos x\cos x}{(1-\sin x)\cos x} - \frac{\sin x(1-\sin x)}{\cos x(1-\sin x)}$$

اطرح البسط

$$= \frac{\cos^2 x - (\sin x)(1-\sin x)}{(1-\sin x)\cos x}$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin x + \sin^2 x}{(1-\sin x)\cos x}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{1-\sin x}{(1-\sin x)\cos x}$$

$$= \frac{1}{\cos x}$$

متطابقة المقلوب

$$= \sec x$$

حاول أن تحل

3 بسّط المقادير التالية:

ⓐ $\cos^2 x(1+\tan^2 x)$

ⓑ $\frac{1-\cos x}{\sin x} + \frac{\sin x}{1-\cos x}$

إن إحدى طرق تبسيط المقادير المثلثية هي تحويلها إلى دالة جيب ودالة جيب التمام.

مثال (4)

بسّط المقدار: $\sin x \tan x - \sec x$

الحل:

متطابقتا القسمة و المقلوب

$$\sin x \tan x - \sec x = \sin x \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\sin^2 x - 1}{\cos x}$$

متطابقة فيثاغورث

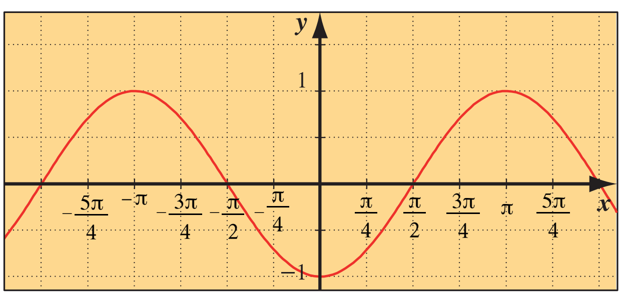
$$= \frac{-\cos^2 x}{\cos x}$$

$$= -\cos x$$

حاول أن تحل

4 بسّط المقدار: $\tan x \cot x - \sin^2 x$

يمكننا أن نتحقق من نتيجة مثال (4) بيانيًّا وذلك بتمثيل بيان الدالة $y_1 = \sin x \tan x - \sec x$ و كذلك تمثيل بيان الدالة $y_2 = -\cos x$ في المستوى الإحداثي نفسه وسنلاحظ أن التمثيلين البيانيين للدالتين منطبقان (يمكن استخدام الآلة الحاسبة البيانية).

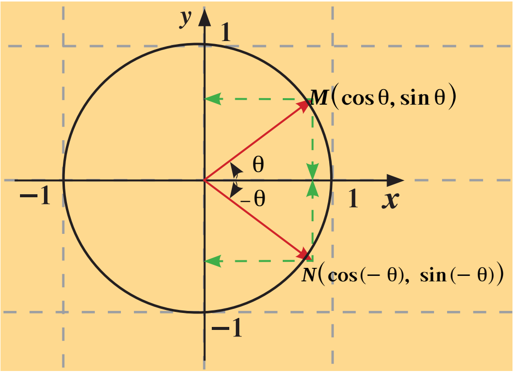


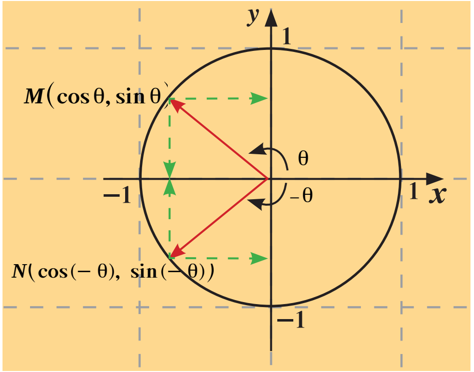
متطابقات الدوال المثلثية الزوجية أو الفردية

Even–Odd Trigonomertric Identities

تعلمت سابقًا أن دالة الجيب دالة فردية ودالة جيب التمام دالة زوجية.

بدراسة الأشكال التالية أكمل الجدول التالي:





الدالة	نوعها	المتطابقة
دالة الجيب	دالة فردية	$\sin(-\theta) = -\sin\theta$
دالة جيب التمام	دالة زوجية	$\cos(-\theta) = \cos\theta$
دالة الظل	دالة	$\tan(-\theta) = -\tan\theta$
دالة قاطع التمام	دالة	$\csc(-\theta) =$.........
دالة القاطع	دالة	$\sec(-\theta) =$.........
دالة ظل التمام	دالة	$\cot(-\theta) =$.........

تذكر:

تكون الدالة $y = f(x)$ والتي مجالها D بشرط $\forall x \in D$:

(1) دالة زوجية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = f(x)$

(2) دالة فردية إذا وفقط إذا كان: $f(-x) = -f(x)$

مثال (5)

بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sin^2(-\theta)-\cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta)-\cos(-\theta)}$

الحل:

$$\frac{\sin^2(-\theta)-\cos^2(-\theta)}{\sin(-\theta)-\cos(-\theta)} = \frac{(-\sin\theta)^2-(\cos\theta)^2}{-\sin\theta-\cos\theta}$$

$\sin(-\theta) = -\sin\theta\,,\ \cos(-\theta) = \cos\theta$

$$= \frac{\sin^2\theta-\cos^2\theta}{-(\sin\theta+\cos\theta)}$$

$$= \frac{(\sin\theta-\cos\theta)\overset{1}{\cancel{(\sin\theta+\cos\theta)}}}{-\underset{1}{\cancel{(\sin\theta+\cos\theta)}}}$$

$a^2-b^2 = (a-b)(a+b)$

$$= -\sin\theta+\cos\theta$$

حاول أن تحل

5 بسّط المقدار التالي: $\dfrac{\sec^2(-\theta)-\tan^2(-\theta)}{\sec(-\theta)}$

تحليل المقادير المثلثية Factorising Trigonometric Expressions

يمكن تحليل المقادير المثلثية وذلك بكتابتها بدلالة دالة مثلثية واحدة.

مثال (6)

اكتب $1 + \cos x - \sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

الحل:

بسبب عدم إمكانية التحليل نستبدل $\sin^2 x$ بـ $1 - \cos^2 x$

متطابقة فيثاغورث

$$\begin{aligned} 1 + \cos x - \sin^2 x &= 1 + \cos x - (1 - \cos^2 x) \\ &= 1 + \cos x - 1 + \cos^2 x \\ &= \cos x + \cos^2 x \\ &= \cos x(1 + \cos x) \end{aligned}$$

حاول أن تحل

6 اكتب $\sin^4 x - \sin^2 x$ في صورة ناتج ضرب عوامل.

مثال (7)

حلّل المقدار: $\sec^2 x + \tan x - 3$

الحل:

نستبدل $\sec^2 x$ بـ $(1 + \tan^2 x)$ ليكون المقدار بدلالة دالة مثلثية واحدة.

$$\sec^2 x + \tan x - 3 = 1 + \tan^2 x + \tan x - 3$$

بسّط

$$= \tan^2 x + \tan x - 2$$

حلّل

$$= (\tan x - 1)(\tan x + 2)$$

حاول أن تحل

7 حلّل المقدار: $\sin^2 x - \frac{5}{4}\sin x + \frac{3}{8}$

9–2

سوف تتعلم
- تبيان ما إذا كانت المعادلة تمثل متطابقة.
- إثبات صحة المتطابقات جبريًّا.

المفردات والمصطلحات:
- إثبات متطابقة Confirming an Identity
- دمج الحدود Associate Terms
- ضرب العوامل Multiplying Factors
- فصل الحدود Separating Terms
- التحليل Analysing

إثبات صحة متطابقات مثلثية
Confirming Trigonometric Identities

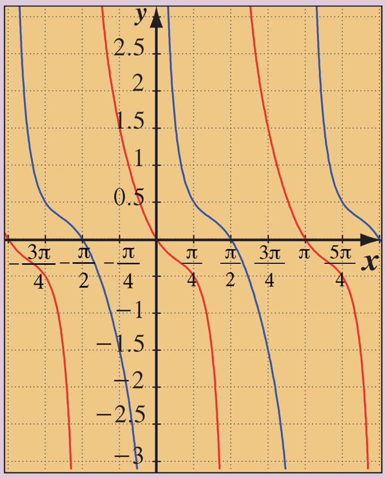
دعنا نفكر ونتناقش

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة، عليك إثبات أن طرفي المعادلة متساويان لكل قيم المتغير.

فمثلًا: هل المعادلة: $\sin^2 x - \tan x = -\cos^2 x + \cot x$ هي متطابقة؟

للتحقق من ذلك، يمكن تمثيل الدالتين التاليتين بيانيًّا. (باستخدام الآلة الحاسبة البيانية)

$y_1 = \sin^2 x - \tan x$ ، $y_2 = -\cos^2 x + \cot x$



$y_1 = \sin^2 x - \tan x$

$y_2 = -\cos^2 x + \cot x$

بالنظر إلى الشكل نجد أن البيانين غير منطبقين.

أي أن الطرفين غير متساويين، لذلك فإن المعادلة ليست متطابقة.

أحيانًا يكون من السهل إثبات أن الدالتين غير متساويتين جبريًّا، فمثلًا:

قيم y_1, y_2 عند $x = 0$ هي:

$y_1(0) = 0$ ولكن $y_2(0)$ غير معرّفة.

لذلك فالدالتان غير متساويتين والمعادلة ليست متطابقة.

إثبات صحة متطابقة Confirming an Identity

لإثبات أن معادلة ما هي متطابقة نحتاج إلى محاولة إثبات أن طرفي المعادلة متساويان عند كل قيم المتغير نفسها. من خلال استخدام إحدى الإستراتيجيات التالية:

1. تبسيط الطرف الأيمن بصورة الطرف الأيسر أو العكس.
2. تبسيط كلًّا من الطرفين على حدة حتى يتطابق ناتج تبسيطهما.

ويتم تبسيط كل طرف باستخدام إحدى الطرق التالية:

- دمج الحدود
- فصل الحدود
- ضرب العوامل
- التحليل
- استخدام متطابقات معلومة
- تبسيط الكسور
- التحويل إلى الجيب وجيب التمام

مثال (1)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \tan^2\theta$

الحل:

نبسط الطرف الأيسر إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب العوامل

$$\frac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta} = \frac{1-\cos^2\theta}{\cos^2\theta}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}$$

$$= \left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)^2$$

متطابقة القسمة

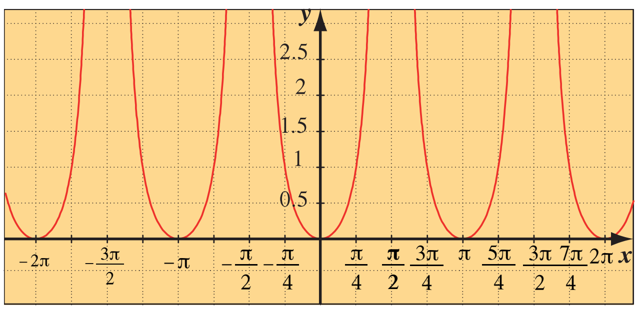
$$= \tan^2\theta$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

1 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\sin\theta}{1+\cos\theta} + \dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta} = 2\csc\theta$

يمكننا أن نتحقق من صحة المتطابقة في مثال (1) بيانيًّا وذلك بتمثيل كلّ من طرفي المعادلة في نفس المستوى الإحداثي كما في الشكل أدناه. سنلاحظ أن المنحنيين متطبقان وبالتالي المعادلة تمثل متطابقة (يمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية).



$y_2 = \dfrac{(1-\cos\theta)(1+\cos\theta)}{\cos^2\theta}$

$y_2 = \tan^2\theta$

مثال (2)

أثبت صحة المتطابقة: $2\cot x\csc x = \dfrac{1}{\sec x - 1} + \dfrac{1}{\sec x + 1}$

الحل:

نبسط الطرف الأيمن إلى صورة الطرف الأيسر

أوجد مقامًا مشتركًا

$$\frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1} = \frac{(\sec x + 1) + (\sec x - 1)}{(\sec x - 1)(\sec x + 1)}$$

بسّط

$$= \frac{2\sec x}{\sec^2 x - 1}$$

متطابقة فيثاغورث

$$= \frac{2\sec x}{\tan^2 x}$$

استخدم متطابقة المقلوب

$$= 2\sec x \cot^2 x$$

بسّط

$$= \frac{2}{\cos x} \cdot \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{2\cos x}{\sin x} \cdot \frac{1}{\sin x}$$

$$= 2\cot x \csc x$$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

2 أثبت صحة المتطابقة: $\frac{1+\sin x}{1-\sin x} - \frac{1-\sin x}{1+\sin x} = 4\tan x \cdot \sec x$

بالتعويض بأي قيمة من قيم المتغير x تصبح المتطابقة في المثال (2) عبارة صحيحة والجدول أدناه يوضح ذلك لبعض قيم الدالتين:

$$y_1 = 2\cot x \csc x$$

$$y_2 = \frac{1}{\sec x - 1} + \frac{1}{\sec x + 1}$$

x(radians)	y_1	y_2
−3	−99.4225	−99.4225
−2	−1.0066	−1.0066
−1	1.5261	1.5261
0	error	error
1	1.5261	1.5261
2	−1.0066	−1.0066
3	−99.4225	−99.4225

أحيانًا يمكن تحويل الكسر إلى صورة أخرى بضرب كل من البسط والمقام في نفس العامل.

مثال (3)

أثبت صحة المتطابقة: $\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

الحل:

نبدأ بالطرف الأيسر ونصل إلى صورة الطرف الأيمن

ضرب كل من البسط والمقام في $(1+\sin x)$

$$\frac{\cos x}{1-\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin x} \times \frac{1+\sin x}{1+\sin x}$$

$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$

$$= \frac{\cos x(1+\sin x)}{1-\sin^2 x}$$

متطابقة فيثاغورث $= \dfrac{\cos x(1+\sin x)}{\cos^2 x}$

اختصار العامل المشترك $= \dfrac{1+\sin x}{\cos x}$

∴ الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

حاول أن تحل

3 أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x} = (\csc x - \cot x)^2$

مثال (4)

أثبت صحة المتطابقة: $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta - \tan\theta)$

الحل:

نبسّط الطرف الأيسر:

متطابقة فيثاغورث $\dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = \dfrac{\csc^2\theta - 1}{1+\csc\theta}$

حلّل $= \dfrac{(\csc\theta-1)(\csc\theta+1)}{1+\csc\theta}$

بسّط $= \csc\theta - 1$

نبسّط الطرف الأيمن:

اكتب بدلالة $\sin\theta$، $\cos\theta$ $(\cot\theta)(\sec\theta-\tan\theta) = \left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(\dfrac{1}{\cos\theta} - \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)$

خاصية التوزيع $= \dfrac{1}{\sin\theta} - 1$

متطابقة المقلوب $= \csc\theta - 1$

∵ كلا الطرفين يكافئ $\csc\theta - 1$

$\therefore \dfrac{\cot^2\theta}{1+\csc\theta} = (\cot\theta)(\sec\theta-\tan\theta)$

حاول أن تحل

4 أثبت أن: $\dfrac{\sec x + \tan x}{\cot x + \cos x} = \sin x + \sin x \tan^2 x$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\sin^2 x\ \cos^5 x = (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x$

الحل:

نبدأ بفك الطرف الأيسر لاستخدام متطابقة فيثاغورث.

$\cos^5 x = \cos^4 x\ \cos x$ $\sin^2 x\ \cos^5 x = \sin^2 x\ \cos^4 x\ \cos x$

$= (\sin^2 x)(1 - \sin^2 x)^2 \cos x$ $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$

$= (\sin^2 x)(1 - 2\sin^2 x + \sin^4 x)\cos x$

$= (\sin^2 x - 2\sin^4 x + \sin^6 x)\cos x$

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $\sin^6 x + \cos^6 x = 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x$

إرشاد: $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$

9-3

حل معادلات مثلثية

Solving Trigonometric Equations

سوف تتعلم

- حل معادلات مثلثية.
- دور الدالة الدورية في عمليات حل المعادلات.

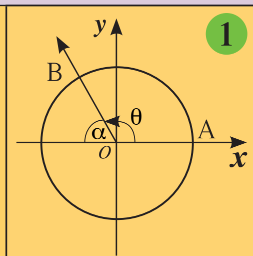
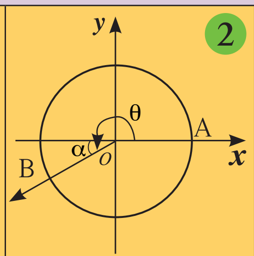
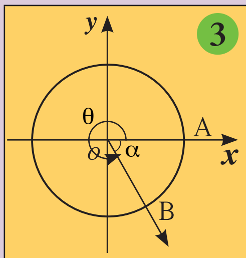
المفردات والمصطلحات:

- معادلة مثلثية
Trigonometric Equation
- دالة دورية
Periodic Function
- العامل الصفري
Zero Factor
- مضاعفات الزاوية
Multiples of an Angle

دعنا نفكر ونتناقش

زاوية الإسناد للزاوية الموجهة $\theta = (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB})$ في الوضع القياسي، هي الزاوية الحادة α التي يصنعها الضلع النهائي للزاوية الموجهة مع محور السينات.

لتكن α زاوية الإسناد حيث $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$، أكمل الجدول التالي:

الشكل	1 	2 	3 
الربع من المستوى الإحداثي	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...	θ تقع في الربع ...
زاوية الإسناد	$\alpha =$	$\alpha =$	$\alpha = 2\pi - \theta$
الزاوية في الوضع القياسي	$\theta =$	$\theta =$	$\theta = 2\pi - \alpha$

الدوال الجيبية هي دوال دورية. يمكن لخط مستقيم أفقي (مثل محور السينات) أن يتقاطع مع منحناها في عدد غير منتهٍ من النقاط. نوجد عادة حلول المعادلة المثلثية على فترة دورة واحدة، ثم نستنتج باقي قيم الحلول بإضافة دورة الدالة.

معلومة:

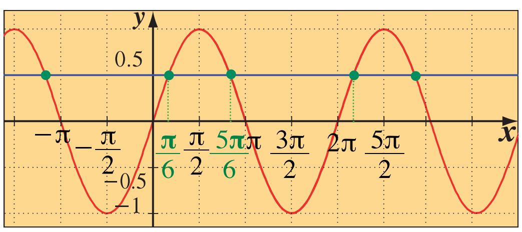
إذا كانت θ تقع في الربع الأول، فإن زاوية الإسناد α تساوي θ

مثال توضيحي

حل المعادلة: $\sin x = \frac{1}{2}$

الحل:

$y_1 = \sin x \,,\; y_2 = \frac{1}{2}$



يوضح الشكل السابق أن التمثيلين البيانيان للدالتين:

$y_1 = \sin x$ و $y_2 = \frac{1}{2}$ يتقاطعان في عدة نقاط.

هذا يعني أن للمعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ عدة حلول وهي الإحداثي السيني لنقطة التقاطع.

(وهذا ما نتوقعه عندما تكون الدالة المثلثية مساوية لعدد ثابت ينتمي إلى مداها).

الدالة المثلثية $y = \sin x$ دالة دورية.

دورتها $= 2\pi$

$\therefore$ في حالة المعادلة $\sin x = \frac{1}{2}$ يوجد حلّان على الفترة $[0, 2\pi)$ وهي تمثل دورة واحدة

والحلّان هما: $x = \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$ ، $x = \frac{\pi}{6}$

ونستنتج الحلول الأخرى بإضافة مضاعفات 2π لكل من هاتين القيمتين.

يمكن كتابة هذه الحلول غير المنتهية على الشكل:

$x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ ، $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حيث k تنتمي إلى مجموعة الأعداد الصحيحة $(k \in \mathbb{Z})$.

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi - \theta)$ تقع في الربع الثاني ويكون:

$\sin\theta = \sin(\pi - \theta)$

وحل المعادلة:

$\sin x = \sin\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

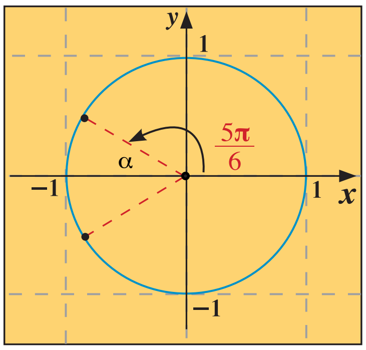
أو $x = (\pi - \theta) + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

مثال (1)

حل المعادلة: $2\cos x + \sqrt{3} = 0$

الحل:



$$2\cos x + \sqrt{3} = 0$$

$$2\cos x = -\sqrt{3}$$

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x

$$\therefore \cos\alpha = |\cos x|$$

$$= \left|-\frac{\sqrt{3}}{2}\right| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{6}$$

$$\because \cos x < 0$$

$\therefore$ x تقع في الربع الثاني أو الربع الثالث

عندما x تقع في الربع الثاني: $x = \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

$$\therefore x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

وعندما x تقع في الربع الثالث: $x = \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi,\quad k \in \mathbb{Z}$

$$= \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$$

$\therefore$ حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$، حيث $k \in \mathbb{Z}$

تذكر:

إذا كانت θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(-\theta)$ تقع في الربع الرابع ويكون:

$\cos\theta = \cos(-\theta)$

وحل المعادلة:

$\cos x = \cos\theta$

هو: $x = \theta + 2k\pi$

أو $x = -\theta + 2k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

1 حل المعادلة: $\sqrt{2}\cos x = 1$

نحتاج أحيانًا إلى حل معادلات مثلثية على فترات معينة.

مثال (2)

حل المعادلة: $4\sin\theta + 1 = \sin\theta$، حيث $0 \le \theta < 2\pi$

الحل:

$4\sin\theta + 1 = \sin\theta$

فصل المتغير $4\sin\theta - \sin\theta = -1$

بسّط $3\sin\theta = -1$

$\sin\theta = -\frac{1}{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore\ \sin\alpha = |\sin\theta|$

$= \left|-\frac{1}{3}\right| = \frac{1}{3}$

$\therefore\ \alpha = \sin^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 0.34 \text{ radians}$

$\because\ \sin\theta < 0\ \therefore$ θ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore\ \theta \approx \pi + 0.34$

$\approx 3.4816 \quad , \quad 3.4816 \in [0, 2\pi)$

عندما θ تقع في الربع الرابع

$\therefore\ \theta \approx 2\pi - 0.34$

$\approx 5.9432 \quad , \quad 5.9432 \in [0, 2\pi)$

حل المعادلة: $\theta \approx 5.9432$ أو $\theta \approx 3.4816$

حاول أن تحل

2 حل المعادلة: $5\sin\theta - 3 = \sin\theta$

يكون لبعض المعادلات المثلثية حلولًا دقيقة لأنها تحتوي على زوايا خاصة.

مثال (3)

حل المعادلة: $\tan x = \sqrt{3}$

الحل:

$\tan x = \sqrt{3}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore\ \tan\alpha = |\tan x|$

$= |\sqrt{3}| = \sqrt{3}$

ملاحظة:

إذا كانت حلول المعادلات المثلثية ليست من الزوايا الخاصة فإنه يمكن إيجادها بمساعدة التكنولوجيا.

انتبه!

$2\pi \approx 6.2832$

تذكر:

إذا كانت الزاوية θ تقع في الربع الأول فإن الزاوية $(\pi + \theta)$ تقع في الربع الثالث ويكون:

$\tan\theta = \tan(\pi + \theta)$

وحل المعادلة:

$\tan x = \tan\theta$

هو: $x = \theta + k\pi$

حيث $k \in \mathbb{Z}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \tan x > 0 \quad \therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثالث

ولكن الدالة $\tan x$ هي دالة دورية ودورتها π

فيكون: $\tan(\pi + x) = \tan x$

ومنه يكون حل المعادلة: $x = \frac{\pi}{3} + k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

3 حل المعادلة: $\tan x = 1$

عند حل معادلة مثلثية جبريًّا يمكن البدء بكتابتها على الشكل $d(x) = 0$ وتحليلها، ثم استخدام خاصية العامل الصفري.

مثال (4)

حل المعادلة: $2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

الحل:

$2\cos\theta \sin\theta = -\sin\theta$

$2\cos\theta\sin\theta + \sin\theta = 0$

$\sin\theta(2\cos\theta + 1) = 0$ — تحليل إلى عوامل

$\sin\theta = 0$ أو $2\cos\theta + 1 = 0$ — خاصية الضرب في الصفر

$\sin\theta = 0$ أو $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

$\cos\theta = -\frac{1}{2}$ أو $\sin\theta = 0$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية θ

$\therefore\ \cos\alpha = |\cos\theta|$

$= \left|-\frac{1}{2}\right| = \left|\frac{1}{2}\right|$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{3}$

$\because\ \cos\theta < 0$

$\therefore$ θ تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث.

عندما تقع θ في الربع الثاني:

$\theta = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$

$\therefore$ θ زاوية ربعية

$\therefore\ \theta = 0$ أو $\theta = \pi$

$\therefore\ \theta = 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما θ تقع في الربع الثالث

$\therefore\ \theta = \pi + \alpha + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) + 2k\pi$

$= \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$

حل المعادلة: $\theta = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi$ أو $\theta = \pi + 2k\pi$ أو $\theta = 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

4 حل المعادلة: $\sin\theta\cos\theta - \cos\theta = 0$

مثال (5)

حل المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$

الحل:

المعادلة: $4\sin^2 x - 8\sin x + 3 = 0$ هي معادلة تربيعية في $\sin x$

بالتحليل:

$(2\sin x - 1)(2\sin x - 3) = 0$

$2\sin x - 1 = 0$ أو $2\sin x - 3 = 0$

$\sin x = \frac{1}{2}$ أو $\sin x = \frac{3}{2}$

$\sin x = \frac{3}{2}$

$\because\ y = \sin x$ مداها $[-1\,,1]$

$\frac{3}{2} \notin [-1,1]$

$\therefore\ \sin x = \frac{3}{2}$ ليس لها حل

أو

$\sin x = \frac{1}{2}$

نأخذ $\sin x = \frac{1}{2}$

نفرض أن α هي زاوية الإسناد للزاوية x.

$\therefore\ \sin\alpha = |\sin x|$

$= \left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha = \frac{\pi}{6}$

$\because\ \sin x > 0$

$\therefore$ x تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني.

عندما x تقع في الربع الأول

$\therefore\ x = \alpha + 2k\pi = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

عندما x تقع في الربع الثاني

$\therefore\ x = (\pi - \alpha) + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

$= \left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) + 2k\pi$

$= \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ أو $x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi$ حيث $k \in \mathbb{Z}$

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\cos^2 x + 3\cos x + 2 = 0$

ملاحظة: يمكنك حل مثال (5) باستخدام قانون حل المعادلة التربيعية.

معادلات تحتوي على مضاعفات الزوايا Equations Involving Multiples of Angles

يقال للمعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ أنها **معادلة مضاعفات الزاوية**، لأن الزاوية في هذه المعادلة $3x$، وهي من مضاعفات x.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\cos 3x = \sqrt{2}$ حيث $0 \leq x < \pi$

الحل:

$\because \ 0 \leqslant x < \pi$

$\therefore \ 0 \leqslant 3x < 3\pi$

$\therefore$ $3x$ تقع في دورة ونصف الدورة

$$2\cos 3x = \sqrt{2} \Longrightarrow \cos 3x = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

نفرض أن α زاوية الإسناد للزاوية $3x$

$$\therefore \ \cos\alpha = |\cos 3x|$$

$$= \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\therefore \ \alpha = \frac{\pi}{4}$$

$\because \ \cos 3x > 0 \quad \therefore$ $3x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الرابع

عندما $3x$ تقع في الربع الأول

$$\therefore \ 3x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow x = \frac{\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi \ , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{\pi}{12} \ , \ \frac{\pi}{12} \in [0,\pi)$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{3\pi}{4} \ , \ \frac{3\pi}{4} \in [0,\pi)$$

$$k = 2 \Rightarrow x = \frac{17\pi}{12} \ , \ \frac{17\pi}{12} \notin [0,\pi)$$

عندما $3x$ تقع في الربع الرابع

$$\therefore \ 3x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Longrightarrow 3x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi \ , \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{7\pi}{12} + \frac{2}{3}k\pi$$

$$k = 0 \Rightarrow x = \frac{7\pi}{12}$$

$$k = 1 \Rightarrow x = \frac{15\pi}{12} \ , \ \frac{15\pi}{12} \notin [0,\pi)$$

حل المعادلة: $x = \frac{7\pi}{12} \ , \ x = \frac{3\pi}{4} \ , \ x = \frac{\pi}{12}$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $4\cos 2x = 2$ حيث $0° \leq x < 360°$

مثال إثرائي

حل المعادلة: $2\sin^2 2x = 1$

الحل:

$$2\sin^2 2x = 1$$

$$\sin^2 2x = \frac{1}{2}$$

$\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ أو $\sin 2x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$

$\sin 2x = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ أو $\sin 2x = \frac{1}{\sqrt{2}}$

نفرض أن α_2 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$$\therefore \sin\alpha_2 = |\sin 2x|$$

$$= \left|-\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \alpha_2 = \frac{\pi}{4}$$

$\because \sin 2x < 0 \quad \therefore$ $2x$ تقع في الربع الثالث أو في الربع الرابع

عندما $2x$ تقع في الربع الثالث

$$\therefore 2x = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \ , \ k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{5\pi}{8} + k\pi$$

عندما $2x$ تقع في الربع الرابع

$$\therefore 2x = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{7\pi}{8} + k\pi$$

نفرض أن α_1 هي زاوية الإسناد للزاوية $2x$

$$\therefore \sin\alpha_1 = |\sin 2x|$$

$$= \left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right| = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\therefore \alpha_1 = \frac{\pi}{4}$$

$\because \sin 2x > 0 \quad \therefore$ $2x$ تقع في الربع الأول أو في الربع الثاني

عندما $2x$ تقع في الربع الأول

$$\therefore 2x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + k\pi$$

عندما $2x$ تقع في الربع الثاني

$$\therefore 2x = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$x = \frac{3\pi}{8} + k\pi$$

حل المعادلة: $x = \frac{5\pi}{8} + k\pi, \quad x = \frac{3\pi}{8} + k\pi \ , \ x = \frac{\pi}{8} + k\pi \ ,$

$x = \frac{7\pi}{8} + k\pi \quad , \quad k \in \mathbb{Z}$

تدريب إثرائي

حل المعادلة: $4\cos^2 2x = 1$

مثال (7) تطبيقات

لعبة مربوطة بنابض شد إلى الأسفل ثم أفلت من سكون.

تنمذج المعادلة : $h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$، ارتفاع اللعبة بالسنتيمترات (cm) أعلى أو أدنى من مستوى الاتزان كدالة في الزمن t بالثواني.

متى تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm؟

الحل:

$$h = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

عوّض عن h بـ 5

$$5 = -10\cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

$$-\frac{1}{2} = \cos\left(\frac{2\pi}{3}t\right)$$

نفرض α زاوية الإسناد

$$\cos\alpha = \left|-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \alpha = \frac{\pi}{3}$$

$$\therefore cos\frac{2\pi}{3}t < 0$$

∴ الزاوية تقع في الربع الثاني أو في الربع الثالث

$$\therefore \frac{2\pi}{3}t = \frac{2\pi}{3} \quad \text{أو} \quad \frac{2\pi}{3}t = \frac{4\pi}{3}$$

$$\therefore \quad t = 1 \quad \text{أو} \quad t = 2$$

تكون اللعبة لأول مرة أعلى من مستوى السكون بـ 5 cm بعد ثانية واحدة.

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، متى تكون اللعبة لثاني مرة أدنى من مستوى الاتزان بـ 5 cm؟

تذكر:

إذا كان: $\cos\theta = -\frac{1}{2}$

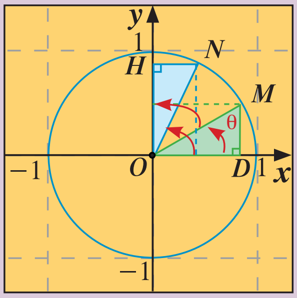
فإن: $\theta = \cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$

9–4

متطابقات المجموع والفرق

Sum and Difference Identities

عمل تعاوني



في الشكل المقابل، $m(D\hat{O}M) = \theta, m(D\hat{O}N) = \frac{\pi}{2} - \theta$

a ما قياس $(N\hat{O}H)$؟

b أثبت تطابق المثلثين: ODM, ONH.

c أكمل: $OD = \ldots\ , MD = \ldots$

d أكمل: $N\left(\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right), \ldots\ldots\right)$ ، $M(\ldots , \sin\theta)$

ثم أكمل: $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\ldots$ ، $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\ldots$

(**إرشاد:** استفد من الفقرة (c)).

متطابقات الدوال المتكافئة Cofunction Identities

تربط متطابقات الدوال المتكافئة بين الدوال المثلثية الأساسية والدوال المكافئة لها (الجيب وجيب التمام، الظل وظل التمام، القاطع وقاطع التمام).

متطابقات الدوال المتكافئة

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta \qquad \sec\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \csc\theta$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta \qquad \csc\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \sec\theta$$

مثال (1)

أثبت أن: $\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos\theta$

الحل:

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right] \qquad b - a = -(a - b)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) \qquad \sin(-\alpha) = -\sin(\alpha)$$

$$= -\cos\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$

حاول أن تحل

1 أثبت أن: $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \sin\theta$

سوف تتعلم

- جيب مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- جيب تمام مجموع زاويتين أو الفرق بينهما.
- متطابقة الدوال المتكافئة.

المفردات والمصطلحات:

- جيب مجموع زاويتين Sine of Sum of Two Angles
- جيب الفرق بين زاويتين Sine of Difference of Two Angles
- جيب تمام مجموع زاويتين Cosine of Sum of Two Angles
- جيب تمام الفرق بين زاويتين Cosine of Difference of Two Angles
- دوال متكافئة Cofunctions

مثال (2)

أثبت أن: $\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = -\sec\theta$

الحل:

$b - a = -(a - b)$

$\csc\alpha = \frac{1}{\sin\alpha}$

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$

$$\csc\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \csc\left[-\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)\right]$$
$$= \frac{1}{\sin -\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$
$$= \frac{1}{-\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)}$$
$$= \frac{-1}{\cos\theta}$$
$$= -\sec\theta$$

حاول أن تحل

2 أثبت أن: $\sec\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) = \csc\theta$

متطابقات المجموع والفرق Sum and Difference Identities

تعلمت أن ناتج الضرب الداخلي لمتجهين غير صفريين: $\vec{A} = < x_A , y_A >$ ، $\vec{B} = < x_B , y_B >$
يمكن إيجاده بإحدى العلاقتين التاليتين:

1 $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + y_A y_B$

2 $\vec{A} \cdot \vec{B} = \|\vec{A}\| \cdot \|\vec{B}\| \cos\theta$

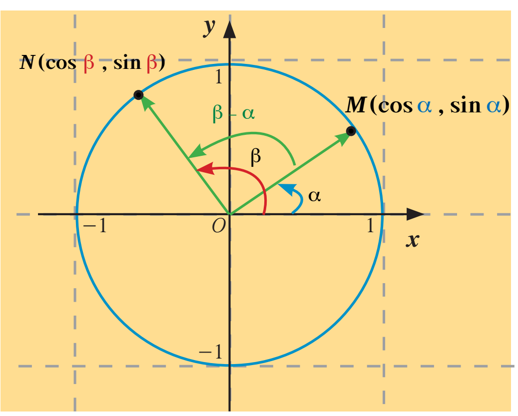
حيث θ هي الزاوية المحددة بالمتجهين.

في الشكل أدناه، سوف نستخدم الضرب الداخلي لمتجهين لإيجاد متطابقة $\cos(\beta - \alpha)$

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = < \cos\beta , \sin\beta > \cdot < \cos\alpha , \sin\alpha > = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha \qquad (1)$$

أيضًا

$$\overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = \|\overrightarrow{ON}\| \times \|\overrightarrow{OM}\| \times \cos(\beta - \alpha)$$
$$= 1 \times 1 \times \cos(\beta - \alpha) = \cos(\beta - \alpha)$$
$$\therefore \overrightarrow{ON} \cdot \overrightarrow{OM} = \cos(\beta - \alpha) \qquad (2)$$



من (1), (2):

$$\therefore \cos(\beta - \alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$

لإيجاد : $\cos(\beta + \alpha)$

$$\because \beta + \alpha = \beta - (-\alpha)$$
$$\therefore \cos(\beta + \alpha) = \cos[\beta - (-\alpha)]$$
$$= \cos\beta\cos(-\alpha) + \sin\beta\sin(-\alpha)$$
$$= \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta(-\sin\alpha)$$

$\therefore\ \cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$

نستطيع كتابة $\sin(\beta+\alpha)$ على الشكل $\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\beta+\alpha)\right]$

$$\begin{aligned}\sin(\beta+\alpha)&=\cos\left[\frac{\pi}{2}-(\beta+\alpha)\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta-\alpha\right)\\&=\cos\left[\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)-\alpha\right]\\&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\cos\alpha+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\beta\right)\sin\alpha\end{aligned}$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

ومنها

$$\begin{aligned}\sin(\beta-\alpha)&=\sin[(\beta+(-\alpha)]\\&=\sin\beta\cos(-\alpha)+\cos\beta\sin(-\alpha)\end{aligned}$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

بكتابة $\tan(\beta+\alpha)=\dfrac{\sin(\beta+\alpha)}{\cos(\beta+\alpha)}$ نحصل على:

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

كذلك

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

متطابقات المجموع والفرق

$$\cos(\beta+\alpha)=\cos\beta\cos\alpha-\sin\beta\sin\alpha$$

$$\cos(\beta-\alpha)=\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta+\alpha)=\sin\beta\cos\alpha+\cos\beta\sin\alpha$$

$$\sin(\beta-\alpha)=\sin\beta\cos\alpha-\cos\beta\sin\alpha$$

$$\tan(\beta+\alpha)=\frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$

$$\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

مثال (3)

أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\cos 15°$ b $\sin 105°$ c $\tan 75°$

الحل:

a متطابقة الفرق

$$\begin{aligned}\cos 15°&=\cos(60°-45°)\\&=\cos 60°\cos 45°+\sin 60°\sin 45°\\&=\frac{1}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

b $\sin 105°$

$$\because \quad 105° = 60° + 45°$$
$$\therefore \sin 105° = \sin(60° + 45°)$$
$$= \sin 60° \cos 45° + \cos 60° \sin 45°$$
$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$= \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

c $\tan 75°$

$$\because \quad 75° = 45° + 30°$$
$$\therefore \quad \tan 75° = \tan(45° + 30°)$$
$$= \frac{\tan 45° + \tan 30°}{1 - \tan 45° \tan 30°}$$
$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}$$
$$= 2 + \sqrt{3}$$

$\tan 45° = 1$

حاول أن تحل

3 أوجد دون استخدام الآلة الحاسبة كلًّا مما يلي:

a $\sin 15°$ **b** $\cos 75°$ **c** $\tan 105°$

مثال (4)

إذا كان: $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$

$\cos\beta = \frac{-12}{13}$, $\pi < \beta < \frac{3\pi}{2}$

أوجد كلًّا مما يلي:

a $\sin(\alpha + \beta)$ **b** $\cos(\alpha - \beta)$ **c** $\tan(\alpha - \beta)$

الحل:

نوجد أولًا: $\tan\beta$, $\tan\alpha$, $\sin\beta$, $\cos\alpha$

متطابقة فيثاغورث

- $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

تعويض

$$\left(\frac{4}{5}\right)^2 + \cos^2\alpha = 1$$

$$\cos^2\alpha = 1 - \frac{16}{25}$$ فصل المتغير

$$\cos^2\alpha = \frac{9}{25}$$ بسّط

$$\cos\alpha = -\frac{3}{5} \quad \text{أو} \quad \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

$$\because\ 0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\alpha > 0$$

$$\therefore\ \cos\alpha = \frac{3}{5}$$

- $\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$ متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2\beta + \left(\frac{-12}{13}\right)^2 = 1$$ تعويض

$$\sin^2\beta = 1 - \frac{144}{169}$$ فصل المتغير

$$\sin^2\beta = \frac{25}{169}$$ بسّط

$$\sin\beta = -\frac{5}{13} \quad \text{أو} \quad \sin\beta = \frac{5}{13}$$

$$\because\ \pi < \beta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \sin\beta < 0$$

$$\therefore\ \sin\beta = \frac{-5}{13}$$

- $\tan\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \dfrac{\frac{4}{5}}{\frac{3}{5}} = \dfrac{4}{3}$

- $\tan\beta = \dfrac{\sin\beta}{\cos\beta} = \dfrac{\frac{-5}{13}}{\frac{-12}{13}} = \dfrac{5}{12}$

a $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{4}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{-48}{65} - \frac{15}{65} = -\frac{63}{65}$$

b $\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$

$$= \left(\frac{3}{5}\right)\left(\frac{-12}{13}\right) + \left(\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{5}{13}\right)$$

$$= \frac{-36}{65} - \frac{20}{65} = -\frac{56}{65}$$

c $\tan(\alpha-\beta) = \dfrac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}$

$$= \frac{\frac{4}{3} - \frac{5}{12}}{1 + \left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{5}{12}\right)}$$

$$= \frac{\frac{11}{12}}{\frac{56}{36}} = \frac{33}{56}$$

حاول أن تحل

4 باستخدام المعطيات من المثال (4)، أوجد كلًّا مما يلي:

a $\cos(\alpha+\beta)$ b $\tan(\alpha+\beta)$ c $\sin(\beta-\alpha)$

9–5

متطابقات ضعف الزاوية ونصفها

Double–Angle and Half–Angle Identities

سوف تتعلم
- متطابقات ضعف الزاوية.
- متطابقات نصف الزاوية.

المفردات والمصطلحات:
- ضعف الزاوية
Double of an Angle
- نصف الزاوية
Half of anAngle

عمل تعاوني

تعلمت في ما سبق:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

إذا كانت $\alpha=\beta$ فإن:

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\alpha)$$
$$=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$$

وبالمثل استخدم قوانين مجموع زاويتين في إيجاد كل من:

a $\sin 2\alpha$ **b** $\tan 2\alpha$

متطابقات ضعف الزاوية Double–Angle Identities

أولًا: جيب تمام ضعف الزاوية Cosine Double–Angle

$$\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$$

مثال (1)

أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta-1$

الحل:

من عمل تعاوني $(1)\ \cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$

من متطابقة فيثاغورث $\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

نحصل على $\sin^2\theta=1-\cos^2\theta$

في المعادلة (1) نعوّض عن $\sin^2\theta$ بـ $1-\cos^2\theta$

نحصل على $\cos 2\theta=\cos^2\theta-(1-\cos^2\theta)$

$$=\cos^2\theta-1+\cos^2\theta$$
$$=2\cos^2\theta-1$$

حاول أن تحل

1 أثبت صحة متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية: $\cos 2\theta = 1-2\sin^2\theta$

$$\cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$\cos 2\theta=1-2\sin^2\theta$$

مثال (2)

إذا كان $\cos x = \frac{3}{5}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد $\cos 2x$

الحل:

متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية

$$\therefore \quad \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 2\left(\frac{3}{5}\right)^2 - 1$$

$$= 2 \times \frac{9}{25} - 1$$

$$= \frac{18}{25} - 1$$

$$= -\frac{7}{25}$$

حاول أن تحل

2 إذا كان $\sin x = \frac{5}{13}$ استخدم متطابقة جيب تمام ضعف الزاوية لإيجاد: $\cos 2x$

ثانيًا: جيب ضعف الزاوية Sine Double–Angle

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

مثال (3)

إذا كان: $\pi < \theta < \frac{3\pi}{2}$ ، $\sin\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$ ، فأوجد $\sin 2\theta$.

الحل:

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\cos^2\theta = 1 - \sin^2\theta$$

$$= 1 - \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)^2$$

$$= \frac{1}{2}$$

$\pi < \theta < \frac{3\pi}{2} \quad \therefore \quad \cos\theta < 0$

$$\cos\theta = \frac{-1}{\sqrt{2}}$$

متطابقة جيب ضعف الزاوية

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

$$\sin 2\theta = 2 \times \frac{-1}{\sqrt{2}} \times \frac{-1}{\sqrt{2}} = 1$$

حاول أن تحل

3 إذا كان $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ ، $\cos\theta = \frac{3}{5}$ فأوجد $\sin 2\theta$.

ثالثًا: ظل ضعف الزاوية Tangent Double–Angle

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

مثال (4)

إذا كان: $\tan\theta = -1+\sqrt{2}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

الحل:

$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}$$

$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(-1+\sqrt{2})^2}$$

$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{1-(1+2-2\sqrt{2})}$$

$$= \frac{2(-1+\sqrt{2})}{-2+2\sqrt{2}} = \frac{2(-1+\sqrt{2})}{2(-1+\sqrt{2})} = 1$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\tan\theta = \sqrt{3}$، استخدم متطابقة ظل ضعف الزاوية لإيجاد $\tan 2\theta$

مثال (5)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 2\theta = \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta}$

الحل:

$\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$ ، الطرف الأيمن $= \dfrac{1-\tan^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \dfrac{1-\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{1+\dfrac{\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

المقام المشترك $= \dfrac{\dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}{\dfrac{\cos^2\theta+\sin^2\theta}{\cos^2\theta}}$

بسّط $= \dfrac{\cos^2\theta-\sin^2\theta}{\cos^2\theta+\sin^2\theta}$

متطابقة فيثاغورث $= \cos^2\theta-\sin^2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos 2\theta =$ الطرف الأيسر

حاول أن تحل

5 أثبت صحة المتطابقة: $2\cos 2\theta = 4\cos^2\theta - 2$

مثال (6)

أثبت صحة المتطابقة: $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$

الحل:

الطرف الأيسر $= \cos 3\theta = \cos(\theta + 2\theta)$

متطابقة المجموع $= \cos\theta\cos 2\theta - \sin\theta\sin 2\theta$

متطابقة الضعف $= \cos\theta(2\cos^2\theta - 1) - \sin\theta(2\sin\theta\cos\theta)$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث $= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta$

$= 2\cos^3\theta - \cos\theta - 2\cos\theta + 2\cos^3\theta$

$= 4\cos^3\theta - 3\cos\theta =$ الطرف الأيمن

حاول أن تحل

6 أثبت صحة المتطابقة: $\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$

متطابقات نصف الزاوية Half–Angle Identities

يمكن استخدام متطابقة ضعف الزاوية لإيجاد متطابقات نصف الزاوية.

لتكن: $\theta = \frac{\alpha}{2}$

متطابقة ضعف الزاوية لجيب التمام $\cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$

عوض عن θ بـ $\frac{\alpha}{2}$ $\cos 2\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

بسّط $\cos\alpha = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right) - 1$

حل في $\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ $\frac{1+\cos\alpha}{2} = \cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$

خذ الجذر التربيعي لكلا الطرفين $\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

وبالمثل $\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

متطابقات نصف الزاوية

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

ملاحظة:

عند استخدام متطابقات نصف الزاوية تحتاج إلى تعيين الربع الذي تقع فيه الزاوية $\frac{\alpha}{2}$ ومن ثم تستخدم الإشارة الصحيحة + أو − للدالة المثلثية في هذا الربع.

تذكر:

الدالة	موجبة في الربع
$\sin x$	الأول والثاني
$\cos x$	الأول والرابع
$\tan x$	الأول والثالث

مثال (7)

استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\sin 15^\circ$

الحل:

$$\sin 15^\circ = \sin\left(\frac{30^\circ}{2}\right)$$

$$= \pm\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

خذ الجذر الموجب، لأن 15° توجد في الربع الأول

$$= +\sqrt{\frac{1-\cos 30^\circ}{2}}$$

عوّض $\cos 30^\circ$ بـ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

$$= \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{3}}{2}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{4}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}$$

حاول أن تحل

7 استخدم متطابقات نصف الزاوية لإيجاد $\cos 15^\circ$

مثال (8)

إذا كانت: $180^\circ < \theta < 270^\circ$ ، $\sin\theta = -\frac{24}{25}$ ،

فأوجد $\sin\frac{\theta}{2}$.

الحل:

نوجد أولًا $\cos\theta$

متطابقة فيثاغورث

$$\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

عوّض

$$\cos^2\theta + \left(\frac{-24}{25}\right)^2 = 1$$

$$\cos^2\theta = \frac{49}{625}$$

لأن θ في الربع الثالث

$$\cos\theta = \frac{-7}{25}$$

نوجد الآن $\frac{\theta}{2}$

$$\because\ 180^\circ < \theta < 270^\circ$$

ومنه $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\therefore\ 90^\circ < \frac{\theta}{2} < 135^\circ$$

متطابقة نصف الزاوية

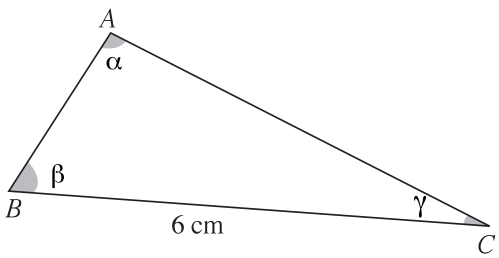
$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}}$$

عوّض، اختر الجذر الموجب، لأن $\frac{\theta}{2}$ في الربع الثاني

$$\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) = \sqrt{\frac{1-\left(\frac{-7}{25}\right)}{2}} = \frac{4}{5}$$

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، أوجد: $\tan\frac{\theta}{2}$, $\cos\frac{\theta}{2}$



ABC مثلث، حيث $BC = 6\text{ cm}$ ، $\cos\beta = \frac{3}{5}$ ، $\cos\gamma = \frac{12}{13}$.

1 a احسب $\sin\gamma$ ، $\sin\beta$

b احسب $\sin\alpha$ ، $\cos\alpha$

2 أوجد مساحة المثلث ABC.

الحل:

1 a في المثلث قيمة جيب الزاوية هي دائمًا موجبة، لأن قياسات الزوايا تنحصر بين الصفر و°180

أي في الربعين الأول والثاني حيث جيب الزاوية موجب.

متطابقة فيثاغورث

$$\sin^2\beta + \cos^2\beta = 1$$

$$\sin\beta = \sqrt{1-\cos^2\beta} = \sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2} = \frac{4}{5},\ \ \sin\gamma = \sqrt{1-\left(\frac{12}{13}\right)^2} = \frac{5}{13}$$

b في المثلث مجموع قياسات الزوايا °180

$$\alpha+\beta+\gamma = 180^\circ$$

$$\therefore\ \ \cos\alpha = \cos(180^\circ-(\beta+\gamma))$$

$$= -\cos(\beta+\gamma)$$

متطابقة المجموع

$$= -\cos\beta\cos\gamma + \sin\beta\sin\gamma$$

$$= -\frac{3}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{4}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{-16}{65}$$ ، $\cos\alpha < 0$ ، $\therefore$ α زاوية منفرجة

وبالمثل:

$$\sin\alpha = \sin(180^\circ-(\beta+\gamma))$$

$$= \sin(\beta+\gamma) = \sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma$$

$$= \frac{4}{5}\times\frac{12}{13}+\frac{3}{5}\times\frac{5}{13} = \frac{63}{65}$$

2 سأستخدم القاعدة:

$Area = \frac{1}{2} BA \times BC \times \sin B$.

لذلك عليّ أوّلًا إيجاد BA، سأستخدم قانون الجيب:

$\frac{\frac{5}{13}}{c} = \frac{\frac{63}{65}}{6}$ $\therefore$ ، $\frac{\sin C}{c} = \frac{\sin A}{a}$ حيث إن $AB = c$.

$$c = \frac{5 \times 65 \times 6}{63 \times 13} = 2.38$$

$$\text{Area} = \frac{1}{2} \text{BC} \times \text{BA} \times \sin \text{B}$$

ومنه:

$$= \frac{1}{2} \times 6 \times 2.38 \times \frac{4}{5}$$

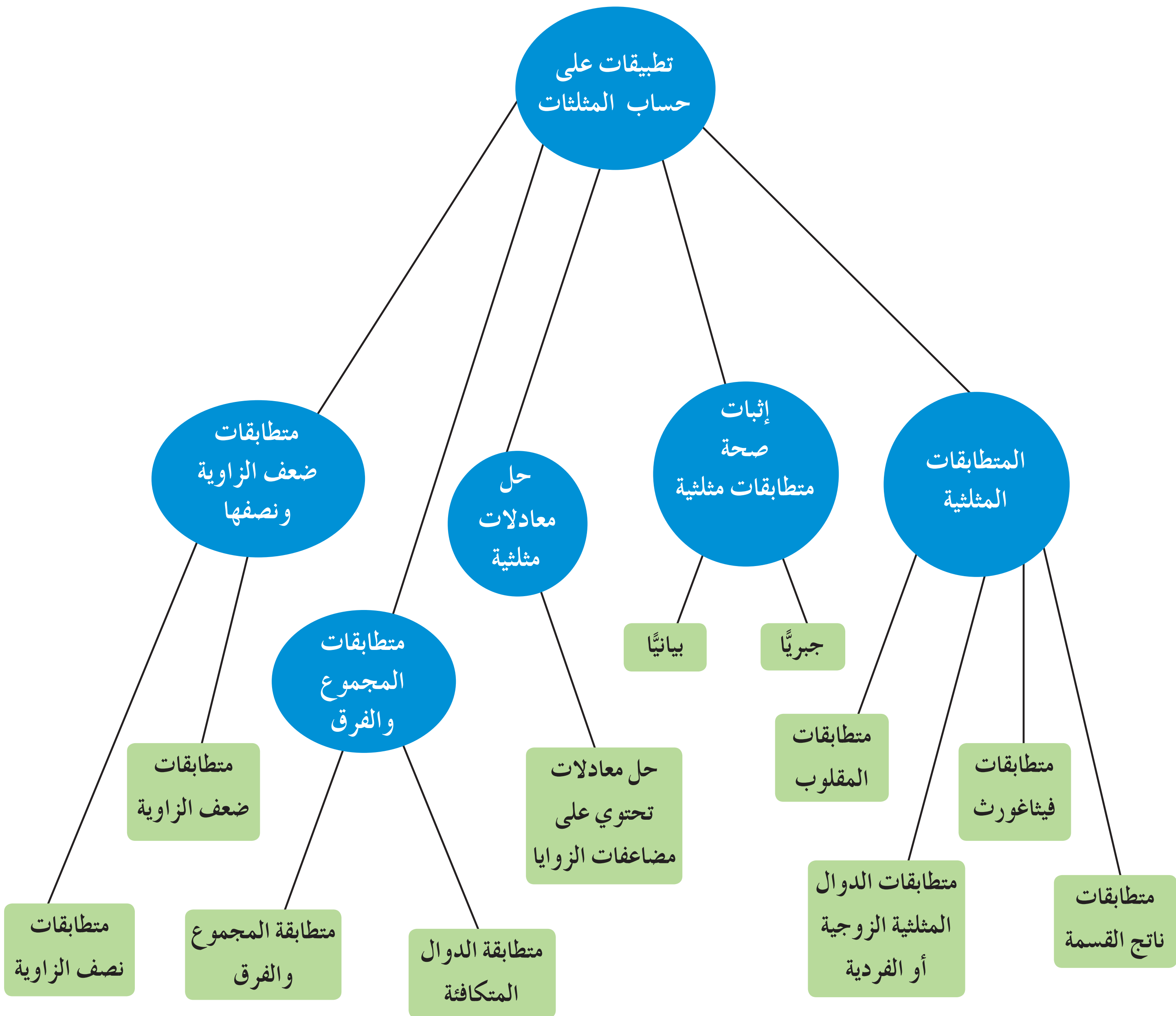
$$\therefore \quad \text{Area} = 5.712$$

$\therefore$ تبلغ مساحة المثلث حوالى $5.7\ \text{cm}^2$

مسألة إضافية

أثبت صحة المتطابقة: $\cos^2 x + \cos^2\left(x + \frac{\pi}{3}\right) + \cos^2\left(x + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3}{2}$

مخطط تنظيمي للوحدة التاسعة



ملخص

- متطابقات ناتج القسمة: $\cot\theta = \dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ ، $\tan\theta = \dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}$
- متطابقات المقلوب: $\cot\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ ، $\csc\theta = \dfrac{1}{\sin\theta}$ ، $\sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$
- متطابقات فيثاغورث: $1+\cot^2\theta = \csc^2\theta$ ، $1+\tan^2\theta = \sec^2\theta$ ، $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$
- متطابقات الدوال الزوجية أو الفردية:

$$\tan(-\theta) = -\tan\theta \qquad \cos(-\theta) = \cos\theta \qquad \sin(-\theta) = -\sin\theta$$
$$\cot(-\theta) = -\cot\theta \qquad \sec(-\theta) = \sec\theta \qquad \csc(-\theta) = -\csc\theta$$

- طرق إثبات أن المعادلة متطابقة:

دمج الحدود، فصل الحدود، ضرب العوامل، التحليل، استخدام متطابقات معلومة، تبسيط الكسور، التحويل إلى الجيب وجيب التمام فقط.

- متطابقة الدوال المتكافئة:

$$\sec\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \csc\theta \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cot\theta \qquad \cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sin\theta$$
$$\csc\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \sec\theta \qquad \cot\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \tan\theta \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \cos\theta$$

- متطابقات المجموع والفرق:

$$\cos(\beta+\alpha) = \cos\beta\cos\alpha - \sin\beta\sin\alpha$$
$$\cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta+\alpha) = \sin\beta\cos\alpha + \cos\beta\sin\alpha$$
$$\sin(\beta-\alpha) = \sin\beta\cos\alpha - \cos\beta\sin\alpha$$
$$\tan(\beta+\alpha) = \frac{\tan\beta+\tan\alpha}{1-\tan\beta\tan\alpha}$$
$$\tan(\beta-\alpha) = \frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}$$

- متطابقات ضعف الزاوية:

$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta \qquad \cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\tan 2\theta = \frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta} \qquad \cos 2\theta = 2\cos^2\theta - 1$$
$$\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$$

- متطابقات نصف الزاوية:

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} \ , \quad \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} \ , \quad \tan\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$$

الوحدة العاشرة

الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء)

Space Geometry

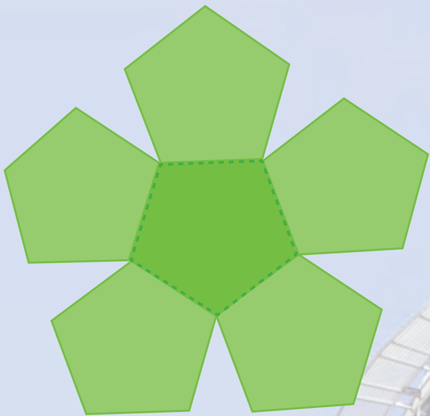
مشروع الوحدة: المجسمات

1 **مقدمة المشروع:** ما أنواع الأشكال ثلاثية الأبعاد التي تشاهدها كل يوم؟ بينما تسير داخل أحد المحلات التجارية الكبرى ترى العديد من العلب والعبوات... معروضة على الرفوف. يمكنك وصف العديد من الأشكال في الفضاء على أنها أهرامات أو أسطوانات أو مخاريط أو مناشير. يأخذ المصنعون بالاعتبار العديد من العوامل قبل اعتماد الشكل الملائم للمنتج.

2 **الهدف:** تصميم مجسمات متعددة السطوح وصنعها وفق شروط معينة.

3 **اللوازم:** ورق مقوى (كرتون)، شريط لاصق، مقص، مسطرة.

4 **أسئلة حول التطبيق:**



a على ورقة مقواة، ارسم نسختين من الشبكة المقابلة. كل الأشكال هي مضلعات خماسية منتظمة متطابقة. اطو كل شبكة وفق الخطوط المنقطة. ألصق الأضلاع المتلاصقة بالشريط اللاصق. ثم طبق الشبكتين على بعضهما بعضًا وألصقهما.

ما الشكل الذي حصلت عليه؟

b خذ علبة على شكل شبه مكعب أو أسطوانة. أوجد مساحتها الكلية. قصّها حول أحد حروفها وسطحها.

ما مساحة الورق المقوى غير المستخدم الذي قصصته من العلبة؟

ما نسبة مساحة الورق المقوى غير المستخدم (المهدور) إلى مساحة السطح؟

c انسخ الجدول التالي وأكمله لأربعة أشباه مكعبات حجم كل منها $216\ cm^3$.

الطول (cm)	العرض (cm)	الارتفاع (cm)	الحجم (cm^3)	المساحة الكلية (cm^2)	الحجم : المساحة الكلية
6	6	■	216	■	■ : ■
■	■	■	216	■	■ : ■

أي نسبة تختارها لتحصل على أقل تكلفة ممكنة؟

d خذ بعض علب رقائق الذرة للأطفال. ما النسبة بين الحجم والمساحة الكلية؟ كيف تفسر ذلك؟

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن خطوات العمل الذي قمت به ويجيب عن الأسئلة المطروحة.

أرفق التقرير بملصق يبيّن الجدول في الفقرة c واعرض المجسم الذي حصلت عليه في الفقرة a .

دروس الوحدة

المستقيمات والمستويات في الفضاء	المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء	تعامد مستقيم مع مستو	الزاوية الزوجية	المستويات المتعامدة
10−1	10−2	10−3	10−4	10−5

الوحدة العاشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأشكال الهندسية المستوية.
- تعلمت إيجاد مساحة بعض الأشكال المستوية مثل المثلثات وبعض المضلعات الرباعية والمضلعات المنتظمة.
- تعلمت العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة والعلاقة بين مساحاتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- ميزات الأشكال ثلاثية الأبعاد.
- المسلمات الرياضية للنقطة والمستقيم والمستوي.
- أوضاع المستقيمات والمستويات في الفضاء.
- إيجاد قياس مختلف أنواع الزوايا.

المصطلحات الأساسية

هندسة الفضاء – ثلاثية الأبعاد – المسلمات – مستقيمان متخالفان – المستقيم العمودي – المستقيم المائل – زاوية زوجية – حافة الزاوية الزوجية – وجه الزاوية الزوجية – الزاوية المستوية – مستويات متعامدة

أضف إلى معلوماتك

إن دراسة الأشكال ثلاثية الأبعاد تسمى «الهندسة الفراغية أو هندسة الفضاء». للأشكال ثنائية الأبعاد ما يماثلها في الفراغ ثلاثي الأبعاد.

أشكال ثنائية الأبعاد	أشكال ثلاثية الأبعاد
مضلعات مثلث Triangle رباعي Quadrilateral	**لها أسطح مستوية** هرم Pyramid منشور Prism
منحنيات قطع ناقص Ellipse دائرة Circle	**لها أسطح منحنية** كرة Sphere مخروط Cone أسطوانة Cylinder

10-1 المستقيمات والمستويات في الفضاء

Lines and Planes in Space

سوف تتعلم

- المسلمات الرياضية للنقطة والمستقيم والمستوي.
- المستقيمات والمستويات في الفضاء.

المفردات والمصطلحات:

- هندسة الفضاء Space Geometry
- ثلاثية الأبعاد Three–Dimensional
- مسلمة Postulate
- نقطة Point
- مستقيم Straight Line
- مستوي Plane
- مستقيمان متخالفان Two Skew Lines
- مستقيمان متقاطعان Two Intersecting Lines
- مستقيمان متوازيان Two Parallel Lines

معلومة:

سوف نستخدم الحروف الكبيرة مثل A, B, C للدلالة على النقاط والحروف الصغيرة مثل l, m, h للدلالة على المستقيمات.
ونكتب المستقيم l أو $\overleftrightarrow{l}$.

معلومة:

وحيد تعني واحد وواحد فقط.

دعنا نفكر ونتناقش

الصورة المقابلة هي لأحد مجمعات دولة الكويت. حدّد في الصورة:

a نقطة، مستقيم، مستوي.

b مستقيمان متوازيان، مستقيمان متقاطعان، مستقيمان متخالفان.

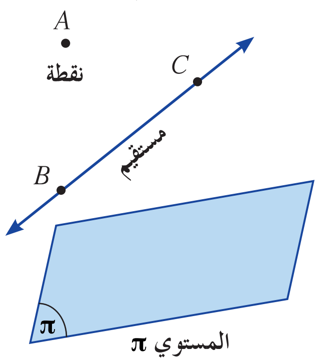
c زاوية (حدّد نوعها إن أمكن).

d سطح غير مستو.

النقطة والمستقيم والمستوي في الفضاء

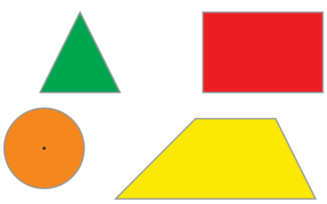
Point, Straight Line and Plane in Space

استخدمت في دراستك السابقة بعض المسميات الأولية مثل النقطة، المستقيم، المستوي وذلك لتعريف بعض المفاهيم أو وصف أشياء معينة.

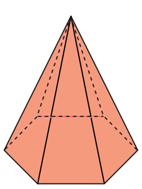


وعلمت أن المستوي هو سطح يمتد إلى ما لا نهاية في جميع الاتجاهات مثل سطح الطاولة أو سطح السبورة وغيرها.

يمثل المستوي هندسيًّا بشكل رباعي أو أي منحنى مغلق (غالبًا ما يكون متوازي أضلاع) ويرمز له بالرمز π أو بثلاث نقاط على هذا المستوي ليست على استقامة واحدة A, B, C مثلًا ويرمز إليه بالرمز (ABC). يضم المستوي مجموعة غير منتهية من النقاط. الأشكال المستوية مثل المثلث، المستطيل، شبه المنحرف، الدائرة وغيرها هي أشكال **ذات بعدين**.

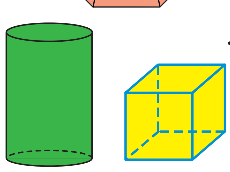


كذلك سبق لك دراسة بعض المجسمات مثل المكعب، المنشور، الهرم، الأسطوانة، المخروط، الكرة وغيرها وهذه المجسمات تشغل حيّزًا من الفراغ وتوصف بأنها أشكال هندسية ذات **ثلاثة أبعاد** (ثلاثية الأبعاد).
لذلك تسمى أشكال الفراغ الثلاثي.



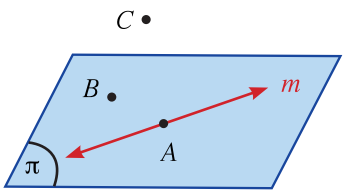
تهتم الهندسة الفراغية (هندسة الفضاء) بدراسة:

- الأشكال الهندسية ثلاثية الأبعاد.
- تقاطع المستقيمات، تقاطع المستويات وتقاطع المستقيمات والمستويات.
- الحجوم.
- مساحات الأسطح.



وذلك وفق قوانين ونظريات مثبتة.

وكما أن المستقيم مجموعة غير منتهية من النقاط، والمستوي مجموعة غير منتهية من النقاط فالفضاء أيضًا مجموعة غير منتهية من النقاط ويرمز له بالرمز (S) وتكون الخطوط والمستقيمات والمستويات والسطوح والأجسام مجموعات جزئية من الفضاء (S).



في الشكل المجاور، النقطتان A, B تنتميان إلى المستوي π

ونكتب: $B \in \pi$ ، $A \in \pi$ بينما C نقطة خارج المستوي أي أن $C \notin \pi$

كذلك $A \in \overleftrightarrow{m}$ ، $B \notin \overleftrightarrow{m}$

(المستقيم m) موجود داخل المستوي π أي أنه محتوى في المستوي π

ونكتب: $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

ونقول أيضًا إن المستوي π يحوي $\overleftrightarrow{m}$

مسلمات (موضوعات) الفضاء — Space Postulates

يرتكز بناء علم الهندسة على مجموعة من النظريات الهندسية التي يتم إثباتها انطلاقًا من التسليم بصحة عبارات رياضية أولية نقبلها دون برهان تسمى «المسلمات» أو «الموضوعات» ومنها:

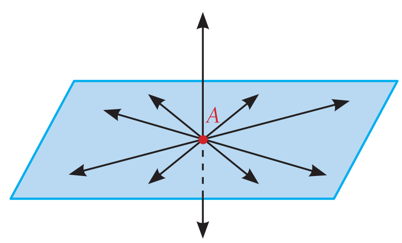
a

(i) أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم وحيد (واحد فقط).

(ii) كل مستقيم يحوي على الأقل نقطتين مختلفتين.

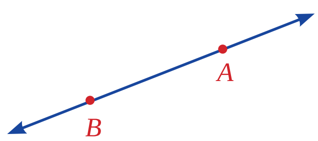
(iii) من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.

أي نقطة يمر بها عدد لا نهائي من المستقيمات في المستوي أو في الفضاء. ولكن أي نقطتين مختلفتين يمر بهما مستقيم وحيد لذلك يعيّن المستقيم بنقطتين مختلفتين.



نقطة واحدة

عدد لا نهائي من المستقيمات

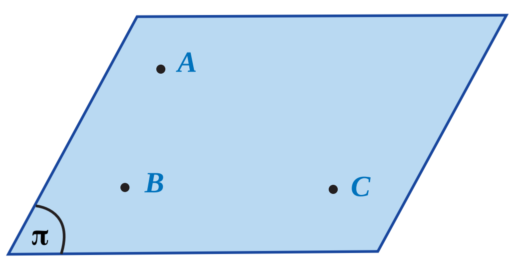


نقطتان مختلفتان

مستقيم واحد فقط

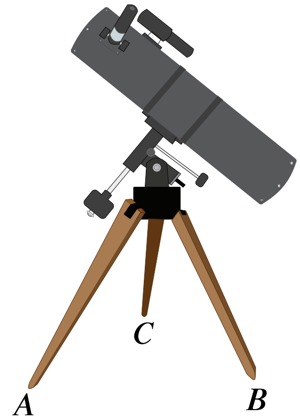
b

(i) في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة.



A, B, C ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة

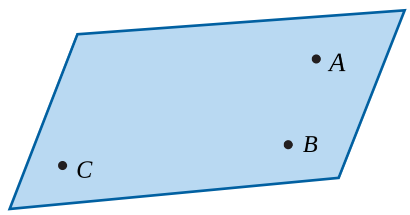
(ii) أي ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يحويها مستوٍ وحيد.



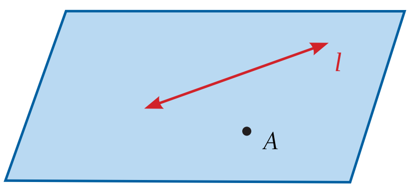
الحامل الثلاثي مستقر على المستوي الذي
يحوي الأطراف الثلاثة: A, B, C

حالات تعيين المستوي في الفضاء

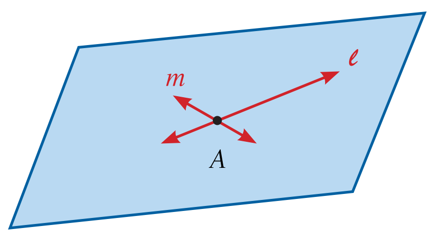
- أي ثلاث نقاط مختلفة ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعينان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعينان مستويًا واحدًا فقط.



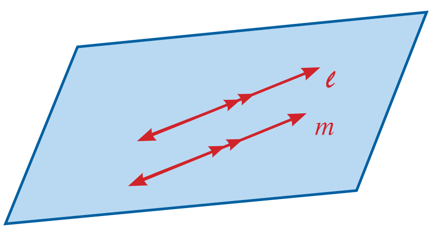
ثلاث نقاط غير مستقيمة



مستقيم ونقطة خارجة عنه

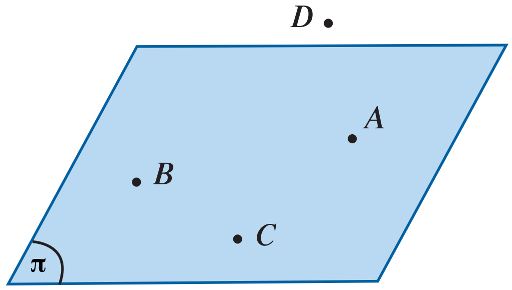


مستقيمان متقاطعان



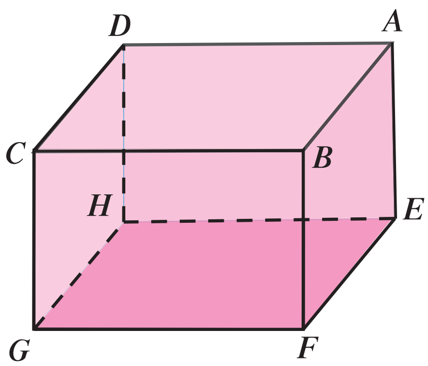
مستقيمان متوازيان

c يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.



النقاط A, B, C, D لا تقع في مستوٍ واحد

تدريب (1)



في الشكل المقابل شبه مكعب. أكمل:

a المستوي $ABCD$ يتعين بالمستقيمين المتوازيين .... ، ....

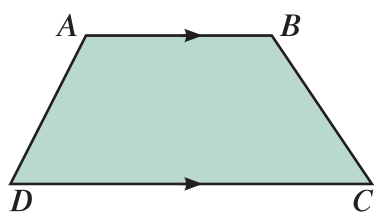
b المستوي HFG يتعين بالمستقيمين المتقاطعين .... ، ....

c المستوي $DBFH$ يتعين بالمستقيمين .... ، .... المتوازيين.

d المستوي $AEHD$ يتعين بالمستقيم .... والنقطة ....

e المستوي ABC، هو نفس المستوي .... أو ....

مثال (1)



أثبت أن أضلاع أي شبه منحرف تقع جميعها في مستوٍ واحد.

الحل:

المعطيات: $ABCD$ شبه منحرف فيه $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$

المطلوب: إثبات أن $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

البرهان:

$\because\ \overline{AB} \parallel \overline{DC}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{DC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{DC}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π

$\because$ النقطتين A , D تنتميان إلى المستوي π

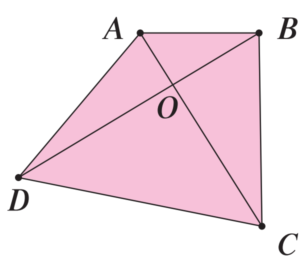
$\therefore\ \overline{AD} \subset \pi$

$\because$ النقطتين B , C تنتميان إلى المستوي π

$\therefore\ \overline{BC} \subset \pi$

$\therefore$ $\overline{AB}$, $\overline{BC}$, $\overline{CD}$, $\overline{DA}$ تقع في مستوٍ واحد.

حاول أن تحل



1 في الشكل المقابل $\overline{AC}$, $\overline{BD}$ يتقاطعان في O
أثبت أن أضلاع الرباعي $ABCD$ تقع جميعها في مستوٍ واحد.

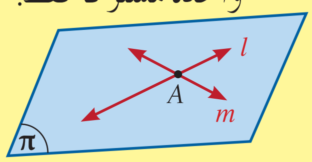
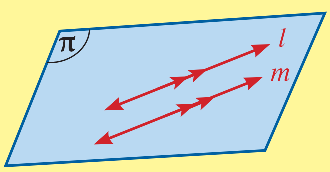
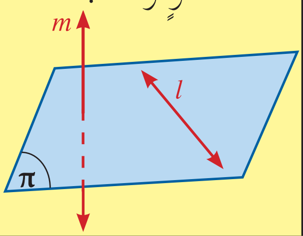
أوضاع المستقيمات في الفضاء Positions of Lines in Space

l, m مستقيمان مختلفان في الفضاء.

في الهندسة المستوية يكون مستقيمان متوازيين أو متقاطعين.

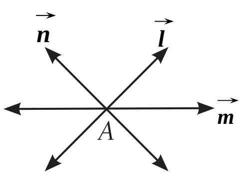
أما في الهندسة الثلاثية الأبعاد فهناك **ثلاثة أوضاع: متقاطعان أو متوازيان أو متخالفان.**

يقال لمستقيمين مختلفين في الفضاء أنهما:

a متقاطعان	b متوازيان	c متخالفان
إذا وقعا في مستوٍ واحد وكان بينهما نقطة واحدة مشتركة فقط. 	إذا وقعا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين. 	إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد. 
$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \{A\}$ **مستقيمان متقاطعان**	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \subset \pi\ ,$ $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi \Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$ **مستقيمان متوازيان**	$\overleftrightarrow{l} \subset \pi\ ,\ \overleftrightarrow{m} \not\subset \pi$ $\Longrightarrow \overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} = \phi$ **مستقيمان متخالفان**

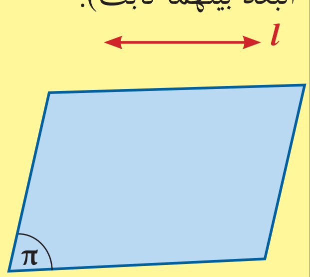
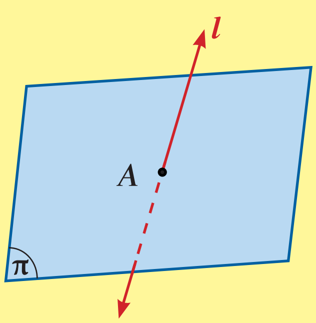
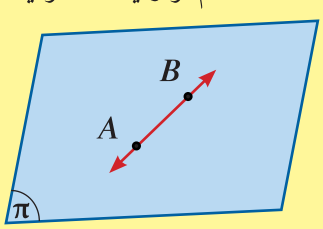
ملاحظات:

- **تتقاطع عدة مستقيمات مختلفة إذا وجدت نقطة وحيدة مشتركة بينها أي أن:**
  $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \cap \ldots \cap \overleftrightarrow{n} = \{A\}$
- **مستقيمات الفضاء لا يمكن أن تقع جميعها في مستوٍ واحد.**
- **كل مستقيم يوازي نفسه.**



أوضاع مستقيم ومستوٍ في الفضاء Positions of a Line and a Plane in Space

إن معرفة عدد النقاط المشتركة بين مستقيم ومستوٍ في الفضاء تسمح بمعرفة أوضاعهما وهي:

a صفر نقطة مشتركة:	b نقطة مشتركة واحدة:	c نقطتان مختلفتان مشتركتان على الأقل
المستقيم موازٍ للمستوي (في هذه الحالة يكون البعد بينهما ثابت). 	المستقيم يقطع المستوي. 	المستقيم يقع بكامله (بتمامه) في المستوي (المستقيم يوازي المستوي). 
$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \phi \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$	$\overleftrightarrow{l} \cap \pi = \{A\}$	$\overleftrightarrow{AB} \cap \pi = \overleftrightarrow{AB} \Rightarrow \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$ $\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$

معلومة:
القسم غير المرئي من المستقيم $\overleftrightarrow{m}$ يمثل بخط متقطع.

معلومة:
الضلع في شبه المكعب يسمى «حرف».
كل سطح في شبه المكعب يسمى «وجه».

معلومة:
سنعتبر الحرف الأول في رمز أي هرم هو رأس الهرم. مثلًا الهرم: ABCD رأسه هو A..

تدريب (2)

في الصورة المقابلة، أشر إلى:

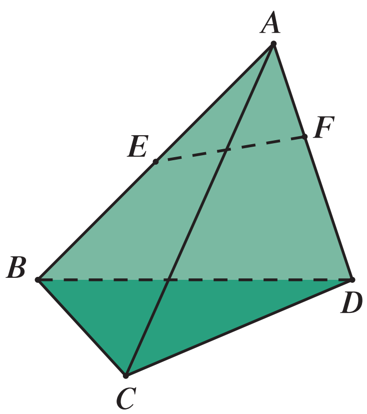
a مستقيمين متخالفين.

b مستقيم موازٍ لمستوٍ.

c مستقيم يقطع مستوٍ.

d مستقيم يقع في مستوٍ.

مثال (2)



إذا كان $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$، النقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$.

$\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

أثبت أن: a $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

المعطيات: $ABCD$ هرم ثلاثي القاعدة.

النقطة E تنتمي إلى $\overline{AB}$ والنقطة F تنتمي إلى $\overline{AD}$ بحيث $\overleftrightarrow{EF}$ لا يوازي $\overleftrightarrow{BD}$.

a المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

البرهان:

$\because\ E \in \overline{AB}\ ,\ \overline{AB} \subseteq (ABD)$

$\therefore\ E \in (ABD)$

$\because\ F \in \overline{AD}\ ,\ \ \overline{AD} \subseteq (ABD)$

$\therefore\ F \in (ABD)$

النقطتان $E\ ,F$ تنتميان إلى (ABD)

$\therefore\ \overleftrightarrow{EF} \subseteq (ABD)$

b المطلوب: إثبات أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (ACD)

البرهان:

$\because\ F \in \overline{AD}\ ,\ \ \overline{AD} \subseteq (ACD)$

$\therefore\ F \in (ACD) \qquad (1)$

$E \notin (ACD) \qquad (2)$

∵ E, F نقطتان مختلفتان

∴ تحددان مستقيم وحيد $\overleftrightarrow{EF}$ (3)

من (1)، (2)، (3) ينتج أن:

$\overleftrightarrow{EF}$ يشترك مع (ACD) في نقطة واحدة، أي يقطعه.

حاول أن تحل

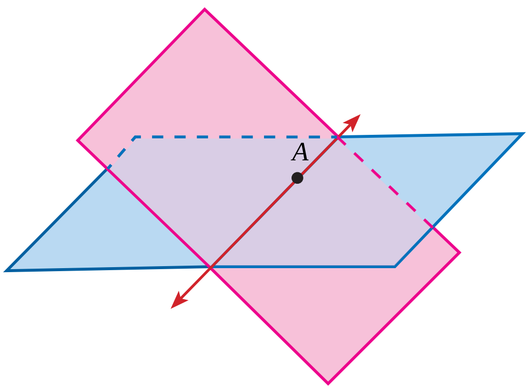
2 في مثال (2)، أثبت أن $\overleftrightarrow{EF}$ يقطع (BCD).

أوضاع مستويين في الفضاء Positions of Two Planes in Space

يمكن أن يمر عدد لا نهائي من المستويات في مستقيم واحد.
فكّر في باب مفتوح في أوضاع مختلفة.
تمثّل كل وضعية من واجهة الباب مستويًا يمر عبر خط وهمي تحدده مصاريع الباب.

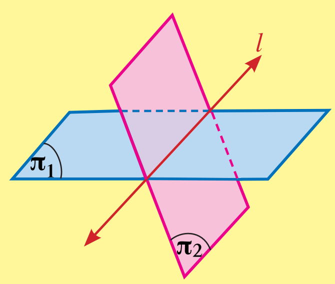
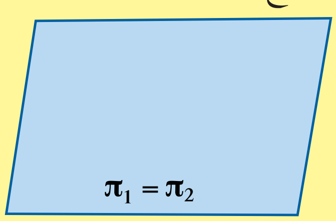
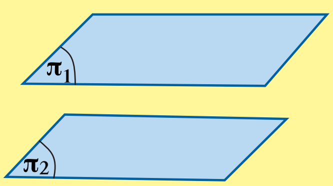
إذا اشترك مستويان مختلفان في نقطة فإنه يوجد على الأقل نقطة أخرى مشتركة بين هذين المستويين.

إذا تقاطع مستويان مختلفان فإنهما يتقاطعان في مستقيم.



إذا اشترك مستويان في ثلاث نقاط مختلفة وليست على استقامة واحدة يكون المستويان منطبقين.

يمكن حصر أوضاع مستويين في الفضاء بثلاث حالات:

a المستويان متقاطعان في مستقيم. 	b المستويان منطبقان (يشتركان في جميع النقاط). 	c المستويان متوازيان (لا توجد نقاط مشتركة بينهما). 
$\pi_1 \cap \pi_2 \neq \phi \Longrightarrow \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l}$	$\pi_1 = \pi_2 \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$	$\pi_1 \cap \pi_2 = \phi \Longrightarrow \pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$

مثال (3)

l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد تتقاطع مثنى مثنى.

أثبت أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة.

الحل:

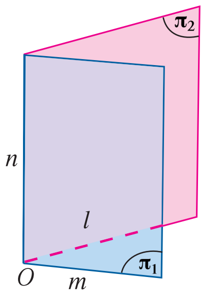
المعطيات:

l, m, n ثلاثة مستقيمات لا تقع في مستوٍ واحد بحيث إن:

$\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{m} \neq \phi$, $\overleftrightarrow{l} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi$, $\overleftrightarrow{m} \cap \overleftrightarrow{n} \neq \phi$

المطلوب:

إثبات أن المستقيمات الثلاثة تتقاطع في نقطة واحدة فقط.



البرهان:

$\because$ المستقيمان m , n متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_1

$\because$ المستقيمان l , n متقاطعان

$\therefore$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن π_2

ولتكن O نقطة تقاطع المستقيمين l, m

(1) $O \in \overleftrightarrow{m} \ \therefore \ O \in \pi_1$

(2) $O \in \overleftrightarrow{l} \ \therefore \ O \in \pi_2$

من (1) , (2) $O \in \pi_1 \cap \pi_2$

$\because \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}$

$\therefore \ O \in \overleftrightarrow{n}$

$\therefore$ O نقطة مشتركة بين المستقيمات الثلاثة وبالتالي تتقاطع المستقيمات l , m , n في نقطة واحدة.

حاول أن تحل

3. $\overleftrightarrow{l} , \overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{n}$ ثلاثة مستقيمات مختلفة تتقاطع في A.
المستقيم t يقطع المستقيمات الثلاثة في B, C, D على الترتيب.
أثبت أن المستقيمات l , m , n , t تقع في مستوٍ واحد.

معلومة:
تتقاطع عدة مستقيمات مثنى مثنى تعني أن كل مستقيمين يتقاطعان في نقطة.

معلومة:
يرسم الجزء غير المرئي من الشكل بخط متقطع.

10-2

المستقيمات والمستويات المتوازية في الفضاء

Parallel Lines and Planes in Space

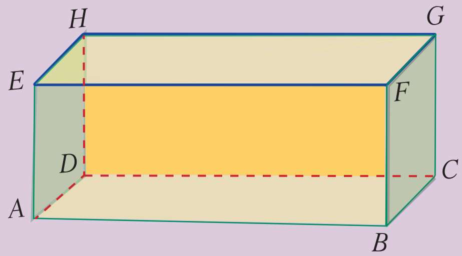
سوف تتعلم

- المستقيمات في الفضاء.
- المستويات في الفضاء.
- مواقع المستقيمات والمستويات في الفضاء.

المفردات والمصطلحات:

- تقاطع المستويات Intersecting Planes
- مستويان متقاطعان Two Intersecting Planes
- مستويان متوازيان Two Parallel Planes
- حرف Edge
- وجه Face

دعنا نفكر ونتناقش

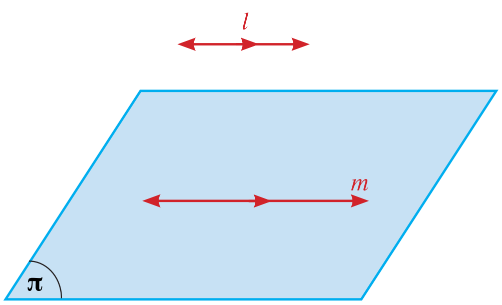


في شبه المكعب المقابل.

1. اذكر:
   - a زوجين من الأحرف المتوازية.
   - b زوجين من الأحرف المتقاطعة.
   - c حرفًا يوازي $\overline{HG}$.
2. هل يمكن أن يقطع $\overleftrightarrow{EF}$ المستوي $ABCD$؟ اشرح.
3. إذا كانت النقطة O منتصف $\overline{BF}$. هل يمكن أن يقطع $\overleftrightarrow{AO}$ المستوي $EFGH$؟ اشرح.
4. - a كيف يتقاطع المستويان AOD و $BCGF$؟
   - b حدد في أي نقطة يقطع المستوي AOD الحرف $\overline{CD}$؟

نظرية (1)

إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.



المعطيات:

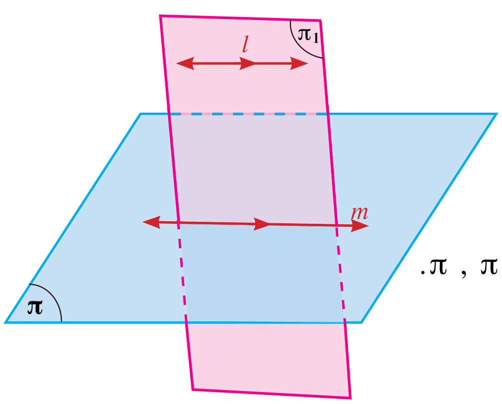
$\overleftrightarrow{l}$ خارج المستوي π.

$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{m} \subset \pi$

المطلوب:

إثبات أن $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

البرهان:



$\because\ \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}, \overleftrightarrow{m}$ يعينان مستويًا وحيدًا π_1

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{m}$

لنفرض أن: $\overleftrightarrow{l}$ لا يوازي π.

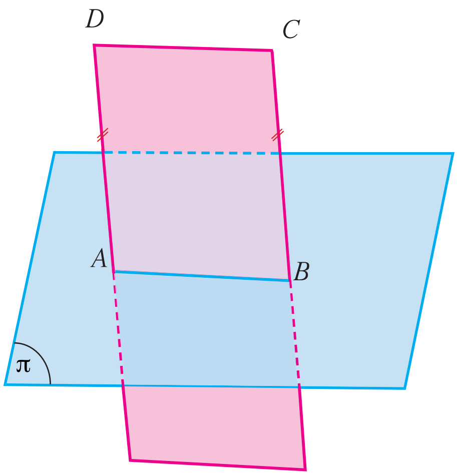
$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ يقطع π في نقطة تنتمي إلى خط تقاطع π_1 , π.

أي أنها نقطة تنتمي إلى $\overleftrightarrow{m}$

وهذا يخالف الفرض لأن $\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{l}$ لا يمكن أن يقطع المستوي π، وبالتالي $\overleftrightarrow{l} \parallel \pi$.

مثال (1)



في الشكل المقابل: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

أثبت أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

الحل:

المعطيات: $AD = BC$ ، $\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$ ، $\overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

المطلوب: إثبات أن: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

$\therefore$ $\overleftrightarrow{BC}$, $\overleftrightarrow{AD}$ يعينان مستويًا وحيدًا وليكن $(ABCD)$ فيه

$\overleftrightarrow{AD} \parallel \overleftrightarrow{BC}$, $AD = BC$

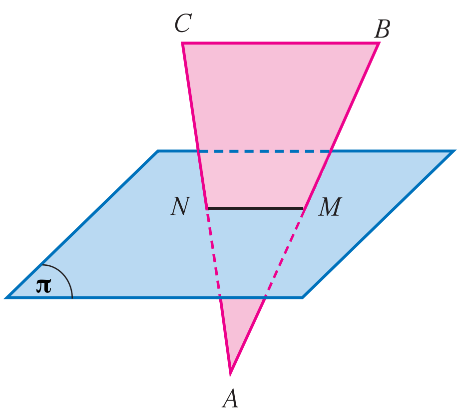
$\therefore$ $ABCD$ متوازي أضلاع

ومنه $\overleftrightarrow{DC} \parallel \overleftrightarrow{AB}$

(معطى) $\because \overleftrightarrow{AB} \subset \pi$

(نظرية) $\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

حاول أن تحل

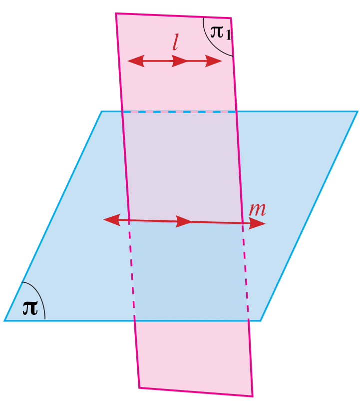


1 في الشكل المقابل: المثلث ABC فيه M منتصف $\overline{AB}$ ، N منتصف $\overline{AC}$ ، M ، N تنتميان إلى المستوى π .

أثبت أن $\overleftrightarrow{BC} \parallel \pi$.

نظرية (2)

إذا وازى مستقيم مستويًا، فكل مستوٍ مار بالمستقيم ويقطع المستوي، يقطعه في مستقيم موازٍ للمستقيم المعلوم.

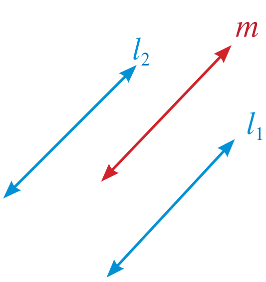


$\because \overleftrightarrow{l} \parallel \pi$, $\overleftrightarrow{l} \subset \pi_1$, $\pi_1 \cap \pi = \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l}$

نظرية (3)

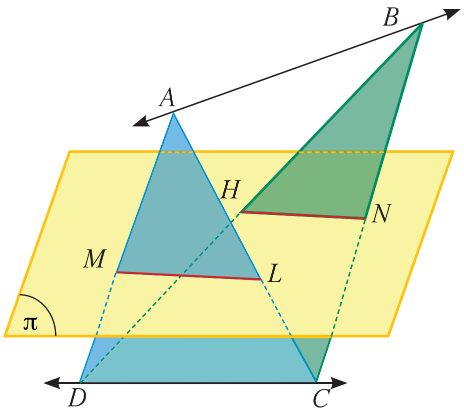
المستقيمان الموازيان لمستقيم ثالث في الفضاء متوازيان.



$\because \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{m}$, $\overleftrightarrow{l_2} \parallel \overleftrightarrow{m}$

$\therefore \overleftrightarrow{l_1} \parallel \overleftrightarrow{l_2}$

مثال (2)



في الشكل المقابل: إذا كان $\overleftrightarrow{AB}, \overleftrightarrow{CD}$ متخالفان، $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$.

$\overleftrightarrow{AD}$ تقطع π في M، $\overleftrightarrow{AC}$ تقطع π في L.

$\overleftrightarrow{BD}$ تقطع π في H، $\overleftrightarrow{BC}$ تقطع π في N.

أثبت أن: $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

الحل:

المعطيات: $\overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$

$\overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}$

$\overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$

$\overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}$

$\overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$

المطلوب: إثبات $\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{NH}$

البرهان:

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \overleftrightarrow{AC} = \{A\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (ADC)

$\because \overleftrightarrow{AD} \cap \pi = \{M\}\ ,\ \overleftrightarrow{AC} \cap \pi = \{L\}$ (معطى)

$\therefore (ADC) \cap \pi = \overleftrightarrow{ML}$ (1)

$\because \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (2) (معطى)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (ACD)$ (3)

من (1), (2), (3) نجد أن:

$\overleftrightarrow{LM} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (4) نظرية

$\because \overleftrightarrow{BC} \cap \overleftrightarrow{BD} = \{B\}$ (معطى)

$\therefore$ المستقيمان يعينان مستويًا وحيدًا وهو (BCD)

$\because \overleftrightarrow{BD} \cap \pi = \{H\}\ ,\ \overleftrightarrow{BC} \cap \pi = \{N\}$ (معطى)

$\because (BCD) \cap \pi = \overleftrightarrow{HN}$ (5)

$\therefore \overleftrightarrow{CD} \parallel \pi$ (6)

$\overleftrightarrow{CD} \subset (BCD)$ (7)

من (7), (6), (5) نجد أن:

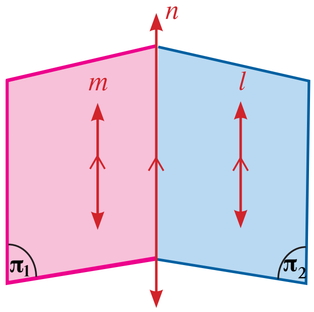
$\overleftrightarrow{HN} \parallel \overleftrightarrow{CD}$ (8) نظرية

من (8), (4) نستنتج أن:

$\overleftrightarrow{ML} \parallel \overleftrightarrow{HN}$ نظرية

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \parallel \pi$ فأثبت أن $LMHN$ متوازي أضلاع.



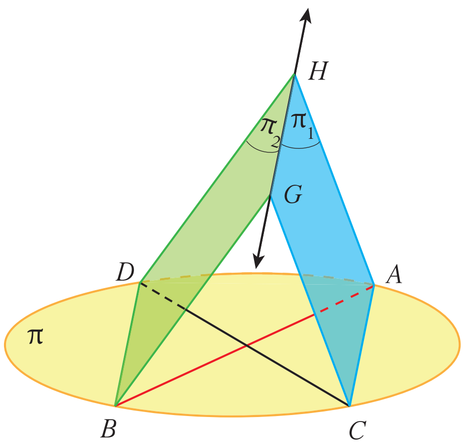
نتيجة (1)

إذا توازى مستقيمان ومرّ بهما مستويان متقاطعان،

فإن تقاطعهما هو مستقيم يوازي كلًّا من هذين المستقيمين.

$$(\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \;,\; \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 \;,\; \overleftrightarrow{l} \subset \pi_2 \;,\; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{n}) \Rightarrow (\overleftrightarrow{m} \parallel \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{n})$$

مثال (3)



في الشكل المقابل: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في مستوي الدائرة π.

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

أثبت أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$.

الحل:

المعطيات: $\overline{AB}$, $\overline{CD}$ قطران في الدائرة

$\pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$

المطلوب: إثبات أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

البرهان:

$\because$ $\overline{CD}$, $\overline{AB}$ قطران في الدائرة

$\therefore$ ينصف كل منهما الآخر ومتطابقان

$\therefore$ الشكل $ACBD$ مستطيل

$\therefore \overline{AC} \parallel \overline{DB}$ (1)

$\because \overline{AC} \subset \pi_1 \;,\; \overline{DB} \subset \pi_2 \;,\; \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{GH}$ (2)

من (1), (2)

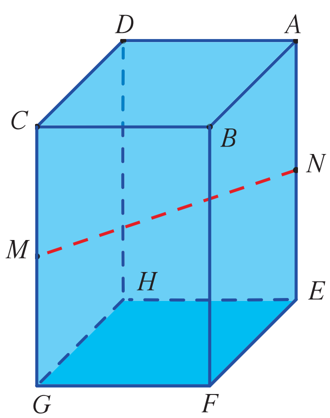
$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \parallel \overleftrightarrow{DB}$

$\because \overleftrightarrow{GH} \parallel \overleftrightarrow{AC} \;,\; \overleftrightarrow{AC} \subset \pi$

$\therefore \overleftrightarrow{GH} \parallel \pi$

أي أن مستوي الدائرة π يوازي $\overleftrightarrow{GH}$

حاول أن تحل



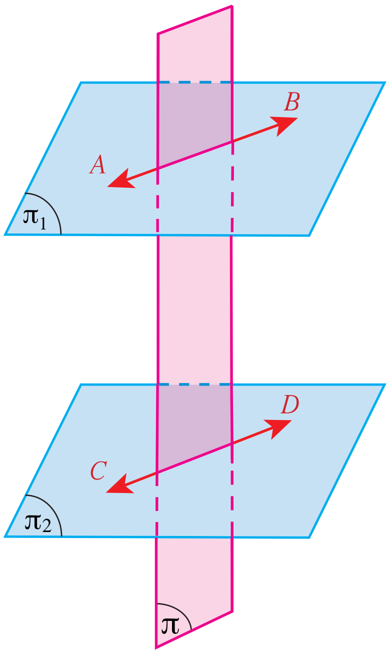
3 $ABCDEFGH$ شبه مكعب.

M منتصف $\overline{CG}$, N منتصف $\overline{AE}$.

أثبت أن $(EFGH)$ يوازي $\overleftrightarrow{MN}$.

نظرية (4)

إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.



المعطيات: $\pi_1 \parallel \pi_2$

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$

$\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

المطلوب:

إثبات أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

البرهان: $\because \ \pi_1 \parallel \pi_2$ فرضًا

$\overleftrightarrow{AB} \subset \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{CD} \subset \pi_2$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \cap \overleftrightarrow{CD} = \phi$

أي أن $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ هما متوازيان أو متخالفان (1)

ولكن $\overleftrightarrow{CD}$ ، $\overleftrightarrow{AB}$ يحويهما مستوٍ واحد هو π (2)

$\therefore$ من (2) ,(1) نستنتج أن: $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

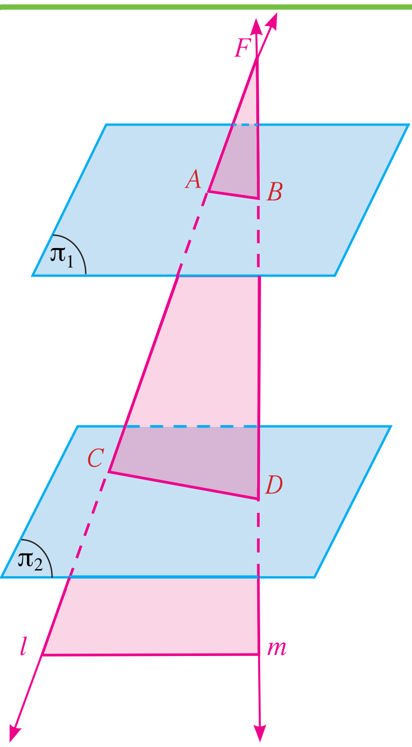
مثال (4)

في الشكل المقابل: π_1 , π_2 مستويين متوازيين.

$\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F ويقطعان كلًّا من π_1 في A, B، π_2 في C, D

إذا كان $BD = 4\text{ cm}$ ، $AC = 6\text{ cm}$ ، $CD = 9\text{ cm}$ ، $FB = 5\text{ cm}$

فأوجد محيط المثلث FAB



الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \parallel \pi_2$

$\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ متقاطعان في F ويقطعان π_1 في A, B، π_2 في C, D

$BD = 4\text{ cm}$ ، $AC = 6\text{ cm}$ ، $CD = 9\text{ cm}$ ، $FB = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد محيط المثلث FAB.

البرهان:

$\because$ $\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ مستقيمان متقاطعان في F

$\therefore$ $\overleftrightarrow{m} , \overleftrightarrow{l}$ يعينان مستوٍ واحد π

$\because$ π_2 ، π_1 متوازيان.

$\pi \cap \pi_1 = \overleftrightarrow{AB}$ ، $\pi \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{CD}$

(نظرية 4) $\therefore\ \overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

في المستوي π ، $\overleftrightarrow{AB} \parallel \overleftrightarrow{CD}$

$\therefore$ المثلثان FAB, FCD متشابهان

نكتب التناسب: $\dfrac{FB}{FD} = \dfrac{FA}{FC} = \dfrac{AB}{CD}$

بالتعويض: $\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{FA}{FA+6} = \dfrac{AB}{9}$

$$\frac{5}{5+4} = \frac{FA}{FA+6}$$

تعطي: $9FA = 5(FA+6)$

$$4FA = 30 \implies FA = 7.5\text{ cm}$$

كذلك $\dfrac{5}{5+4} = \dfrac{AB}{9}$

تعطي: $9AB = 45 \implies AB = 5\text{ cm}$

محيط المثلث FAB يساوي:

$$FA + FB + AB = 7.5\text{ cm} + 5\text{ cm} + 5\text{ cm}$$

$$= 17.5\text{ cm}$$

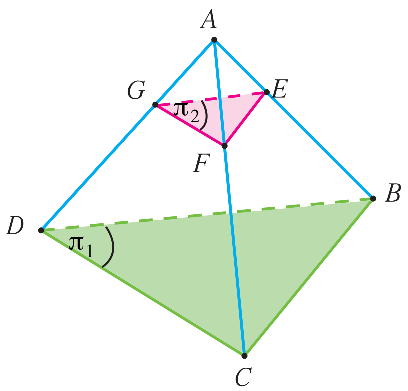
حاول أن تحل

4 في الشكل المقابل، $ABCD$ هرم ثلاثي.

المستويان π_1 , π_2 متوازيان.

إذا كان $\dfrac{AE}{EB} = \dfrac{1}{3}$ ، $FG = 6\text{ cm}$

فأوجد DC



10–3

تعامد مستقيم مع مستوٍ

Perpendicular Line With a Plane

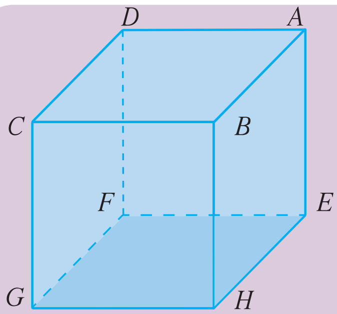
سوف تتعلم

- إيجاد قياس الزاوية بين مستقيمين متخالفين.
- تعامد مستقيم مع مستوٍ.

• المفردات والمصطلحات:

- مستقيم عمودي
Perpendicular Line
- مستقيمين متخالفين
Two Skew Lines

دعنا نفكر ونتناقش



في المكعب المقابل:

a هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BH}$ متعامدين؟

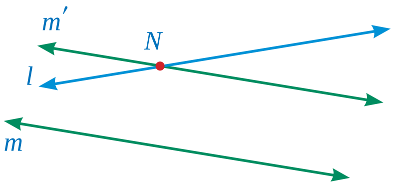
b هل $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{BG}$ متعامدين؟

c هل $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{GE}$ متعامدين؟

d سمّ زوجين من المستقيمات المتعامدة.

الزاوية بين مستقيمين متخالفين Angle Between Two Skew Lines

الزاوية بين مستقيمين متخالفين هي الزاوية التي يصنعها أحدهما مع أي مستقيمٍ قاطعٍ له وموازٍ للآخر.



$\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m}$ مستقيمان متخالفان في الفضاء.

نأخذ النقطة N على أحد المستقيمين وليكن $\overleftrightarrow{l}$

نرسم $\overleftrightarrow{m'}$ بحيث $\overleftrightarrow{m'}$ يوازي $\overleftrightarrow{m}$ ويمر بالنقطة N

الزاوية بين المستقيمين l , m' هي إحدى الزوايا الناتجة عن تقاطع $\overleftrightarrow{l}$, $\overleftrightarrow{m'}$

$\hat{N}$ = **الزاوية الحادة** بين المستقيمين l , m

ملاحظة: لا تتأثر الزاوية بتغير موقع النقطة N

> **معلومة:**
> المستقيم الذي يقطع مستوٍ ولا يكون عموديًّا عليه، يكون مائلًا على هذا المستوى.

تدريب

في المكعب المرسوم في فقرة «دعنا نفكر ونتناقش»، أوجد قياس الزاوية بين:

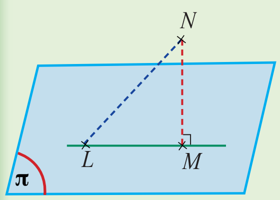
a $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{CG}$

b $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GE}$

c $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{GF}$

d $\overleftrightarrow{BE}$, $\overleftrightarrow{BG}$

e $\overleftrightarrow{BD}$, $\overleftrightarrow{GE}$

> **معلومة:**
>
> 
>
>
> $\overline{NM}$ هو البعد بين النقطة N والمستوي π.
> هذا البعد هو أقصر مسافة بين N وأي نقطة في المستوي.
> $NM < NL , \forall L \in \pi$

تعريف

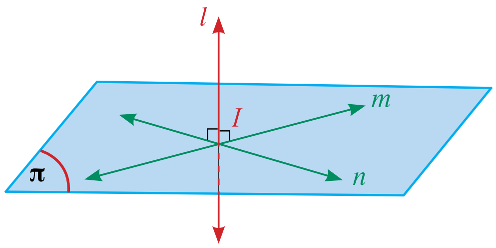
يكون المستقيم l عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في π ويرمز لذلك بـ : $\overleftrightarrow{l} \perp \pi$

نقول أيضًا إن π عمودي على $\overleftrightarrow{l}$

ونرمز لذلك بـ: $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$

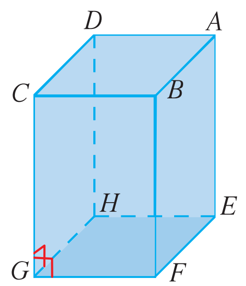
والعكس صحيح ،

إذا كان $\pi \perp \overleftrightarrow{l}$ فإن l عموديًّا على كل المستقيمات في المستوي π



نظرية (5)

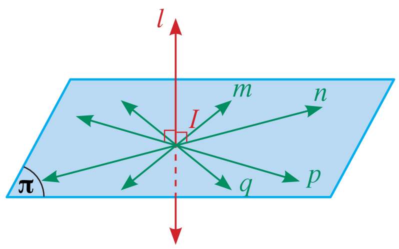
المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستويهما.



$$\left.\begin{array}{l}\overleftrightarrow{GF} \cap \overleftrightarrow{GH} = \{G\} \\ \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GF} \;\;,\;\; \overleftrightarrow{CG} \perp \overleftrightarrow{GH}\end{array}\right\} \Rightarrow \overleftrightarrow{CG} \perp (EFGH)$$

نتيجة (2)

جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.

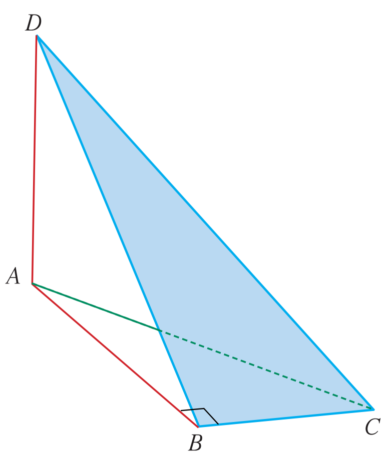


مثال (1)

في الشكل المقابل، المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$.

أثبت أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$



الحل:

المعطيات:

المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC)$

المطلوب:

إثبات أن المثلث DBC قائم في $\widehat{B}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AD} \perp (ABC) \;,\; \overleftrightarrow{BC} \subset (ABC)$ (معطى)

$\overleftrightarrow{AD} \perp \overleftrightarrow{BC}$ (1) (تعريف)

$\because$ المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{AB} \quad (2)$

$\because$ المستقيمان $\overleftrightarrow{AB}$, $\overleftrightarrow{AD}$ متقاطعان

$\therefore$ يعينان المستوي (ABD) $\qquad (3)$

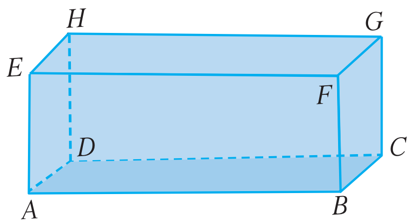
من $(1), (2), (3)$ $\qquad \therefore \overleftrightarrow{BC} \perp (ABD)$

$\because \quad \overleftrightarrow{BD} \subset (ABD)$

$\therefore \quad \overleftrightarrow{BC} \perp \overleftrightarrow{BD}$ $\qquad$ (تعريف)

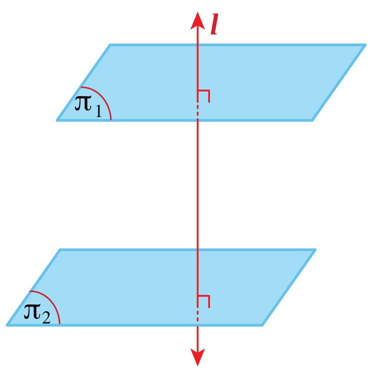
$\therefore$ المثلث BCD قائم في $\widehat{B}$.

حاول أن تحل



1 في شبه المكعب المقابل،

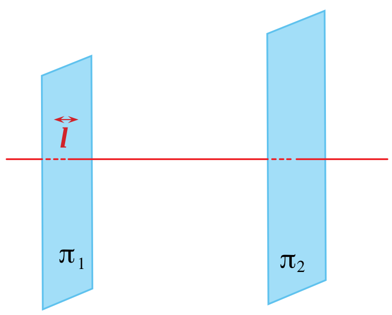
أثبت أن المثلث BEH قائم في $\widehat{E}$.



نظرية (6)

إذا كان مستقيم عموديًّا على كلٍّ من مستويين مختلفين فإنهما يكونان متوازيين.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2 \implies \pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$$

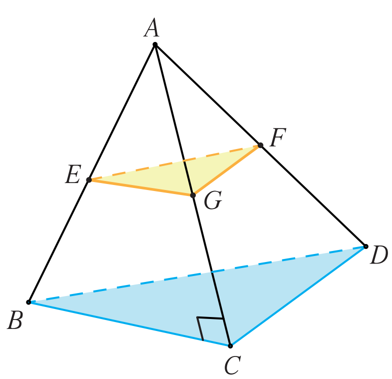


نظرية (7)

إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi_1 \ , \ \pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2 \implies \overleftrightarrow{l} \perp \pi_2$$

مثال (2)



في الشكل المقابل:

A نقطة خارج المستوى BCD،

والنقاط E, G, F منتصفات $\overline{AD}$, $\overline{AC}$, $\overline{AB}$ على الترتيب.

إذا كان $\overline{AC} \perp \overline{CB}$

وكان $AD = 13\text{ cm}$ ، $AC = 12\text{ cm}$ ، $CD = 5\text{ cm}$

فأثبت أن: $(BCD) \mathbin{/\mkern-6mu/} (EGF)$.

الحل:

المعطيات:

E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$ ، F منتصف $\overline{AD}$

$AD = 13\text{ cm}\ ,\ AC = 12\text{ cm}\ ,\ CD = 5\text{ cm}$

المطلوب:

إثبات أن: $(EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$

البرهان:

في $\Delta\, ACD$:

$(AC)^2 + (CD)^2 = (12)^2 + (5)^2 = 169 \quad (1)$

$(AD)^2 = (13)^2 = 169 \quad (2)$

من $(1), (2)$ نجد أن $\Delta\, ACD$ قائم الزاوية في C.

$\therefore\ \overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CD}$

ولكن $\overleftrightarrow{AC} \perp \overleftrightarrow{CB}$ (معطى)

وحيث إن $\overleftrightarrow{CB}\ ,\ \overleftrightarrow{CD}$ متقاطعان

$\therefore\ \overleftrightarrow{AC} \perp (BCD)$ (نظرية 5)

في $\Delta\, ABC$

$\because$ E منتصف $\overline{AB}$ ، G منتصف $\overline{AC}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{EG} \mathbin{/\!/} \overleftrightarrow{CB}$

ولكن $m(B\widehat{C}A) = 90^\circ$

$\therefore\ m(A\widehat{G}E) = 90^\circ \Rightarrow \overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{EG}$

وبالمثل $\overleftrightarrow{AG} \perp \overleftrightarrow{GF}$

$\therefore\ \overleftrightarrow{AG} \perp (EGF)$

أي أن: $\overleftrightarrow{AC} \perp (EGF) \quad (4)$

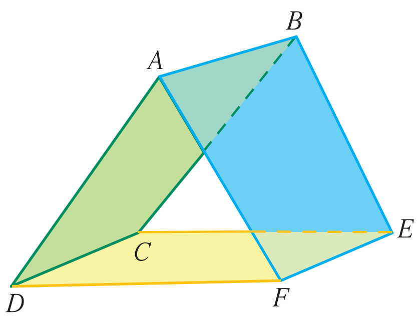
من $(3), (4)$ ينتج أن: $\therefore\ (EGF) \mathbin{/\!/} (BCD)$ نظرية (6)

حاول أن تحل

2 في الشكل المقابل:

$ABEF, ABCD$ مستطيلان

أثبت أن: $(AFD) \mathbin{/\!/} (BEC)$



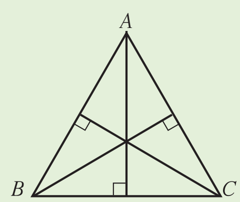
تذكر:

- إذا كان مجموع مربعي طولي ضلعين في مثلث يساوي مربع الضلع الثالث فإن هذا المثلث يكون قائم الزاوية.
- القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث.

معلومة:

مركز المربع هو نقطة تقاطع قطرية.

مركز المثلث المتطابق الأضلاع هي نقطة تلاقي محاور أضلاعه.



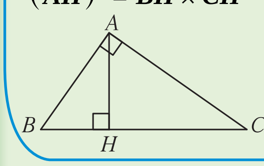
تذكر:

إذا كان ΔABC قائم الزاوية A و H المسقط العمودي لـ A على $\overleftrightarrow{BC}$ فإن:

$(AB)^2 = BH \times BC$

$(AC)^2 = CH \times CB$

$(AH)^2 = BH \times CH$



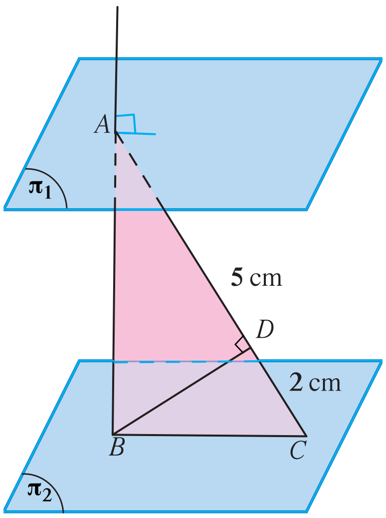
مثال (3)

في الشكل المقابل، $\overleftrightarrow{BC} \subset \pi_2$ ، $A \in \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$

رسم: $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$ في المستوى ABC

إذا كان: $DC = 2\text{ cm}$ ، $AD = 5\text{ cm}$

أوجد: BD



الحل:

المعطيات:

$\pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$ ، $\overleftrightarrow{BD} \perp \overleftrightarrow{AC}$

$AD = 5\text{ cm}$ ، $DC = 2\text{ cm}$

المطلوب:

إيجاد BD

البرهان:

$\because \pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$ ، $\overleftrightarrow{AB} \perp \pi_1$

$\therefore \overleftrightarrow{AB} \perp \pi_2$ (نظرية 7)

$\therefore$ $\overline{AB}$ عمودي على كل مستقيم في π_2

$\because \overline{BC} \subset \pi_2$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BC}$

في المثلث ABC القائم الزاوية في B

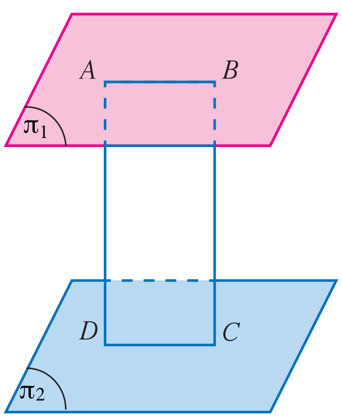
$\because \overline{BD} \perp \overline{AC}$

$\therefore (BD)^2 = AD \times DC$

$= 5 \times 2 = 10$

$BD = \sqrt{10}\text{ cm}$

حاول أن تحل



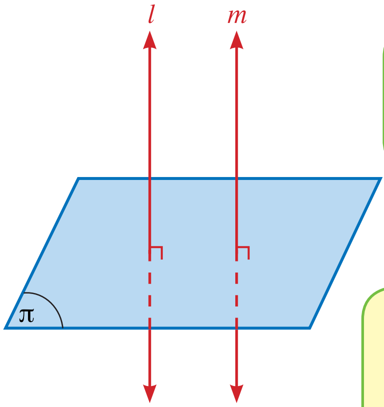
3 في الشكل المقابل: $\pi_1 \mathbin{/\mkern-6mu/} \pi_2$

A, B نقطتان في π_1،

C, D نقطتان في π_2 حيث: A, B, C, D في مستوى واحد

$\overline{AD} \perp \pi_2$ ، $\overline{BC} \perp \pi_2$

أثبت أن $ABCD$ مستطيل.



نظرية (8)

المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.

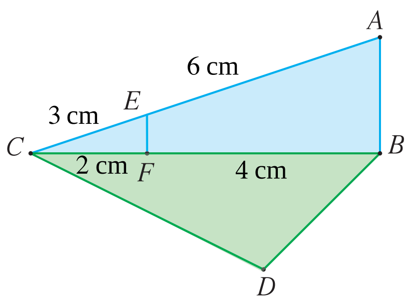
$$\overleftrightarrow{l} \perp \pi \;,\; \overleftrightarrow{m} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m}$$

نظرية (9)

إذا توازى مستقيمان أحدهما عموديًّا على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.

$$\overleftrightarrow{l} \parallel \overleftrightarrow{m} \;,\; \overleftrightarrow{l} \perp \pi \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi$$

مثال (4)



في الشكل المقابل إذا كان $\overline{AB} \perp (BCD)$

وكان $CE = 3\text{ cm}\;,\; EA = 6\text{ cm}\;,\; CF = 2\text{ cm}\;,\; FB = 4\text{ cm}$

أثبت أن: $\overline{EF} \perp \overline{DB}$

الحل:

المعطيات: $\overline{AB} \perp (BCD)$

$CE = 3\text{ cm}\;,\; EA = 6\text{ cm}\;,\; CF = 2\text{ cm}\;,\; FB = 4\text{ cm}$

المطلوب:

إثبات أن $\overline{EF} \perp \overline{BD}$

البرهان: $\because$ $\overline{AB}\,,\overline{CA}$ متقاطعان $\therefore$ يعينان مستوٍ وحيد (ABC)

في المثلث CAB:

$$\frac{CE}{EA} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

$$\frac{CF}{FB} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$\therefore\; \overline{EF} \parallel \overline{AB}$ نظرية طاليس

$\because\; \overline{AB} \perp (CBD)$

$\therefore\; \overline{EF} \perp (CBD) \quad (1)$ نظرية

$\overline{DB} \subset (CBD) \quad (2)$

من (2) ,(1) نستنتج أن:

$\overline{EF} \perp \overline{DB}$ تعريف

حاول أن تحل

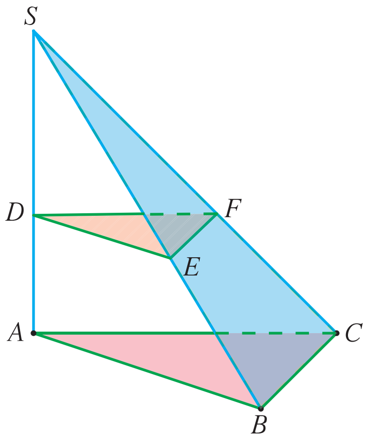
4 في الشكل المقابل:

المستويان $(DEF), (ABC)$ متوازيان

$\overleftrightarrow{SA} \perp (ABC)$

إذا كان: $AC = 6\ cm$, $BC = 5\ cm$, $DA = 2\ cm$, $SD = 3\ cm$, $SE = 5\ cm$

فأوجد محيط المثلث DEF



الزاوية الزوجية

The Dihedral Angle

سوف تتعلم
- إيجاد قياس الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية).

المفردات والمصطلحات:
- زاوية Angle
- زاوية زوجية Dihedral Angle
- قياس الزاوية Measure of an Angle

دعنا نفكر ونتناقش

هل سبق لك أن تساءلت:

a كيف بنى الأقدمون منازلهم؟ وكيف أمكنهم بناء جدران متعامدة؟

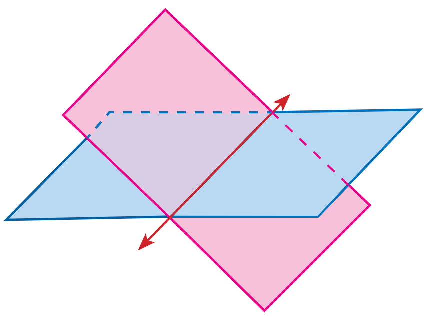
b كيف يمكن قياس الزاوية التي يصنعها أحد أوجه هرم كبير مع مستوى الأرض؟

c كيف يراقب الأخصائيون ميل برج بيزا؟ وكيف يمكنهم قياس الزاوية التي يصنعها البرج مع مستوى الأرض؟

كل هذه الأسئلة تأخذنا لدراسة قياسات الزوايا في الفضاء.

الزاوية بين مستويين (الزاوية الزوجية) The Dihedral Angle

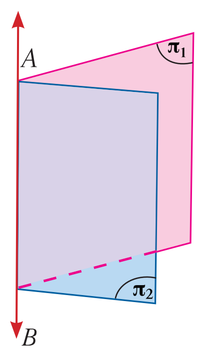
تعلمت أنه إذا تقاطع مستويان مختلفان في الفضاء فإنهما يتقاطعان في مستقيم وينتج من هذا التقاطع أربع زوايا تسمى كل منها **زاوية زوجية**.

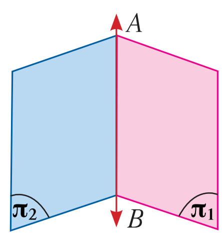


يقسم المستقيم المشترك كل مستوى إلى نصفين ويسمى المستقيم المشترك **حافة الزاوية الزوجية** أو **الفاصل المشترك**.

ويسمى كل من نصفي المستويين وجه الزاوية الزوجية.

يبيّن الشكلان أدناه زاويتين زوجيتين حافة كل منهما $\overleftrightarrow{AB}$



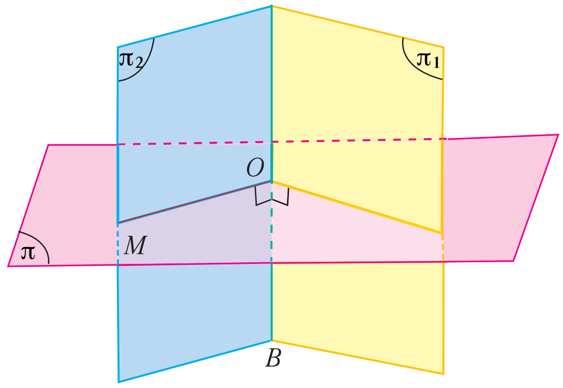


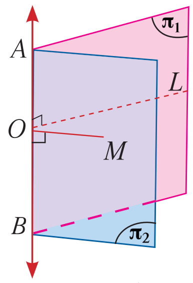
نقرأ الزاوية الزوجية بحافتها فنقول الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$، أو في حال وجود أكثر من زاوية زوجية: $(\pi_1 , \overleftrightarrow{AB} , \pi_2)$

تعريف: الزاوية المستوية لزاوية زوجية

هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.

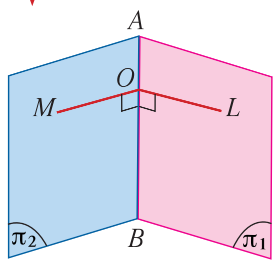
ويكون قياس الزاوية الزوجية هو قياس إحدى زواياها المستوية ودائمًا نأخذ قياس **الزاوية الحادة**.





لإيجاد قياس الزاوية الزوجية نتبع التالي:

- نحدّد حافة الزاوية الزوجية ولتكن $\overleftrightarrow{AB}$
- نأخذ نقطة O على حافة الزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{AB}$
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OL}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_1
- نرسم من O شعاعًا $\overrightarrow{OM}$ عموديًّا على $\overleftrightarrow{AB}$ يكون واقعًا بتمامه في المستوي π_2



فتكون الزاوية LOM تسمى **الزاوية المستوية** للزاوية الزوجية.

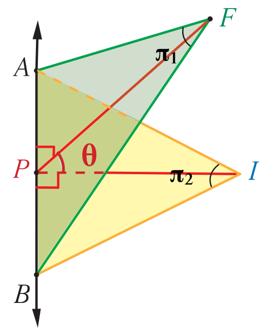
قياس الزاوية الزوجية يرمز له بالرمز $m(L\widehat{O}M)$

ونحصل على الزاوية المستوية بقطع الزاوية الزوجية بمستوٍ عمودي على حافتها.

تدريب (1)

في كل من الأشكال التالية عيّن الزاوية المستوية للزاوية الزوجيّة بين المستويين π_1, π_2.

1



$\overline{FP} \perp \overline{AB}$, $\overline{IP} \perp \overline{AB}$

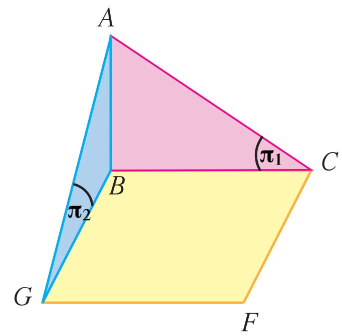
حافة الزاوية الزوجية ....

...... $\subset \pi_1$, ... $\perp \overline{AB}$

وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1, π_2

2



$\overline{AB} \perp (CBGF)$

حافة الزاوية الزوجية ....

$\overline{BC} \subset \pi_1$, ... $\perp \overline{AB}$

وكذلك .... $\subset \pi_2$, ... $\perp \overline{AB}$

$\therefore$ .... هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين π_1, π_2

ملاحظة:

لا يتغير قياس الزاوية الزوجية بتغيّر موقع O على $\overleftrightarrow{AB}$

معلومة:

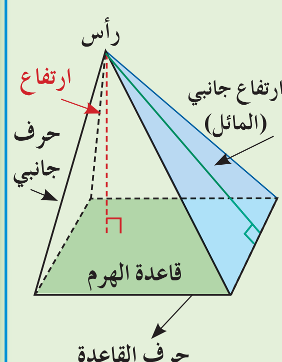
الهرم The Pyramid

هو متعدد سطوح أحد أوجهه مضلع (القاعدة) على شكل (مثلث، مستطيل، مربع، ...)، وبقية الأوجه مثلثات تلتقي في نقطة واحدة هي رأس الهرم.

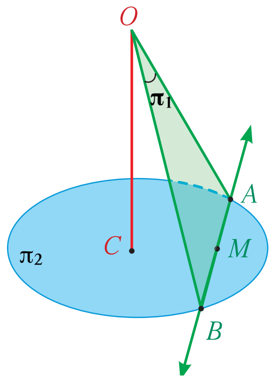
يمكن تسمية الهرم بحسب شكل قاعدته.

ارتفاع الهرم هو طول القطعة العمودية من رأس الهرم حتى القاعدة.

الارتفاع الجانبي (المائل) هو ارتفاع أحد الأوجه الجانبية.



3



M منتصف $\overline{AB}$ ، $\overline{OC} \perp \pi_2$

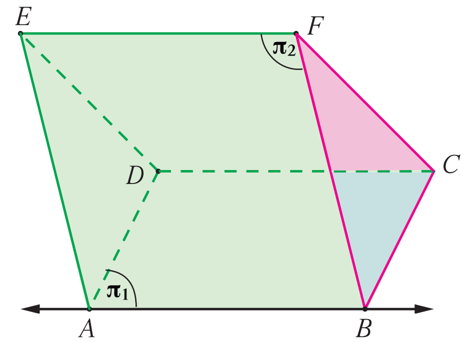
....

....

....

....

4



$ABCD$ مستطيل، $\overleftrightarrow{FC} \perp (ABCD)$

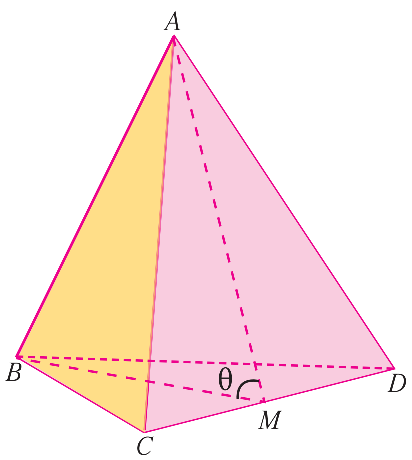
....

....

....

....

مثال (1)



يبيّن الشكل المقابل هرمًا ثلاثي القاعدة أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع طول حرفه 8 cm

M منتصف $\overline{DC}$

a حدد الزاوية المستوية بين المستويين ADC , BDC

b أوجد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

المعطيات: $ABCD$ هرم أوجهه مثلثات متطابقة الأضلاع.

طول الحرف $= 8$ cm، M منتصف $\overline{DC}$.

a المطلوب: تحديد الزاوية المستوية بين المستويين: $ADC \ , \ BDC$

البرهان:

نحدّد الزاوية المستوية بين المستويين: ADC , BDC

$\overleftrightarrow{DC}$ حافة الزاوية الزوجية (1)

المثلث ADC متطابق الأضلاع.

$\because$ M منتصف $\overline{CD}$ — من خواص Δ متطابق الأضلاع

$\therefore$ $\overline{AM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{AM} \subset (ADC)$ (2)

$\therefore$ $\overline{BM} \perp \overleftrightarrow{DC}$ حيث $\overline{BM} \subset (BDC)$ (3)

وبالمثل نجد أن: $A\hat{M}B$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

b المطلوب

إيجاد قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{DC}$

البرهان:

$\because$ المثلث AMD قائم الزاوية في M.

متطابقة فيثاغورث

$$(AM)^2=(AD)^2-(DM)^2$$
$$(AM)^2=8^2-\left(\frac{8}{2}\right)^2$$
$$(AM)^2=64-16=48$$
$$AM=\sqrt{48}=4\sqrt{3}\text{ cm}$$

في المستوى AMB:

$$BM=AM=4\sqrt{3}\text{ cm}$$

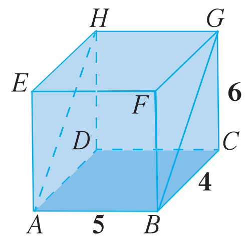
لإيجاد قياس الزاوية المستوية AMB نستخدم قانون جيب التمام في المثلث ABM.

$$(AB)^2=(AM)^2+(MB)^2-2\cdot AM\cdot MB\cdot\cos\theta$$
$$\cos\theta=\frac{(AM)^2+(MB)^2-(AB)^2}{2AM\cdot MB}$$
$$\cos\theta=\frac{48+48-64}{2\times4\sqrt{3}\times4\sqrt{3}}=\frac{32}{96}=\frac{1}{3}$$
$$\theta=\cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right)\approx70.5287^\circ$$

أي $70^\circ31'43.61''$

$\therefore$ قياس الزاوية المستوية للزاوية الزوجية حوالي $70^\circ31'44''$

حاول أن تحل



1 في شبه المكعب المقابل، أثبت أن الزاوية GBC هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية للمستويين $(ABCD)$, $(ABGH)$، ثم أوجد قياسها.

مثال (2)

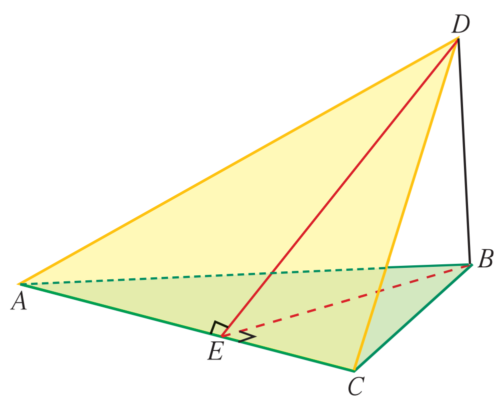
في الشكل المقابل D نقطة خارج مستوى المثلث ABC،

$m(B\hat{A}C)=\frac{\pi}{6}$ ، $AB=10\text{ cm}$ ، $DB=5\text{ cm}$

$\overline{DB}\perp(ABC)$

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ ، $\overline{BE}\perp\overline{AC}$

أوجد:



a BE , DE

b قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC , DAC

الحل:

المعطيات:

D نقطة خارج (ABC) $\qquad m(\widehat{BAC})=\frac{\pi}{6}$

$DB=5\text{ cm}\ ,\ AB=10\text{ cm}\ ,\ \overline{DB}\perp(ABC)$

$\overline{DE}\perp\overline{AC}\ ,\ \overline{BE}\perp\overline{AC}$

a المطلوب: إيجاد $BE\ ,\ DE$

البرهان:

فرضًا $\qquad \because\ \overline{BE}\perp\overline{AC}\Rightarrow\ \therefore\ m(B\hat{E}A)=\frac{\pi}{2}$

$\because\ m(\widehat{BAC})=\frac{\pi}{6}$

$\therefore$ AEB مثلث ثلاثيني – ستيني

خاصيّة المثلث ثلاثيني – ستيني $\qquad \therefore\ BE=\frac{1}{2}AB=5\text{ cm}$

فرضًا $\qquad \overline{DB}\perp(ABC)\ ,\ \overline{BE}\subset(ABC)$

خاصيّة المستقيم العمودي على مستو $\qquad \therefore\ \overline{DB}\perp\overline{BE}$

في المستوي DBE:

المثلث DBE قائم في $\widehat{B}$، متطابق الضلعين.

طول الوتر في المثلث القائم متطابق الضلعين $\qquad \therefore\ DE=BE\times\sqrt{2}$

$=5\sqrt{2}\text{ cm}$

b المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $(BAC)\ ,\ (DAC)$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AC}$ هو خط تقاطع المستويين BAC ، DAC

$\overline{BE}\perp\overline{AC}$ في المستوي BAC

$\overline{DE}\perp\overline{AC}$ في المستوي DAC

$\therefore$ الزاوية المستوية للزاوية الزوجية بين المستويين BAC ، DAC هي $\widehat{BED}$

$\because$ ΔDBE قائم في $\widehat{B}$ ومتطابق الضلعين.

$\therefore\ m(\widehat{BED})=\frac{\pi}{4}$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية $=\frac{\pi}{4}$

حاول أن تحل

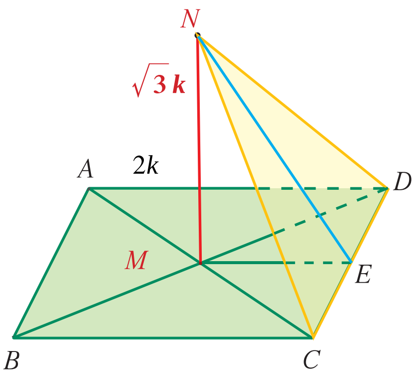
2 في المثال (2)، أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين BAC، DAC إذا كان $m(\widehat{BAC})=45^{\circ}$.

مثال (3)

$ABCD$ مستطيل تقاطع قطراه في M، وفيه $AD = 2k$

أقيم $\overline{NM}$ عمودًا على $(ABCD)$ حيث N خارج مستواه بحيث $MN = \sqrt{3}\,k$

أوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NCD ، $ABCD$



الحل:

المعطيات: $ABCD$ مستطيل، $\overline{AC} \cap \overline{DB} = \{M\}$

$\overline{MN} \perp (ABCD)$ ، $MN = \sqrt{3}\,k$ ، $AD = 2k$

المطلوب: إيجاد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين NDC ، $ABCD$

العمل: نرسم $\overline{ME}$ حيث E منتصف $\overline{CD}$

البرهان: $\overline{CD}$ هي الحافة المشتركة بين المستويين $NCD, ABCD$

$\because \overline{MN} \perp (ABCD)$, $\overline{CD} \subset (ABCD)$

$\therefore \overline{MN} \perp \overline{CD}$ (1)

في المثلث CDM المتطابق الضلعين (من خواص المستطيل)

$\because$ E منتصف $\overline{CD}$ (عملاً)

$\therefore \overline{ME} \perp \overline{CD}$ (2)

من (1), (2) نجد أن:

$\overline{CD} \perp (MNE)$, $\overline{NE} \subset (MNE)$

$\therefore \overline{NE} \perp \overline{CD}$

$\therefore$ $M\hat{E}N$ هي الزاوية المستوية للزاوية الزوجية $\overleftrightarrow{CD}$

في المثلث BCD

M منتصف $\overline{BD}$ (من خواص المستطيل)

E منتصف $\overline{CD}$ (عملاً)

$$\therefore ME = \frac{1}{2} AD$$

$$= \frac{1}{2} \times 2k = k$$

في المثلث MEN القائم الزاوية في M (من خواص المستقيم العمودي مع مستوي)

$$\tan(M\hat{E}N) = \frac{MN}{ME} = \frac{\sqrt{3}\,k}{k} = \sqrt{3}$$

$$\therefore m(M\hat{E}N) = 60^\circ$$

$\therefore$ قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD, NCD$ هو 60°

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، إذا كان $AB = 6\,k$، فأوجد قياس الزاوية الزوجية بين المستويين $ABCD, NBC$

10–5

سوف تتعلم
- تعامد المستويات

المفردات والمصطلحات:
- مستويات متعامدة
Perpendicular Planes

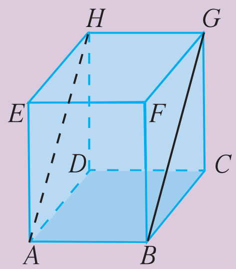
المستويات المتعامدة

Perpendicular Planes

دعنا نفكر ونتناقش

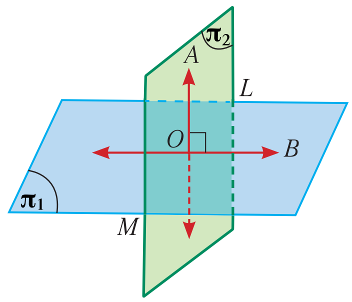
تعلمت كيفية تحديد الزاوية الزوجية بين مستويين وإيجاد قياسها.

في الشكل المقابل $ABCDEFGH$ شبه مكعب.



1. حدّد تقاطع $(ABCD)$ مع $(BCGF)$
2. أوجد الزاوية الزوجية بين هذين المستويين.
3. ما قياس هذه الزاوية؟

المستويات المتعامدة Perpendicular Planes

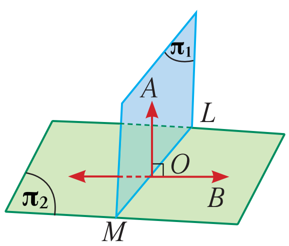


يكون المستويان متعامدين إذا كانت الزاوية المستوية بينهما زاوية قائمة أي أن قياس الزاوية الزوجية بين المستويين 90°.

في المستوي π_1: $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{LM}$

في المستوي π_2: $\overleftrightarrow{OA} \perp \overleftrightarrow{LM}$

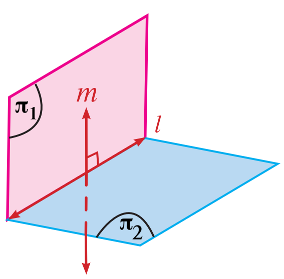
$\therefore$ $\overleftrightarrow{OB} \perp \overleftrightarrow{OA}$ فإن المستويين متعامدان.



نظرية (10)

إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوي.

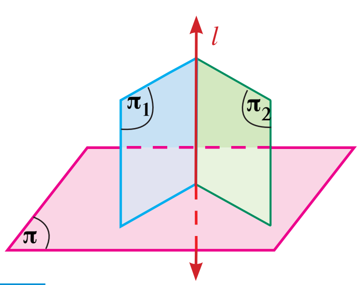
$$\overleftrightarrow{OA} \perp \pi_2 \ , \ \overleftrightarrow{OA} \subset \pi_1 \implies \pi_1 \perp \pi_2$$



نتيجة (3)

إذا تعامد مستويان ورسم في أحدهما مستقيم عمودي على خط تقاطعهما فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.

$$\pi_1 \perp \pi_2 \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} , \ \overleftrightarrow{m} \subset \pi_1 , \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{l} \implies \overleftrightarrow{m} \perp \pi_2$$



نتيجة (4)

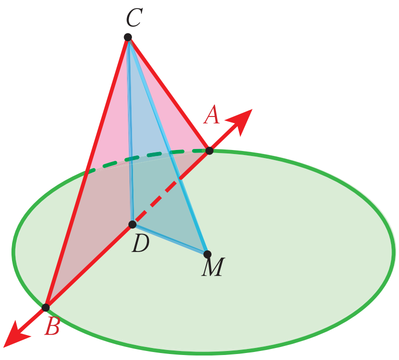
إذا كان كل من مستويين متقاطعين عمودي على مستوٍ ثالث فإن خط تقاطع المستويين يكون عموديًّا على هذا المستوي الثالث.

$$\pi_1 \perp \pi \ , \ \pi_2 \perp \pi \ , \ \pi_1 \cap \pi_2 = \overleftrightarrow{l} \Rightarrow \overleftrightarrow{l} \perp \pi$$

مثال (1)

في الشكل المقابل: C نقطة خارج مستوى الدائرة التي مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$. إذا كان $DM = DC = 5\text{ cm}$, $MC = \sqrt{50}\text{ cm}$



أثبت أن:

a $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

b مستوى الدائرة $\perp (ACB)$

الحل:

المعطيات:

$\overline{AB}$ وتر في دائرة مركزها M، D منتصف $\overline{AB}$

ABC مثلث فيه $CA = CB$،

$DM = DC = 5\text{ cm}$, $MC = \sqrt{50}\text{ cm}$

a المطلوب: إثبات أن: $\overline{MC} \perp \overline{AB}$

البرهان:

في المثلث ABC متطابق الضلعين

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$

(1) $\therefore \overline{CD} \perp \overline{AB}$

في مستوي الدائرة

$\because$ D منتصف $\overline{AB}$، M مركز الدائرة

(2) $\therefore \overline{MD} \perp \overline{AB}$

من (1), (2) نجد أن: $\overleftrightarrow{AB} \perp (CDM)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{MC}$

b المطلوب إثبات أن مستوى الدائرة $\perp (ACB)$

البرهان:

(1) $\because \overline{CD} \perp \overline{AB}$

$$(CM)^2 = (\sqrt{50})^2 = 50$$

$$(CD)^2 + (DM)^2 = 5^2 + 5^2 = 50$$

(2) $\therefore \overline{CD} \perp \overline{DM}$

$\therefore$ Δ CDM قائم الزاوية في D

من (1), (2) نجد أن: مستوي الدائرة $\perp \overleftrightarrow{CD}$

$\because \overline{CD} \subset (ACB)$

(نظرية) $\therefore$ مستوي الدائرة $\perp (ACB)$

حاول أن تحل

1 في الشكل المقابل، C دائرة مركزها O، $\overline{AB}$ قطر.

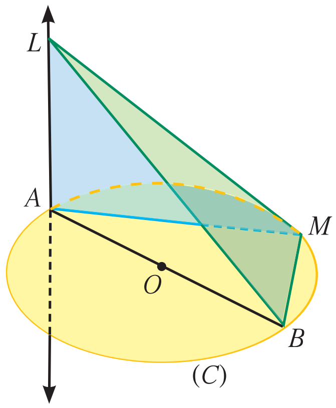
M نقطة تنتمي إلى الدائرة.

$\overleftrightarrow{LA}$ متعامد مع مستوي الدائرة.

أثبت أن:

a $\overleftrightarrow{BM} \perp (LAM)$

b $(LBM) \perp (LAM)$



مثال (2)

A, B, C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

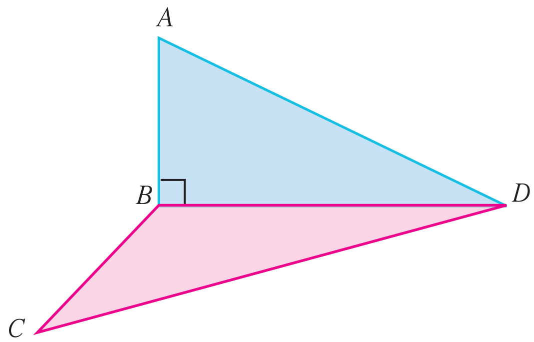
إذا كان $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

وكان $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

أثبت أن:

a $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

b $(ABD) \perp (CBD)$



الحل:

المعطيات:

A, B, C, D أربع نقاط ليست مستوية معًا.

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$, $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

المطلوب:

a إثبات أن: $\overline{BC} \perp \overline{DC}$

البرهان:

$\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$ (معطى)

$\overline{BD} \subset (BCD)$

$\therefore \overline{AB} \perp \overline{BD}$

$\therefore$ ABD مثلث قائم الزاوية في B ومنه:

$(AD)^2 = (AB)^2 + (BD)^2$ (1)

ولكن (معطى) (2) $(AD)^2 = (AB)^2 + (BC)^2 + (CD)^2$

من (1), (2) نجد أن: $(BD)^2 = (BC)^2 + (CD)^2$

$\therefore$ BDC مثلث قائم الزاوية في C (عكس نظرية فيثاغورث)

$\therefore \overline{BC} \perp \overline{DC}$

b المطلوب: إثبات أن $(ABD) \perp (CBD)$

البرهان:

(معطى) $\overleftrightarrow{AB} \perp (BCD)$

$\overleftrightarrow{AB} \subset (ABD)$

(نظرية) $\therefore \ (ABD) \perp (CBD)$

حاول أن تحل

2 في شبه المكعب $ABCDEFGH$ المقابل:

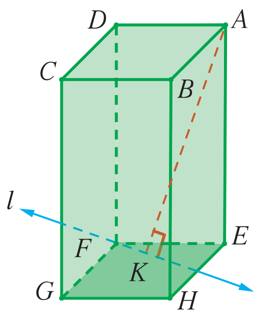
$\overleftrightarrow{l}$ مستقيم في $(EFGH)$ يمر في F.

$\overline{AK} \perp \overleftrightarrow{l}$

أثبت أن:

a $\overline{EK} \perp \overleftrightarrow{l}$

b $(FDK) \perp (AEK)$



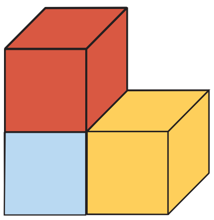
المرشد لحل المسائل

درست الأشكال ثنائية الأبعاد والمجسمات ثلاثية الأبعاد. ولكن السؤال الذي يطرح دائمًا هو: كيف نرسم على ورقة مجسمًا (شكلًا ثلاثي الأبعاد) له طول وعمق وارتفاع؟ هذا يتطلب مهارات خاصة.

إن رسم المجسم على الورقة كما يراه المراقب من أكثر من جهة يسمح بتكوين رؤية واضحة للمجسم.

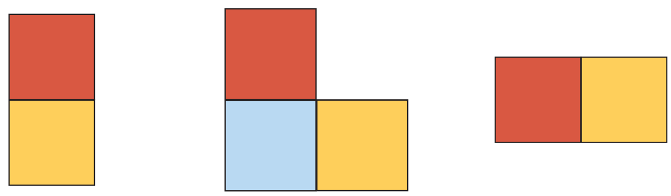
نرسم عادة المجسمات كما نشاهدها من 3 وجهات: **الأمامية، العلوية، الجانبية**. وهي تسمح بالتعرف على خصائص المجسم.

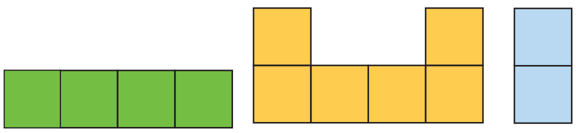
1 ارسم الشكل المقابل كما تشاهده من الأعلى، من الأمام، ثم من جهة اليمين.



الحل:

من الأعلى | من الأمام | من جهة اليمين





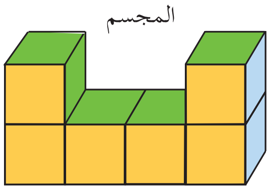
من جهة اليمين | من الأمام | من الأعلى

2 تبيّن الأشكال التالية رؤية مجسم من الوجهات الثلاث.
ضع رسمًا لهذا المجسم.

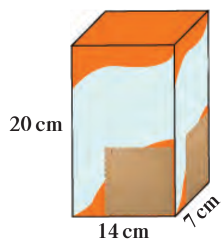
الحل:

نبدأ من الجهة الأمامية تتكون القاعدة من 4 مكعبات صفراء وفي كل جانب يعلوه مكعب واحد.

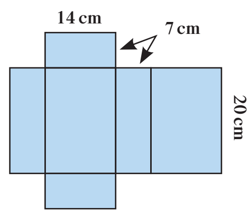
المجسم



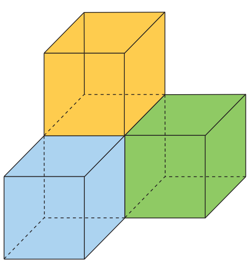
3 ارسم شبكة تمثل العلبة المقابلة.
ثم بيّن عليها الأبعاد الثلاثة.



الحل:

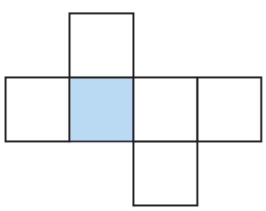


مسائل إضافية

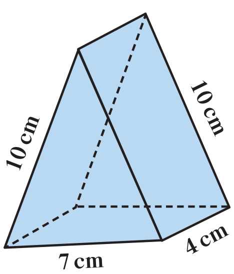


1 ارسم الشكل المقابل كما تشاهده من الأعلى، من الأمام، ثم من جهة اليمين.

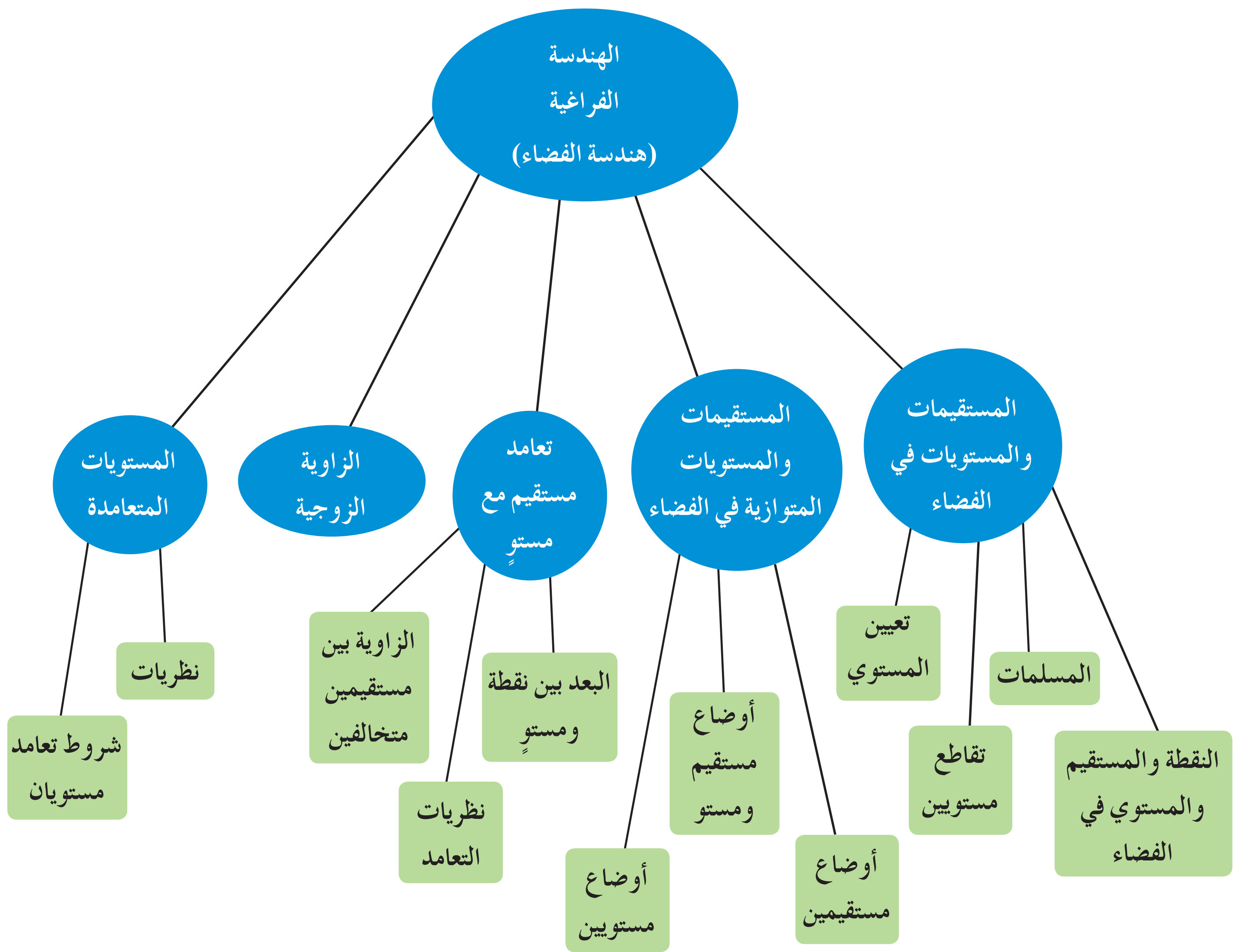
2 الشبكة نمط ثنائي الأبعاد يمكن طيّه لتكوين شكل ثلاثي الأبعاد.
تمثل الشبكة المقابلة شبكة مكعب.
اقطع الشبكة واطوها للحصول على المكعب.



3 ارسم شبكة للمجسم المقابل. ثم بيّن الأبعاد على هذه الشبكة.



مخطط تنظيمي للوحدة العاشرة



ملخص

- أي نقطتين مختلفتين في الفضاء يمر بهما مستقيم واحد فقط.
- في كل مستوٍ يوجد على الأقل ثلاث نقاط ليست مستقيمة.
- من نقطة خارج مستقيم يوجد مستقيم وحيد يمر بالنقطة ويوازي المستقيم المعلوم.
- أي ثلاث نقاط مختلفة وليست مستقيمة يحويها مستوٍ وحيد.
- يحوي الفضاء على الأقل أربع نقاط مختلفة غير مستوية.
- أي ثلاث نقاط ليست على استقامة واحدة تعيّن مستويًّا واحدًا فقط.

- أي مستقيم ونقطة خارجة عنه يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متقاطعان يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- أي مستقيمان متوازيان مختلفان يعيّنان مستويًا واحدًا فقط.
- يكون مستقيمان في الفضاء:

(i) متقاطعين إذا كان بينهما نقطة واحدة مشتركة.

(ii) متوازيين إذا كانا في مستوٍ واحد وكانا غير متقاطعين.

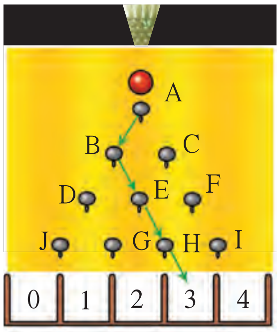
(iii) متخالفين إذا كان لا يحويهما مستوٍ واحد.

- المستقيم موازٍ للمستوي إذا لم يكن بينهما نقاط مشتركة أو يقع بتمامه في المستوى.
- المستقيم يقطع المستوي إذا كان بينهما نقطة واحدة مشتركة.
- المستقيم يقع في المستوي إذا كان بينهما نقطتين مختلفتين على الأقل.
- يتقاطع مستويان في خط مستقيم.
- إذا وازى مستقيم خارج مستوٍ مستقيمًا في المستوي، فإنه يوازي المستوي.
- إذا قطع مستوٍ مستويين متوازيين فإن خطي تقاطعه معهما يكونان متوازيين.
- يكون $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على المستوي π إذا كان $\overleftrightarrow{l}$ عموديًّا على جميع المستقيمات الواقعة في المستوي.
- المستقيم العمودي على مستقيمين متقاطعين يكون عموديًّا على مستوييهما.
- جميع المستقيمات العمودية على مستقيم معلوم من نقطة تنتمي إلى هذا المستقيم تكون محتواة في مستوٍ واحد عموديًّا على المستقيم المعلوم.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على كل من مستويين فإنهما يكونان متوازيين.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على أحد مستويين متوازيين فإنه يكون عموديًّا على المستوي الآخر.
- المستقيمان العموديان على مستوٍ متوازيان.
- إذا توازى مستقيمان أحدهما عمودي على مستوٍ كان المستقيم الآخر عموديًّا على المستوي أيضًا.
- الزاوية المستوية لزاوية زوجية هي الزاوية التي تنشأ من تقاطع الزاوية الزوجية مع مستوٍ عمودي على حافتها.
- يكون مستويان متعامدين إذا كانت الزاوية الزوجية بينهما زاوية قائمة.
- إذا كان مستقيم عموديًّا على مستوٍ، فكل مستوٍ يمر بذلك المستقيم يكون عموديًّا على المستوي.

الوحدة الحادية عشرة

الجبر المتقطع
Discrete Algebra

مشروع الوحدة: لوحة غالتون (Galton).



1 مقدمة المشروع: هي آلة اخترعها السير فرنسيس غالتون Galton (1822−1911).
وتتألف من لوحة مستطيلة الشكل غرزت فيها مسامير على مسافات متساوية ومرتبة كما في الشكل.
بحيث إذا أفلتت كرة ما على هذه اللوحة، فهي لا بد من أن تمر إما عن يمين مسمار أو عن يساره، ولكلتا الحالتين الاحتمال نفسه، حيث إنها تنهي مسارها بوصولها إلى إحدى الخانات الموجودة في أسفل هذه اللوحة.

2 الهدف: إيجاد ومقارنة احتمال وصول الكرة إلى كل خانة من الخانات.

3 اللوازم: ورق مقوى، لوحة خشبية، مسامير، أقلام تلوين، كرات متماثلة، مادة لاصقة، حاسوب، جهاز إسقاط (Data Show).

4 أسئلة حول التطبيق:

a ارسم مخطط الشجرة البيانية ممثلًا كل الطرق التي يمكن أن تسلكها الكرة عند إفلاتها من أعلى اللوحة (أي من أعلى النقطة A).

b نفذ لوحة غالتون أي اللوحة المبينة أعلاه.

c أفلت كرة من أعلى النقطة A، ثم دوّن رقم الخانة التي تقع فيها. كرر العملية نفسها 49 مرّة.

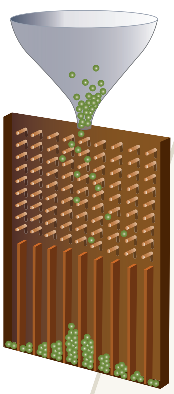
d ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية لوقوع الكرة في كل خانة من الخانات المرقمة من صفر إلى أربعة.

e مستخدمًا مخطط الشجرة البيانية، أوجد احتمال سقوط الكرة في كل خانة من الخانات الخمس.

f قارن بين الاحتمال الذي وجدته والنسب المئوية التي حصلت عليها في d .

إذا كنت متمكنًا من البرمجة، ضع برنامجًا على الحاسوب يحاكي لوحة غالتون التي صنعتها، ثم ارسم تمثيلًا بيانيًّا بالأعمدة يبيّن النسب المئوية إذا أفلتت الكرة 500 مرّة، وقارن النسب التي حصلت عليها بما حصلت عليه في e .

5 التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة.
اعرض اللوحة التي نفذتها، وضع ملصقًا يبيّن التمثيل البياني الذي رسمته.


نموذج لآلة غالتون

دروس الوحدة

مبدأ العد والتباديل والتوافيق	نظرية ذات الحدين	الاحتمال
11−1	11−2	11−3

الوحدة الحادية عشرة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت رسم مخطط الشجرة البيانية واستخدامه في العد.
- تعرفت طرائق العد ومنها التباديل والتوافيق.
- حللت مسائل باستخدام طرائق العد.
- تعرفت الاحتمالات المشروطة.

ماذا سوف تتعلم؟

- حل مسائل باستخدام مبدأ العد والتباديل والتوافيق.
- استخدام مثلث باسكال.
- استخدام نظرية ذات الحدين.
- تتعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعيين احتمالات بعض الأحداث.
- تعيين احتمال ذات الحدّين.

المصطلحات الأساسية

مبدأ العد – التباديل – الحالة الخاصة – التوافيق – مفكوك ذات الحدين – مثلث باسكال – نظرية ذات الحدين – التجربة العشوائية – فضاء العينة – الحدث – الحدث البسيط – الحدث المركب – الحدث المستحيل – الحدث المؤكد – الحدثان المتنافيان – الحدث المتمم – الحدثان المستقلان – التقاطع – الاتحاد – المتمم – احتمال ذات الحدين.

أضف إلى معلوماتك

قام عالم الرياضيات السويسري جاكوب برنولي **(1667–1784) Jacob Bernouilli** بدراسة التجارب العشوائية المستقلة لأول مرة وذلك في كتابه «فن الحدس **Ars Conjectandi**»، الذي نشره حفيده نقولا **Nicolas** بعد 8 سنوات من وفاته.

يبيّن برنويي النتيجة التالية: إن تكرار ظهور ناتج في جملة تجارب يقترب كثيرًا من احتمال حدوث هذا الحدث.

على سبيل المثال، إذا رميت مكعبًا منتظمًا مرقمًا، فإن احتمال ظهور الرقم 2 هو $\frac{1}{6}$. إذا كررنا رميه المكعب عددًا n كبيرًا من المرات فإنه من شبه المؤكد أن ظهور الرقم 2 هو m من المرات يحقق العلاقة $\frac{1}{6} = \frac{m}{n}$.

وقد سُمّي هذا التعبير الرياضي بقانون الأعداد الكبيرة.

أما حاليًا فتستخدم المحاكاة على الحاسوب للتحقق مما جاء في كتاب برنولي.

مبدأ العد والتباديل والتوافيق

Counting Principle, Permutations and Combinations

سوف تتعلم

- استخدام مبدأ العد في حل مسائل عملية.
- استخدام التباديل والتوافيق لعد الطرائق الممكنة في عملية ما.

المفردات والمصطلحات:

- مبدأ العد Counting Principle
- التباديل Permutations
- المضروب Factorial
- قانون التباديل Law of Permutations
- التوافيق Combinations

دعنا نفكر ونتناقش

يوجد في فصلكم 24 طالبًا وتريدون تشكيل وفد من n طالب ليمثل الفصل.

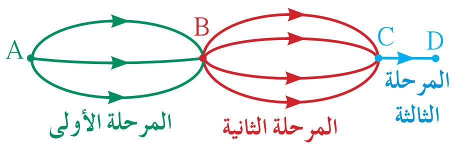
1. هل ترتيب طلاب الوفد مهم؟ متى يصبح الترتيب مهمًا؟
2. هل يمكن اختيار الطالب نفسه لأكثر من مرّة في الوفد نفسه؟
3. ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود؟ بيّن طريقة عملك.
4. ما قيمة n التي تسمح بتشكيل أكبر عدد ممكن من الوفود إذا كان عدد طلاب الفصل 25؟

مبدأ العد Counting Principle

تريد تنفيذ عمل على 3 مراحل متتابعة. هناك 3 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الأولى، و4 طرائق مختلفة لتنفيذ المرحلة الثانية، وطريقة واحدة لتنفيذ المرحلة الثالثة.

ما عدد الطرائق الممكنة لتنفيذ هذا العمل؟

عدد الطرائق الممكنة: طريقة $3 \times 4 \times 1 = 12$



مبدأ العد Counting Principle

لإجراء عملية على عدد من المراحل المتتابعة، كما يلي:

المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة،

المرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة،

المرحلة الثالثة بـ r_3 طريقة مختلفة،

.....وهكذا حتى المرحلة n بـ r_n طريقة مختلفة

فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times r_3 \times ... \times r_n$

مثال (1)

لتكن: $A = \{1, 2, 4, 5, 6\}$

يراد تكوين أعداد ذات ثلاثة منازل باستخدام عناصر A

أوجد:

a. عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b. عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

c. عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

الحل:

نفرض أن: r_1: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة الآحاد

r_2: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة العشرات

r_3: عدد طرائق اختيار رقم من A لمنزلة المئات

a ∵ الأعداد المطلوبة يمكن تكرار الأرقام فيها

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 5, r_3 = 5$

فيكون عدد الأعداد الممكن تكوينها هو:

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 5 \times 5 = 125$ (عددًا)

b ∵ الأعداد المطلوبة مختلفة الأرقام

$\therefore r_1 = 5,\ r_2 = 4, r_3 = 3$

$r_1 \times r_2 \times r_3 = 5 \times 4 \times 3 = 60$ (عددًا)

c ∵ الأعداد فردية ∴ الرقم في منزلة الآحاد هو 5 أو 1: طريقتان أي أن $r_1 = 2$

يبقى 4 طرائق مختلفة للرقم في منزلة العشرات أي أن $r_2 = 4$

و3 طرائق مختلفة للرقم في منزلة المئات أي أن $r_3 = 3$

عدد الأعداد الفردية مختلفة الأرقام الممكن تكوينها: $2 \times 4 \times 3 = 24$ (عددًا)

حاول أن تحل

1 من مثال(1)، أوجد:

a عدد الأعداد الفردية الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد الزوجية الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد الزوجية المختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

مثال (2)

لتكن: $B = \{0, 3, 4, 5, 7, 9\}$

تم تكوين أعداد ذات أربعة منازل باستخدام عناصر المجموعة B

أوجد: a عدد الأعداد الممكن تكوينها.

b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 5 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والمحصورة بين 000 7، 000 4 الممكن تكوينها.

الحل:

a هناك 6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف (لا يمكن اختيار الصفر)

الألوف	المئات	العشرات	الآحاد
5	6	6	6

∴ يمكن تكون $6 \times 6 \times 6 \times 5 = 1080$ عددًا مختلفًا.

b يقبل عدد القسمة على 5 إذا كان الرقم في منزلة الآحاد 5 أو 0

∴ 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الألوف

و 6 طرائق مختلفة لاخيار الرقم في منزلة المئات

و 6 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

وطريقتان لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
2	6	6	5

∴ يمكن تكوين $360 = 2 \times 6 \times 6 \times 5$ عددًا مختلفًا.

c لكي يكون العدد محصورًا بين 7 000 ,4 000 فإن الرقم في منزلة الألوف هو 5 أو 4

(لا يمكن أن يكون 7 لأن العدد في هذه الحالة يكون أكبر من 7 000).

∴ توجد طريقتان لاختيار الرقم في منزلة الألوف

يبقى 5 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة المئات

و 4 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة العشرات

و 3 طرائق مختلفة لاختيار الرقم في منزلة الآحاد

الآحاد	العشرات	المئات	الألوف
3	4	5	2

∴ يمكن تكوين $120 = 3 \times 4 \times 5 \times 2$ عددًا مختلفًا محصورًا بين 7 000، 4 000

حاول أن تحل

2 من المثال (2) أوجد:

a عدد الأعداد مختلفة الأرقام الممكن تكوينها.

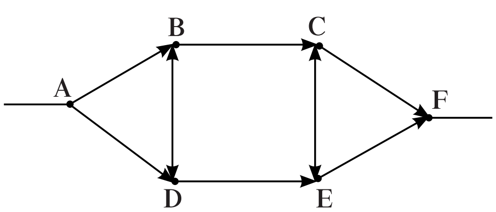
b عدد الأعداد التي تقبل القسمة على 10 الممكن تكوينها.

c عدد الأعداد مختلفة الأرقام والأكبر من 5 000 الممكن تكوينها.

يمكن وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العملية.

مثال (3)

بكم طريقة مختلفة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F، باتباع (الأسهم) ومن دون المرور بالمحطة نفسها مرتين في كل طريقة انتقال؟



الحل:

نستخدم القوائم المنظمة:

A B C F

A B C E F

A D E F

A D E C F

A D B C F　　　　A B D E F

A D B C E F　　　　A B D E C F

∴ هناك 8 طرائق مختلفة للانتقال من المحطة A إلى المحطة F

حاول أن تحل

3 من مثال (3) بكم طريقة يمكن الانتقال من المحطة A إلى المحطة F مرورًا بخمس محطات فقط؟

التباديل Permutations

عند وضع قائمة منظمة لمعرفة عدد طرائق إجراء العمليات كما في مثال (3) وجدنا أن ترتيب العناصر مهمّ حيث يختلف الطريق *ABDECF* عن الطريق *ADBCEF*

التبديل هو توزيع العناصر **وفق ترتيب معيّن.**

وقد سبق لك دراسة عدد تباديل n من العناصر فيما بينها ويسمّى «مضروب n» (n−Factorial)

ويرمز له بالرمز $n!$ ويكون:

$$n! = n(n-1)(n-2)\dots 3\times 2\times 1 \ ,\ n\in\mathbb{Z}^+$$

فمثلًا:

$4! = 4\times 3\times 2\times 1 = 24$

$5! = 5\times 4\times 3\times 2\times 1 = 120$

وكذلك درست **عدد تباديل n من العناصر مأخوذ منها r في كل مرة.**

ويرمز له بالرمز «${}_nP_r$» ويكون:

قانون التباديل Law of Permutations

$${}_nP_r = n(n-1)(n-2)\dots(n-r+1)$$

$${}_nP_r = \frac{n!}{(n-r)!}$$

حيث: $n, r\in\mathbb{Z}^+ \ ,\ n\geq r$

ملاحظة: ${}_nP_0 = 1 \ ,\ {}_nP_n = n! \ ,\ {}_nP_1 = n$

فمثلًا:

${}_7P_3 = 7\times 6\times 5 = 210$

${}_5P_0 = 1$

${}_6P_6 = 6! = 720$

${}_8P_1 = 8$

تذكر:

$1! = 1$

$0! = 1$

ملاحظة:

يجب الأخذ بعين الاعتبار نوع الآلة الحاسبة لأنه يوجد فروق بين مفاتيح الآلات وطريقة استخدامها.

تذكر:

يمكن استخدام المفتاح $\boxed{{}_nP_r}$ على الآلة الحاسبة لإيجاد عدد التباديل.

مثلًا، لإيجاد ${}_7P_4$ اضغط على المفاتيح التالية بالترتيب من اليسار إلى اليمين:

$\boxed{7}\ \boxed{{}_nP_r}\ \boxed{4}\ \boxed{=}$

فيظهر على الشاشة العدد $\boxed{840}$

أي أن: ${}_7P_4 = 840$

معلومة:

تستخدم بعض الكتب الرمز ^nP_r أو $P(n,r)$ بدلًا من ${}_nP_r$

مثال (4)

اشتركت 7 يخوت في سباق.

بكم طريقة مختلفة يمكن توقع وصول اليخوت الثلاثة الأوائل بالترتيب؟

الحل:

ترتيب وصول اليخوت مهم ولا تكرار

∴ عدد تباديل 3 يخوت من بين 7:

$$_7P_3 = \frac{7\,!}{(7-3)!} = \frac{7\,!}{4\,!}$$

$$= \frac{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}{4\times 3\times 2\times 1} = 210 \text{ (طريقة)}$$

هناك 210 تراتيب مختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إلى نهاية السباق.

حاول أن تحل

4 ما عدد الطرائق المختلفة لوصول اليخوت الثلاثة الأوائل إذا اشترك في السباق 10 يخوت؟

ملاحظة:

في المثال (4)، يمكن احتساب $_7P_3$ بثلاث طرائق مختلفة:

(1) باستخدام الآلة الحاسبة:

7 $_nP_r$ 3 = 210

(2) باستخدام القانون:

$$_7P_3 = \frac{7\,!}{(7-3)!} = 210$$

(3) باستخدام مبدأ العد:

$$_7P_3 = \underbrace{7\times 6\times 5}_{\text{3 أعداد}}$$

مثال (5)

حل المعادلات التالية:

a $_nP_5 = 6\times {_nP_4}\,,\ n \geqslant 5$

b $_6P_r = 4\times {_6P_{r-1}}$

c $\dfrac{_{2n}P_{n+2}}{_{2n}P_{n-1}} = 60$

الحل:

a $_nP_5 = 6\times {_nP_4}$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = 6\times n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) - 6n(n-1)(n-2)(n-3) = 0$$

$$n(n-1)(n-2)(n-3)\big((n-4)-6\big) = 0$$

لماذا؟ $\because\ n \geqslant 5 \ \therefore\ n(n-1)(n-2)(n-3) \neq 0$

$$\therefore\ n-4 = 6$$

$$n = 10$$

عند أخذ r عنصر من 6 فإن $r \leq 6$

b $_6P_r = 4\times {_6P_{r-1}}$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = 4\times\frac{6!}{(6-(r-1))!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4\times 6!}{(6-r+1)!}$$

$$\frac{6!}{(6-r)!} = \frac{4 \times 6!}{(6-r+1) \times (6-r)!}$$

بضرب كلًّا من الطرفين في $\frac{(6-r)!}{6!}$

$$1 = \frac{4}{6-r+1}$$

$$6-r+1 = 4$$

$$r = 3$$

c $\frac{{}_{2n}P_{n+2}}{{}_{2n}P_{n-1}} = 60$

$$\frac{\frac{(2n)!}{(2n-n-2)!}}{\frac{2n!}{(2n-n+1)!}} = 60$$

$$\frac{\cancel{(2n)}!}{(n-2)!} \times \frac{(n+1)!}{\cancel{(2n)}!} = 60 \Longrightarrow \frac{(n+1)!}{(n-2)!} = 60$$

$$\frac{(n+1)(n)(n-1)\cancel{(n-2)}!}{\cancel{(n-2)}!} = 60$$

$$(n+1)(n)(n-1) = 60$$

خمّن

$$(n+1)(n)(n-1) = 5 \times 4 \times 3 = 60$$

$$\therefore \ n = 4$$

معلومة:
يمكن استخدام الآلة الحاسبة في حل مثال (c) (5)، وذلك باعتبار أن

$(n+1)n(n-1) = 0$

$\Longrightarrow n^3 - n - 60 = 0$

أو بحل معادلة التكعيبية

حاول أن تحل

5 حل المعادلات التالية:

a $\ {}_nP_7 = 12 \times {}_nP_5$

b $\ {}_8P_r = 4 \times {}_8P_{r-1}$

التوافيق Combinations

سبق لك دراسة التوافيق حيث تحتاج أحيانًا إلى معرفة عدد المجموعات الجزئية والتي يمكن اختيارها من مجموعة ما.

عندما نتكلم عن **مجموعة** فهذا يعني أن **ترتيب العناصر غير مهم**. لذلك نحسب عدد **التوافيق**. نرمز لعدد توافيق r عنصرًا مأخوذة من مجموعة عدد عناصرها n بالرمز ${}_nC_r$ ويكون:

معلومة:
تستخدم بعض الكتب الرمز ^nC_r أو $C(n,r)$ أو $\binom{n}{r}$ للتعبير عن عدد التوافيق.

قانون التوافيق Law of Combinations

$${}_nC_r = \frac{{}_nP_r}{r!}$$

$${}_nC_r = \frac{n!}{r!(n-r)!}$$

حيث: $n, \ r \in \mathbb{Z}^+ \ , \ n \geq r$

ملاحظة:

$${}_nC_0 = 1 \ , \ {}_nC_1 = n \ , \ {}_nC_n = 1$$

مثال (6)

في مكتبة المدرسة 15 كتابًا مختلفًا من مجموعة روايات التاريخ الإسلامي.
بكم طريقة يمكنك اختيار 4 كتب منها للمطالعة؟

الحل:

تريد اختيار 4 كتب من مجموعة مكونة من 15 كتابًا.

ترتيب الكتب المختارة غير مهم، وليس هناك تكرار (أي لا يمكن اختيار الكتاب نفسه أكثر من مرة واحدة).

∴ عليك معرفة عدد توافيق 4 كتب من بين 15 كتابًا.

$$_{15}C_4 = \frac{15!}{(15-4)! \times 4!}$$

$$= \frac{15 \times 14 \times 13 \times 12 \times (11)!}{(11)! \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

$$= 1365$$

يمكنك اختيار الكتب الأربعة بـ 1 365 طريقة مختلفة.

معلومة:
يمكنك حل المثال (6) باستخدام الآلة الحاسبة.

حاول أن تحل

6 في المثال (6):

a بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 7 كتب؟

b بكم طريقة مختلفة يمكنك اختيار 8 كتب؟

c ماذا تلاحظ؟

مثال (7)

ترشح 10 طلاب لتمثيل القسم العلمي من مدرستك. يجري اختيار الممثلين الثلاثة بالاقتراع السري.
يمكنك اختيار ثلاثة طلاب أو أقل. بكم طريقة مختلفة يمكنك أن تقترع؟

الحل:

المطلوب اختيار مجموعة من 3 طلاب على الأكثر والترتيب غير مهم وليس هناك تكرار.

∴ نحسب عدد التوافيق.

يمكنك أن تقترع لِـ:

3 طلاب فيكون عدد الطرق: $_{10}C_3$

أو طالبين فيكون عدد الطرق: $_{10}C_2$

أو طالب واحد فيكون عدد الطرق: $_{10}C_1$

أو ورقة بيضاء فيكون عدد الطرق: $_{10}C_0$

∴ عدد طرائق الاقتراع: $_{10}C_3 + {}_{10}C_2 + {}_{10}C_1 + {}_{10}C_0$

$$= 120 + 45 + 10 + 1$$

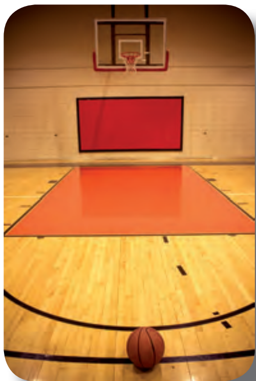
$$= 176$$

يمكنك الاقتراع بـ 176 طريقة مختلفة.

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، بكم طريقة مختلفة يمكنك الاقتراع لـ 5 طلاب أو أقل؟

مثال (8)



في الصف الحادي عشر 28 طالبًا وفي الصف الثاني عشر 24 طالبًا.
أراد معلم الرياضة اختيار 5 طلاب لتشكيل فريق لكرة السلة، شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبًا واحدًا من الصف الحادي عشر. ما عدد الخيارات الممكنة؟

الحل:

طريقة أولى:

حيث إن ترتيب العناصر غير مهم $\therefore$ الخيارات هي توافيق،

يمكن أن يتكون الفريق من لاعب واحد من الصف الحادي عشر و 4 لاعبين من الصف الثاني عشر: $_{28}C_1 \times {}_{24}C_4$

أو لاعبين اثنين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_2 \times {}_{24}C_3$

أو 3 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_3 \times {}_{24}C_2$

أو 4 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_4 \times {}_{24}C_1$

أو 5 لاعبين من الصف الحادي عشر: $_{28}C_5 \times {}_{24}C_0$

عدد الخيارات: $_{28}C_1 \times {}_{24}C_4 + {}_{28}C_2 \times {}_{24}C_3 + {}_{28}C_3 \times {}_{24}C_2 + {}_{28}C_4 \times {}_{24}C_1 + {}_{28}C_5 \times {}_{24}C_0$

$= 297\,528 + 765\,072 + 904\,176 + 491\,400 + 98\,280$

$= 25\,564\,56$

طريقة ثانية:

يمكن أخذ كل الخيارات الممكنة لـ 5 طلاب من بين $52 = 24 + 28$ ورفض الخيارات التي تتضمن صفر طالب من الصف الحادي عشر أي اختيار الخمسة طلاب من الصف الثاني عشر.

$_{52}C_5 - {}_{24}C_5 = 25\,564\,56$

حاول أن تحل

8 في مثال (8)، ما عدد الخيارات الممكنة شرط أن يتضمن الفريق على الأقل لاعبين من الصف الثاني عشر؟

خواص أخرى للتوافيق

$_nC_m = {}_nC_{n-m}$

$_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$

مثال (9)

في الصف الحادي عشر 20 طالبًا. يريد المدير اختيار وفد من 4 طلاب لتمثيل طلاب من الصف الحادي عشر.

a أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط أن يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

c أوجد عدد الوفود المختلفة الممكن تكوينها شرط ألّا يكون الطالب سالم (من طلاب الصف الحادي عشر) مشاركًا في الوفد.

d قارن بين إجابة a ومجموع إجابتي c و b . فسِّر.

الحل:

a في عملية اختيار الوفد ترتيب العناصر غير مهم لذلك نحسب عدد التوافيق.

نختار 4 طلاب من بين 20:

$${}_{20}C_4 = \frac{{}_{20}P_4}{4!} = \frac{20 \times 19 \times 18 \times 17}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 4\,845$$

b إذا كان سالم مشاركًا في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 3 طلاب من بين بقية الطلاب أي من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$${}_{19}C_3 = \frac{{}_{19}P_3}{3!} = \frac{19 \times 18 \times 17}{3 \times 2 \times 1} = 969$$

c إذا استثنى سالم من المشاركة في الوفد فهذا يعني أنه يجب اختيار 4 طلاب من بين $19 = 1 - 20$ طالبًا.

$${}_{19}C_4 = \frac{{}_{19}P_4}{4!} = \frac{19 \times 18 \times 17 \times 16}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 3\,876$$

d $969 + 3\,876 = 4\,845$

أي: ${}_{19}C_3 + {}_{19}C_4 = {}_{20}C_4$

وهذا يتفق مع الخاصية ${}_nC_m = {}_{n-1}C_m + {}_{n-1}C_{m-1}$

حاول أن تحل

9 يتكون فريق كرة القدم في المدرسة من 18 لاعبًا. يريد المدرب تشكيل فريق من 11 لاعبًا.

a أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها.

b أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا أراد المدرب أن يتضمن الفريق اللاعب عبد العزيز.

c أوجد عدد الفرق المختلفة الممكن تكوينها إذا استثنى المدرب اللاعب عبد العزيز من تشكيلة الفريق بطريقتين مختلفتين.

مثال (10)

أوجد قيمة n في كل مما يلي:

b $\frac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6} = \frac{8}{7}$

a ${}_nC_3 = {}_nC_4$

الحل:

a ${}_nC_3 = {}_nC_4$

$$\frac{{}_nP_3}{3!} = \frac{{}_nP_4}{4!}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{3!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4 \times 3!}$$

$$4n(n-1)(n-2) = n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$n(n-1)(n-2)(4-(n-3))=0 \quad , n\neq 0\ , n\neq 1,\ n\neq 2$

$4-n+3=0$

$7-n=0$

$n=7$

b $\dfrac{{}_nC_7}{{}_{(n-1)}C_6}=\dfrac{8}{7}$

$$\dfrac{\dfrac{n!}{(n-7)!\times 7!}}{\dfrac{(n-1)!}{(n-1-6)!\times 6!}}=\dfrac{8}{7}$$

$$\dfrac{n\times \overset{1}{\cancel{(n-1)!}}}{\underset{1}{\cancel{(n-7)!}}\times 7\times 6!}\times\dfrac{\overset{1}{\cancel{(n-7)!}}\times 6!}{\underset{1}{\cancel{(n-1)!}}}=\dfrac{8}{7}$$

$$\dfrac{n}{7}=\dfrac{8}{7}$$

$$n=8$$

حاول أن تحل

10 أوجد قيمة n في كلٍّ مما يلي:

a ${}_nC_2=105$

b ${}_nC_4={}_nC_5$

11-2

نظرية ذات الحدين

The Binomial Theorem

سوف تتعلم

- استخدام مثلث باسكال.
- إيجاد معامل مفكوك ذات الحدين.
- استخدام نظرية ذات الحدين.

المفردات والمصطلحات:

- مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding
- مثلث باسكال Pascal's Triangle
- نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

دعنا نفكر ونتناقش

الكثير من الاكتشافات الرياضية بدأت بدراسة الأنماط.

a أوجد مفكوك كلٍّ من: $(x+1)^3$, $(x+1)^2$, $(x+1)^1$, $(x+1)^0$

b هل يمكنك إيجاد مفكوك $(x+1)^{12}$ بسهولة؟

c ناقش الأنماط في مفكوك كلٍّ من: $(x+1)^3$, $(x+1)^2$, $(x+1)^1$, $(x+1)^0$

ماذا تلاحظ؟

مفكوك ذات الحدين Binomial Expanding

إذا فككت المقدار الذي على الصورة $(x+y)^n$، حيث $n = 0$، 1، 2، ... ، 5، ستحصل على مفكوك يسمى مفكوك ذات الحدين عدد حدوده $(n+1)$ حدًّا، كما هو موضح أدناه:

$$\begin{aligned}
(x+y)^0 &= 1\\
(x+y)^1 &= 1x^1y^0 + 1x^0y^1\\
(x+y)^2 &= 1x^2y^0 + 2x^1y^1 + 1x^0y^2\\
(x+y)^3 &= 1x^3y^0 + 3x^2y^1 + 3x^1y^2 + 1x^0y^3\\
(x+y)^4 &= 1x^4y^0 + 4x^3y^1 + 6x^2y^2 + 4x^1y^3 + 1x^0y^4\\
(x+y)^5 &= 1x^5y^0 + 5x^4y^1 + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5x^1y^4 + 1x^0y^5
\end{aligned}$$

في الصف الثالث نرى المعاملات: 1 ,2 ,1

في الصف الرابع نرى المعاملات: 1 ,3 ,3 ,1

تشكل كل مجموعة من المعاملات صفًّا كما هو مبين في الصفحة أدناه.

إذا وضعت هذه المجموعات تحت بعضها بعضًا تكوّن ما يُسمّى بـ **مثلث باسكال**.

مثلث باسكال Pascal's Triangle

$(x+y)^0$	row 1						1					
$(x+y)^1$	row 2					1		1				
$(x+y)^2$	row 3				1		2		1			
$(x+y)^3$	row 4			1		3		3		1		
$(x+y)^4$	row 5		1		4		6		4		1	
$(x+y)^5$	row 6	1		5		10		10		5		1

بليز باسكال
Blaise PASCAL
(1623–1662)

الترابط:
بليز باسكال: فيلسوف وعالم رياضيات، صنع أول آلة حاسبة رقمية في العام 1642.

لاحظ النمط في مثلث بسكال:

- **الحافات الخارجية تساوي 1.**
- **أي عدد غير الواحد في كل صف يساوي مجموع العددين الواقعين فوقه.**

فمثلاً للحصول على الصف الخامس، نجمع كل عددين متجاورين من الصف الرابع (الذي هو أعلى من الصف الخامس مباشرة) ولا ننسى أن الصف يبدأ بـ 1 وينتهي بـ 1 أيضًا.

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 + 4 + 6 + 4 + 1

1 5 10 10 5 1

نشاط

استخدم مثلث باسكال السابق لفك: $(x+y)^6$

الحل:

عدد حدود المفكوك = ...

من مثلث باسكال، الصف السادس: ....

يمكن إيجاد الصف السابع من الصف السادس كما يلي:

ينتهي كل صف بالعدد

1 5 10 10 5 1

1 6 15 $\square$ $\square$ $\square$ 1

يبدأ كل صف بالعدد

استخدم الأعداد في الصف السادس كمعاملات.

تبدأ أسس x بـ 6 وتتناقص...

$$(x+y)^6 = 1x^6y^0 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^{\square}y^3 + 15x^2y^{\square} + 6x^{\square}y^5 + 1x^{\square}y^{\square}$$

تبدأ أسس y بـ 0 وتتزايد

نظرية ذات الحدين The Binomial Theorem

الأعداد في مثلث باسكال تمثل معاملات حدود مفكوك ذات الحدين $(x+y)^n$. ويمكن إيجاد قيمة هذه الأعداد عن طريق تكرار صف بعد صف باستخدام الطريقة في النشاط السابق.

يمكن أن نوجد أيضًا معاملات مفكوك ذات الحدين عن طريق استخدام **التوافيق.**

إذا حسبنا: ${}_3C_0$, ${}_3C_1$, ${}_3C_2$, ${}_3C_3$ نحصل على 1, 3 , 3, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الرابع من مثلث باسكال.

كذلك إذا حسبنا ${}_4C_0$, ${}_4C_1$, ${}_4C_2$, ${}_4C_3$, ${}_4C_4$ نحصل على 1, 4, 6, 4, 1 وهي تتطابق مع قيم الصف الخامس من مثلث باسكال.

معلومة:

كان هذا النمط العددي المثلثي معروفًا بين عامي 200 – 300 ق.م. من خلال العالم الرياضي الهندي هلايودا Halayudha والعالم العربي الكرخي وغيرهما إلّا أنه سمّي مثلث باسكال نسبة إلى عالم الرياضيات الفرنسي بليز باسكال Blaise Pascal

أبو بكر محمد بن الحسن الكرخي

من علماء الرياضيات المسلمين قضى حياته في بغداد، برع في الهندسة والأنماط الرياضية ووضع المثلث المشهور الذي يعرف اليوم بمثلث باسكال.

ملاحظة:

لاحظ أن مجموع الأسين في كل حد من حدود المفكوك $(x+y)^6$ يساوي 6 دائمًا.

وكذلك تتطابق قيم ${}_5C_0$ إلى ${}_5C_5$ مع قيم الصف السادس من مثلث باسكال.

يمكننا الاستنتاج أن معاملات حدود x, y في المفكوك $(x+y)^n$ هي قيم ${}_nC_r$ حيث $r = 0,1,2,3,4,\dots,n$

نظرية ذات الحدين

لأي عدد صحيح موجب n،

$$(x+y)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}y + {}_nC_2x^{n-2}y^2 + \dots\dots + {}_nC_rx^{n-r}y^r + \dots\dots + {}_nC_{n-1}xy^{n-1} + {}_nC_ny^n$$

خواص نظرية ذات الحدين Properties of the Binomial Theorem

1. مفكوك $(x+y)^n$ يتضمن $n+1$ حداً يرمز لها بـ: $T_1, T_2, \dots, T_{r+1}, \dots, T_n, T_{n+1}$
2. الحد الأول في المفكوك هو x^n، ثم ينقص أس x في الحدود التالية بمقدار الواحد على التوالي.
3. يبدأ ظهور العدد y في الحد الثاني، ثم يزيد أس العدد y بمقدار الواحد على التوالي حتى نصل إلى الحد الأخير في المفكوك ويكون y^n.
4. مجموع أسي x و y في أي حد من حدود المفكوك **ثابت** ويساوي الأس n.
5. معامل الحد T_1 يساوي معامل الحد T_{n+1}، ومعامل الحد T_2 يساوي معامل الحد T_n، وهكذا ...
6. الحد العام الذي رتبته $r+1$ يرمز له بالرمز: T_{r+1}

$$T_{r+1} = {}_nC_r \cdot x^{n-r} \cdot y^r$$

مثال (1)

استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a) $(x+y)^5$ b) $(x-3)^6$ c) $(x^2+3y)^4$

الحل:

بتطبيق نظرية ذات الحدين:

a) $$(x+y)^5 = {}_5C_0x^5 + {}_5C_1x^4y + {}_5C_2x^3y^2 + {}_5C_3x^2y^3 + {}_5C_4xy^4 + {}_5C_5y^5$$
$$= x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$$

b $(x-3)^6 = {}_6C_0x^6 + {}_6C_1x^5(-3) + {}_6C_2x^4(-3)^2 + {}_6C_3x^3(-3)^3 + {}_6C_4x^2(-3)^4 + {}_6C_5x(-3)^5 + {}_6C_6(-3)^6$

$= x^6 + (6)(-3)x^5 + (15)(-3)^2x^4 + (20)(-3)^3x^3 + (15)(-3)^4x^2 + (6)(-3)^5x + (-3)^6$

$= x^6 - 18x^5 + 135x^4 - 540x^3 + 1215x^2 - 1\,458x + 729$

c $(x^2+3y)^4 = {}_4C_0(x^2)^4 + {}_4C_1(x^2)^3(3y) + {}_4C_2(x^2)^2(3y)^2 + {}_4C_3(x^2)^1(3y)^3 + {}_4C_4(3y)^4$

$= x^8 + 12x^6y + 54x^4y^2 + 108x^2y^3 + 81y^4$

حاول أن تحل

1 استخدم نظرية ذات الحدين لفك كل من:

a $(a-b)^4$ **b** $(d+2)^7$ **c** $(2x-y^2)^5$

مثال (2)

في مفكوك: $(2x-3y^2)^{10}$ أوجد الحدّ السابع.

الحل:

تكتب $(2x-3y^2)^{10}$ على الصورة $(2x+(-3y^2))^{10}$

الحدّ السابع هو: $T_{r+1} = {}_nC_r \,.\, x^{n-r} \,.\, y^r$

$T_7 = T_{6+1}$

$T_7 = {}_{10}C_6\,(2x)^4 \times (-3y^2)^6$

$= (210)(2^4)(-3)^6(x^4)\,(y^2)^6$

$= 2\,449\,440\, x^4y^{12}$

حاول أن تحل

2 في مفكوك: $(3x^2-y)^{15}$ أوجد معامل T_{12}

مثال (3)

أوجد الحد الذي يحتوي على x^3y^4 في مفكوك $(2x+3y)^7$

الحل:

الحد الذي رتبته $r+1$ هو: $T_{r+1} = {}_nC_r \,.\, x^{n-r} \,.\, y^r$

في مفكوك كثيرة الحدود $(2x+3y)^7$ ، $n = 7$

$\because$ أس y يساوي 4 $\therefore$ $r = 4$

يصبح هذا الحد:

$$T_5 = {}_7C_4(2x)^3(3y)^4$$
$$= 35 \times (2)^3 x^3 (3)^4 y^4$$
$$= 35 \times 8 \times 81 \times x^3 y^4$$
$$= 22\,680\, x^3 y^4$$

حاول أن تحل

3 أوجد الحد الذي يحتوي على x^2y^3 في مفكوك $(3x - y)^5$

11–3

الاحتمال

Probability

عمل تعاوني: استكشاف الاحتمال التجريبي

خذ ورق مقوى مستطيلة الشكل وإطوها لوجهين مستطيلين غير منطبقين، كما هو مبين في الرسم. نريد أن نعرف كيف تقع هذه الورقة على الأرض عند إفلاتها من ارتفاع ما.

1 أفلت الورقة من يدك 60 مرة.
دوّن كل مرة وضع سقوطها.

2 أي الأوضاع هي الأكثر توقعًا لسقوط الورقة؟ وأي الأوضاع هي الأقل توقعًا؟

3 ما النسبة المئوية لسقوط الورقة على الوجهة الصغرى؟
أوجد النسب المئوية لبقية وجهات السقوط.

4 a لنفرض أنك أفلت الورقة 20 مرة إضافية. توقع عدد مرات سقوطها لكل وضع.

b أفلت الورقة 20 مرة جديدة. دوّن أوضاع السقوط.

c قارن بين ما دونته وما توقعته. هل هما متقاربتان؟
كيف يمكنك تحسين توقعك؟

ورقة تدوين النتائج	
وجهة السقوط	**التكرار**
الوجهة الصغرى	卌 卌 II
الوجهة الكبرى	卌 卌 卌 III
شكل الخيمة	卌 卌 卌 卌 I
الحرف	卌 IIII

التجربة العشوائية—فضاء العينة

Random Experiment—Sample Space

في حياتنا اليومية، هناك الكثير من الأمور التي لها صفة العشوائية.

فمثلًا عندما نرمي مكعبًا مرقمًا (حجر نرد) لا يمكننا مسبقًا معرفة العدد الذي سيظهر على الوجهة العليا.

أو قبل الوصول إلى التقاطع في الشارع، لا يمكننا معرفة ما سيكون عليه لون إشارة المرور.

كذلك عندما نأخذ كرة من كيس (دون النظر إلى داخله) يحتوي على كرات متساوية الحجم، مختلفة الألوان،لها الملمس نفسه فإنه لا يمكننا مسبقًا معرفة ما سيكون عليه لون الكرة.

سوف تتعلم

- تعرف التجربة العشوائية وفضاء العينة.
- تعرف بعض نظريات الاحتمال.
- تعيين احتمالات الأحداث.
- تعيين احتمالات الأحداث المتنافية ومتمم الحدث والأحداث المستقلة.
- تعيين احتمال ذات الحدين.

المفردات والمصطلحات:

- الاحتمال Probability
- التجربة العشوائية Random Experiment
- فضاء العينة Sample Space
- حدث بسيط Simple Event
- حدث مركب Compound Event
- حدث مستحيل Impossible Event
- حدث مؤكد Certain Event
- حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events
- حدث متمم Complement Event
- حدثان مستقلان Independent Events
- التقاطع Intersection
- الاتحاد Union
- المتمم Complement
- احتمال ذات الحدين Binomial Probability

التجربة العشوائية

هي تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.

في كل تجربة عشوائية نهتم أولًا بمعرفة **مجموعة النواتج** الممكنة لتلك التجربة.

مجموعة النواتج هذه تسمى **فضاء العينة**.

وكل **حدث** هو مجموعة جزئية من فضاء العينة.

في تجربة رمي حجر نرد، فضاء العينة هو:

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ ، $n(S) = 6$

ويعتبر الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 هو حدث وليكن A أي $A = \{3,6\}$

ويكون $n(A) = 2$

في «العمل التعاوني» **فضاء العينة هو أوضاع السقوط الأربع** المبينة في «ورقة تدوين النتائج» وكل وضع سقوط هو **حدث**.

أنواع الأحداث Types of Events

حدث بسيط Simple Event

مجموعة جزئية من فضاء العينة (S) تحوي ناتجًا واحدًا من نواتج التجربة العشوائية (مجموعة تحوي عنصرًا واحدًا) فإذا كان A حدثًا بسيطًا فإن $n(A) = 1$

حدث مركب Compound Event

مجموعة جزئية تحوي أكثر من ناتج واحد من نواتج التجربة العشوائية.

فإذا كان B حدثًا مركبًا فإن $n(B) > 1$

حدث مستحيل Impossible Event

مجموعة جزئية خالية $\varnothing$ من فضاء العينة (S): فإذا كان D حدثًا مستحيلًا فإن $n(D) = 0$

حدث مؤكد Certain Event

مجموعة جزئية تساوي فضاء العينة (S): فإذا كان F حدثًا مؤكدًا فإن $n(F) = n(S)$

حدثان متنافيان Mutually Exclusive Events

يقال للحدثين A, B أنهما متنافيان إذا كان وقوع أحدهما ينفي (يمنع) وقوع الآخر أثناء التجربة.

أي أن: $A \cap B = \phi$ ويكون $n(A \cap B) = n(\phi) = 0$

حدث متمم Complement Event

الحدث المتمم للحدث A هو الحدث الذي يحوي جميع عناصر فضاء العينة (S) التي لا تنتمي إلى الحدث A

نرمز إلى الحدث المتمم بالرمز $\overline{A}$

A، $\overline{A}$ هما حدثان متنافيان. ويكون: $A \cap \overline{A} = \phi$ ، $A \cup \overline{A} = S$

معلومة:

- نرمز عادة لفضاء العينة بـ S.
- لأي مجموعة A، يرمز لعدد عناصرها بالرمز $n(A)$

معلومة:

يقصد بحجر النرد هو مكعب أوجهه مرقمة من 1 إلى 6 وكل وجه له نفس فرصة الظهور

تذكر:

إذا كانت A , B مجموعتان فإن:

$A \cap B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A و B

$A \cup B$ هي مجموعة العناصر التي تنتمي إلى A أو B

حدثان مستقلان Independant Events

يقال للحدثين A, B أنهما مستقلان إذا كان وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر أثناء التجربة العشوائية.

مثال توضيحي

عند رمي حجر نرد أعط مثالًا على كل من:

a حدث بسيط
b حدث مركب
c حدث مستحيل
d حدث مؤكد
e حدثين متنافيين
f حدث متمم
g حدثين مستقلين

الحل:

a ظهور العدد 5 هو حدث بسيط.

b ظهور أحد مضاعفات العدد 3 هو حدث مركب.

c ظهور العدد 8 هو حدث مستحيل.

d ظهور عدد من 1 إلى 6 هو حدث مؤكد.

e الحدثان: A: «ظهور أحد العددين 5 أو 6»،

B: «ظهور عدد أصغر من 4» هما حدثان متنافيان.

f إذا كان الحدث A: «ظهور أحد العددين 5 أو 6»

فإن الحدث $\overline{A}$: «ظهور عدد أصغر من أو يساوي 4» هو الحدث المتمم للحدث A

g إذا رمينا حجر النرد مرتين، الحدثان A: «ظهور العدد 5 في المرة الأولى»،

B: «ظهور العدد 4 في المرة الثانية» هما حدثان مستقلان.

مثال (1)

في تجربة رمي حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الوجه العلوي.

1 اكتب وحدد نوع كلٍ من الأحداث التالية:

a A: ظهور عدد أكبر من 5

b B: ظهور عدد فردي

c C: ظهور عدد زوجي

d D: ظهور عدد أصغر من 7

2 a أثبت أن B, C حدثان متتامان.

b بيّن فيما إذا كان الحدثان C, D متنافيان أم لا.

ملاحظة:
نرمز لاحتمال الحدث E بالرمز $P(E)$.

الحل:

1 a $A = \{6\} \quad , \quad n(A) = 1$

$\therefore$ A حدث بسيط.

b $B = \{1, 3, 5\} \quad , \quad n(B) = 3$

$\therefore$ B حدث مركب.

c $C = \{2, 4, 6\} \quad , \quad n(C) = 3$

$\therefore$ C حدث مركب.

d $D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad , \quad n(D) = 6$

$\therefore$ D حدث مؤكد.

2 ليكن S فضاء العينة.

$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

a $B \cup C = \{1, 3, 5, 2, 4, 6\} = S, B \cap C = \phi$

$\therefore$ B, C حدثان متتامان.

b $C \cap D = \{2, 4, 6\} \neq \phi$

$\therefore$ الحدثان C, D ليسا متنافيان.

حاول أن تحل

1 في أحد المخيمات الصيفية يشارك الطالب في مجموعة من الأنشطة وهي: كرة القدم، كرة السلة، كرة المضرب، الكرة الطائرة، السباحة وركوب الدراجات.

a اكتب وحدد نوع كل من الأحداث التالية:

(1) A: المشاركة في كرة المضرب فقط.

(2) B: المشاركة في الأنشطة التي تستخدم فيها كرة كبيرة.

(3) C: المشاركة في الأنشطة التي لا تستخدم فيها كرة.

b (1) بيّن فيما إذا كان الحدثان B, C متتامان أم لا.

(2) أعط مثالاً عن حدثين متنافيين.

الاحتمال Probability

إذا كانت جميع نواتج التجربة العشوائية لها فرصة الظهور نفسها فإن احتمال الحدث هو:

$$P(E) = \frac{\text{عدد نواتج الحدث } E}{\text{عدد نواتج فضاء العينة } S} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

لأن أي حدث هو مجموعة جزئية من فضاء العينة، فإن عدد نواتج حدث ما يكون دائمًا **أصغر من** أو **يساوي** عدد نواتج فضاء العينة لذلك فإن احتمال وقوع حدث ما يكون دائمًا **عددًا ينتمي إلى الفترة [0, 1]**

خواص الاحتمال لحدث ما
Properties of the Probabilty of an Event

E حدث في فضاء عينة S حيث S منته وغير خالٍ

a) $0 \le P(E) \le 1$

b) إذا كان E حدثًا مستحيلًا، فإن $P(E) = 0$

c) إذا كان E حدثًا مؤكدًا، فإن $P(E) = 1$

d) مجموع احتمالات كل الأحداث البسيطة في فضاء العينة $= 1$

مثال (2)

يبيّن الجدول المقابل وسيلة النقل التي يستخدمها طلاب الصف الحادي عشر بشعبتيه للمجيء إلى المدرسة.

اختير طالب عشوائيًّا من بين طلاب شعبتي الصف الحادي عشر.

ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يستقلون الحافلة المدرسية للمجيء إلى المدرسة؟

وسيلة النقل	الشعبة A	الشعبة B	المجموع
الحافلة المدرسية	16	15	31
مع الأهل	6	8	14
سيارة نقل عام	2	5	7
المجموع	24	28	52

الحل:

لنفرض الحدث E: «المجيء بالحافلة المدرسيّة إلى المدرسة».

عدد نواتج الحدث E: $16 + 15 = 31$

عدد نواتج فضاء العينة S: $(16 + 6 + 2) + (15 + 8 + 5) = 52$

$$P(E) = \frac{31}{52}$$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)،
a) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الذين يقلونهم أهلهم إلى المدرسة؟
b) ما احتمال أن يكون هذا الطالب من الشعبة B؟

مثال (3)

حصل الطلاب: مصطفى، محمد، طه، أحمد، أمين على الدرجة النهائية العظمى في اختبار الرياضيات وأراد مدير المدرسة اختيار 3 منهم لتمثيل المدرسة في مسابقة ثقافية.

ما احتمال اختيار «محمد»؟

الحل:

احتمال الحدث:

$$P(E) = \frac{E \text{ عدد نواتج الحدث}}{S \text{ عدد نواتج فضاء العينة}} = \frac{n(E)}{n(S)}$$

∵ نتكلم عن المجموعة ∴ ترتيب العناصر غير مهم.

(i) عدد نواتج فضاء العينة:

اختيار 3 طلاب من بين 5: $n(S) = {}_5C_3 = \frac{5!}{(5-3)! \times 3!} = 10$

(ii) عدد نواتج الحدث E:

اختيار محمد بطريقة واحدة $_1C_1 = 1$

يبقى اختيار طالبين من بين الأربعة المتبقين: ${}_4C_2 = \frac{4!}{(4-2)! \times 2!} = 6$

∴ عدد نواتج الحدث E: ${}_1C_1 \times {}_4C_2 = 1 \times 6 = 6$

$P(E) = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$

احتمال اختيار «محمد» يساوي $\frac{3}{5}$

حاول أن تحل

3 في المثال (3)، اعتذر طه عن المشاركة. فما احتمال اختيار «محمد»؟

درست فيما سبق بعض القواعد التي تساعد في إيجاد احتمال بعض الأحداث A، B في فضاء العينة S:

A، B حدثان فإن		$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
A، B حدثان متنافيان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = 0$
A، B حدثان مستقلان	$\Longleftrightarrow$	$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$
$\overline{A}$ هو الحدث المتمم للحدث A	$\Longleftrightarrow$	$P(\overline{A}) = 1 - P(A)$

معلومة:

$P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

$P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

مثال (4)

يتصل المستمعون بإحدى الإذاعات، لتسمية أغنيتهم المفضلة.
تختار إدارة الإذاعة كل ساعة 4 مستمعين وتبث أغانيهم.
اتصلت مرتين، الأولى بعد الثامنة صباحًا والثانية بعد الثالثة بعد الظهر.
الجدول المقابل يبيّن عدد المتصلين، فما احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك؟

الساعة	عدد المتصلين
الثامنة صباحًا	125
الثالثة بعد الظهر	200

الحل:

ليكن الحدث A: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثامنة»

الحدث B: «تم اختيارك من بين متصلي الساعة الثالثة»

توضيح:
اختيارك بين متصلي الساعة الثامنة يعني اختيارك واختيار 3 من بقية المتصلين أي من بين 124

نلاحظ أن الحدثين B، A مستقلان.

$$\therefore\ P(A\cap B)=P(A)\times P(B)$$

$$P(A)=\frac{{}_1C_1\times {}_{124}C_3}{{}_{125}C_4}=\frac{4}{125}$$

$$P(B)=\frac{{}_1C_1\times {}_{199}C_3}{{}_{200}C_4}=\frac{4}{200}=\frac{1}{50}$$

$$P(A\cap B)=\frac{4}{125}\times\frac{1}{50}=\frac{4}{6\,250}=\frac{2}{3125}$$

احتمال أن تبث الإذاعة الأغنيتين المفضلتين لديك يساوي $\frac{2}{3125}$

حاول أن تحل

4 في المثال (4)، إذا اختارت إدارة الإذاعة 5 متصلين كل ساعة.

فما احتمال أن تبث أغنيتيك المفضلتين؟

مثال (5)

حوالى 53% من طلاب إحدى الجامعات عمرهم أصغر من 25 عامًا وحوالى 21% من طلاب هذه الجامعة عمرهم أكبر من 34 عامًا.
اختير طالب عشوائيًا من هذه الجامعة.

a ما احتمال أن يكون عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34؟

b ما احتمال أن يكون عمر الطالب 25 عامًا فأكثر؟

الحل:

ليكن الحدث A: «عمر الطالب أصغر من 25 عامًا».

ليكن الحدث B: «عمر الطالب أكبر من 34 عامًا».

$\therefore$ الحدثان A, B متنافيان.

$$\therefore\ P(A\cap B)=0$$

$$P(A)=\frac{53}{100}=0.53,\quad P(B)=\frac{21}{100}=0.21$$

a الحدث: عمر الطالب أصغر من 25 أو أكبر من 34 هو $A\cup B$

$$\therefore\ P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=0.53+0.21-0=0.74$$

b الحدث: عمر الطالب 25 عامًا فأكثر هو حدث متمم للحدث A وهو $\overline{A}$

$$\therefore\ P(\overline{A})=1-P(A)=1-0.53=0.47$$

حاول أن تحل

5 في المثال (5)، أوجد احتمال كل حدث مما يلي:

a عمر الطالب بين 25 عامًا و34 عامًا.

b عمر الطالب 34 عامًا وأقل.

مثال (6)

رُمي حجر نرد منتظم. فما احتمال الحصول على أحد مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي؟

الحل:

$$S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \quad \Longrightarrow \quad n(S) = 6$$

ليكن الحدث A: «مضاعفات العدد 3»

$$A = \{3, 6\} \quad \Longrightarrow \quad P(A) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

الحدث B: «عدد زوجي»

$$B = \{2, 4, 6\} \quad \Longrightarrow \quad P(B) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

الحدثان A، B غير متنافيين لأن

$$A \cap B = \{6\} \quad \Longrightarrow \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

$$\therefore \; P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

$$= \frac{2}{6} + \frac{3}{6} - \frac{1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

احتمال الحصول على عدد من مضاعفات العدد 3 أو عدد زوجي يساوي $\frac{2}{3}$

طريقة أخرى:

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\}$$

$$P(A \cup B) = \frac{n(A \cup B)}{n(S)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

حاول أن تحل

6 في المثال (6)، ما احتمال الحصول على عدد زوجي أو عدد أولي؟

احتمال ذات الحدين — Binomial Probability

إقامة تجربة n مرّة وتسجيل نتائجها علمًا أن هناك فقط لكل تجربة نتيجتين H أو T

إذا كان $P(H) = m$، الحدث E و H تحقق فقط k مرّة، فبالتالي:

$$P(E) = {}_nC_k \cdot P(H)^k \cdot P(T)^{n-k}$$

$$= {}_nC_k \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

$$= \frac{n!}{k!(n-k)} \cdot m^k (1-m)^{n-k}$$

يستخدم احتمال ذات الحدين:

- في حالة تكرار حدث عدة مرات.
- إذا كان للحدث **ناتجان فقط:**

ربح – خسارة، نجاح – فشل، كتابة – صورة، ...

مثال (7)

خلال شهر التسوق يقدم أحد المحلات العرض التالي: عند شراء كل صنف تحصل على بطاقة. تفوز 40% من البطاقات بجوائز ويتم اختيار هذه البطاقات الرابحة بشكل عشوائي. مع راشد 3 بطاقات. ما احتمال أن يفوز راشد بجائزتين؟

الحل:

نفرض الحدث A: «فوز راشد بجائزة» $P(A) = m = 0.40$

الحدث B: «عدم فوز راشد بجائزة» $P(B) = 1 - m = 0.60$

والحدث E: «فوز راشد بجائزتين»

فيكون: $n = 3$ و $k = 2$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_3C_2 (0.4)^2 (0.6)^1$$
$$= 0.288$$

احتمال فوز راشد بجائزتين يساوي 0.288

حاول أن تحل

7 في المثال (7)، ما احتمال أن يفوز راشد بجائزة واحدة فقط؟

مثال (8)

في إحدى الآلات الحاسبة 4 بطاريات. احتمال أن تخدم كل بطارية مدة عام كامل يساوي 90%

ما احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام؟

الحل:

ليكن الحدث A «تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(A) = m = 0.9$

ليكن الحدث B «لا تخدم البطارية مدّة عام كامل» $P(B) = 1 - m = 1 - 0.9 = 0.1$

الحدث E «تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام كامل»

نستخدم احتمال ذات الحدين $n = 4$ ، $k = 4$

$$P(E) = {}_nC_k \cdot (m)^k \cdot (1-m)^{n-k}$$
$$= {}_4C_4 (0.9)^4 (0.1)^0$$
$$= 0.6561$$

احتمال أن تخدم كل من البطاريات الأربع مدة عام يساوي 0.6561

حاول أن تحل

8 في المثال (8)، ما احتمال أن تخدم 3 بطاريات فقط مدة عام كامل؟

المطلوب:

يلعب فيصل كرة المضرب. احتمال نجاحه في الإرسال الأول يساوي $\frac{2}{3}$

إذا فشل في الإرسال الأول يحق له أن يحاول مرة ثانية، وفي هذه الحالة، احتمال نجاحه في الإرسال يساوي $\frac{4}{5}$

عندما يفشل في الإرسالين يسمى ذلك خطأ مزدوج وإلا يعتبر الإرسال ناجحًا.

a ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال؟

b ما احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال 5 مرات من 7 محاولات؟

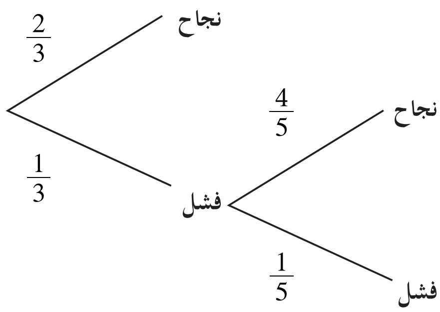
الحل:

a ينجح فيصل في الإرسال في الحالتين:

– إذا نجح في الإرسال الأول.

– إذا فشل في المحاولة الأولى ونجح في الثانية.

احتمال الفشل في الإرسال الأول يساوي: $1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$



فلنفكر:

يمكن رسم مخطط الشجرة البيانية ليمثل الحالة:

P(النجاح في الإرسال) = P(النجاح في الإرسال الأول) + P(الفشل في الإرسال الأول والنجاح في المرة الثانية)

$$P = \frac{2}{3} + \frac{1}{3} \times \frac{4}{5} = \frac{14}{15}$$

احتمال أن ينجح فيصل في الإرسال يساوي $\frac{14}{15}$

b نستخدم احتمال ذات الحدين، لأن الحدث تكرر 7 مرات مع ناتجين: النجاح أو الفشل.

ليكن E الحدث: «النجاح 5 مرات من 7 محاولات».

$$P(E) = {}_7C_5 \times \left(\frac{14}{15}\right)^5 \times \left(\frac{1}{15}\right)^2$$
$$\approx 0.0661$$

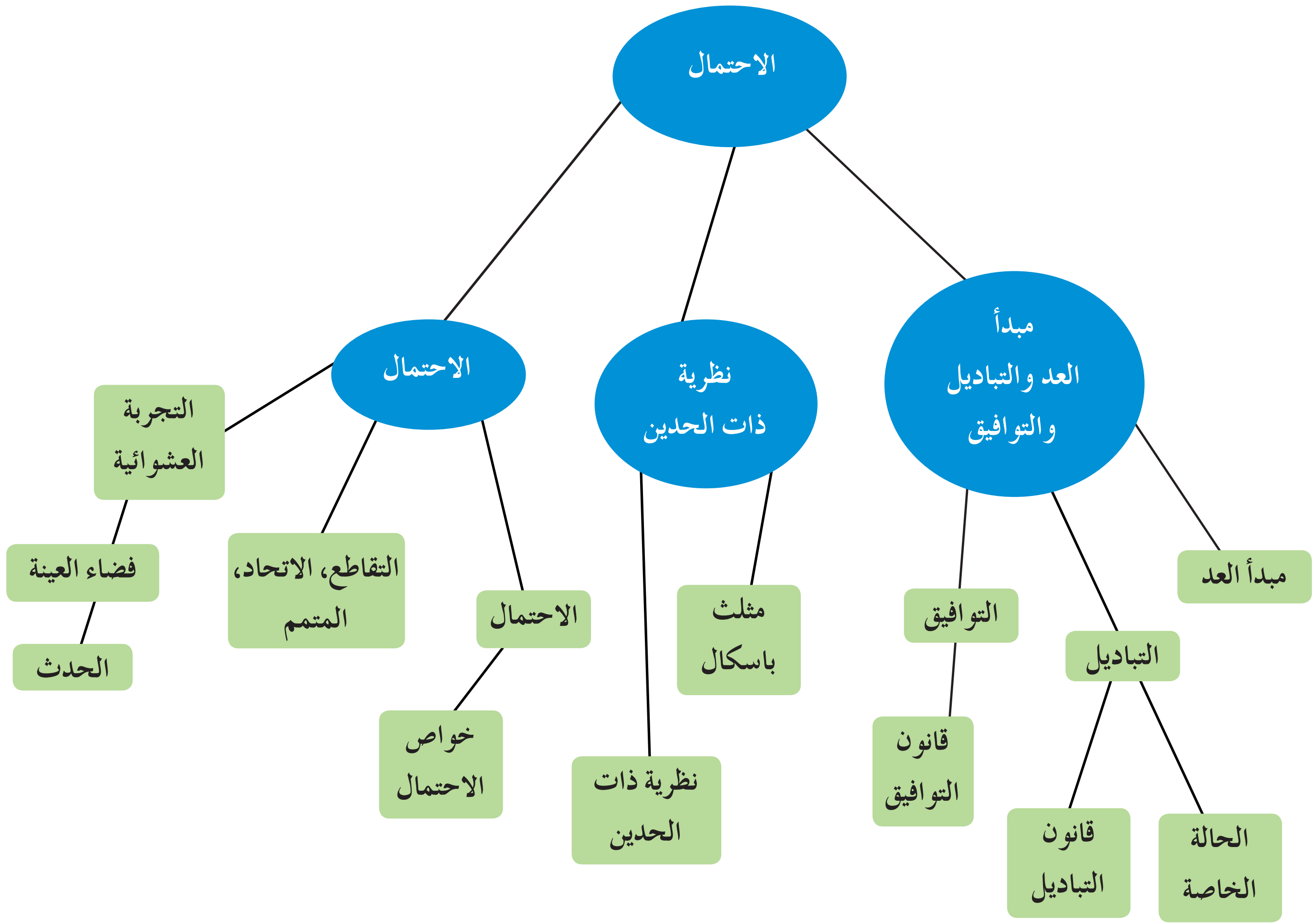
احتمال النجاح 5 مرات من 7 محاولات يساوي حوالي 0.0661

مسألة إضافية

في لعبة القوس والنشاب، احتمال أن يصيب عبد الله الهدف يساوي $\frac{1}{5}$

فما احتمال أن يصيب عبد الله الهدف على الأقل مرتين من 7 محاولات؟

مخطط تنظيمي للوحدة الحادية عشرة



ملخص

- لإجراء عملية على S مرحلة متتابعة، إذا أجريت المرحلة الأولى بـ r_1 طريقة مختلفة، والمرحلة الثانية بـ r_2 طريقة مختلفة وهكذا حتى المرحلة الأخيرة S التي تجري بـ r_n طريقة مختلفة، فإن عدد طرائق إجراء هذه العملية هو: $r_1 \times r_2 \times \ldots r_n$.
- التبديل هو توزيع لعناصر وفق ترتيب معين.
- قانون التباديل: ${}_nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$
- الحالة الخاصة ${}_nP_n = n!$
- التوفيقة هي توزيع لعناصر حيث الترتيب غير مهم.
- قانون التوافيق: ${}_nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$
- نظرية ذات الحدين: $(a+b)^n = ({}_nC_0)a^n + ({}_nC_1)a^{n-1}b + \ldots + ({}_nC_r)a^{n-r}b^r + \ldots({}_nC_n)b^n$

- التجربة العشوائية تجربة لها عدة نواتج مختلفة ممكنة ولكن لا يمكن التأكد مسبقًا من أن أي ناتج منها سوف يتحقق عند إجراء التجربة.
- مجموعة النواتج تسمى فضاء العينة.
- حدث بسيط: ناتج واحد.
- حدث مركب: أكثر من ناتج واحد.
- حدث مستحيل: المجموعة الجزئية خالية.
- حدث مؤكد: المجموعة الجزئية = فضاء العينة.
- حدثان متنافيان: وقوع أحدهما ينفي وقوع الآخر في التجربة.
- حدث متمم: يحوي جميع عناصر فضاء العينة التي لا تنتمي إلى الحدث.
- حدثان مستقلان: وقوع أحدهما لا يؤثر على وقوع الآخر.

$$P(E) = \frac{E \text{ عدد النواتج في الحدث}}{S \text{ عدد النواتج في فضاء العينة}}$$

$$P(E) = \frac{\textit{The number of outcomes in event } E}{\textit{The number of outcomes in sample space } S}$$

- $0 \leq P(E) \leq 1$
- P (حدث مستحيل) = 0، P(حدث مؤكد) = 1
- مجموع احتمالات النواتج في فضاء العينة = 1
- إذا كان A، B حدثين متنافيين، فإن $P(A \cap B) = 0,\ P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- إذا كان A، B حدثين مستقلين، فإن $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$
- إذا كان A، B حدثين غير متنافيين، فإن $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
- احتمال ذات الحدين = $P(E) = {}_nC_k \cdot (P(H))^k \cdot (P(T))^{n-k}$