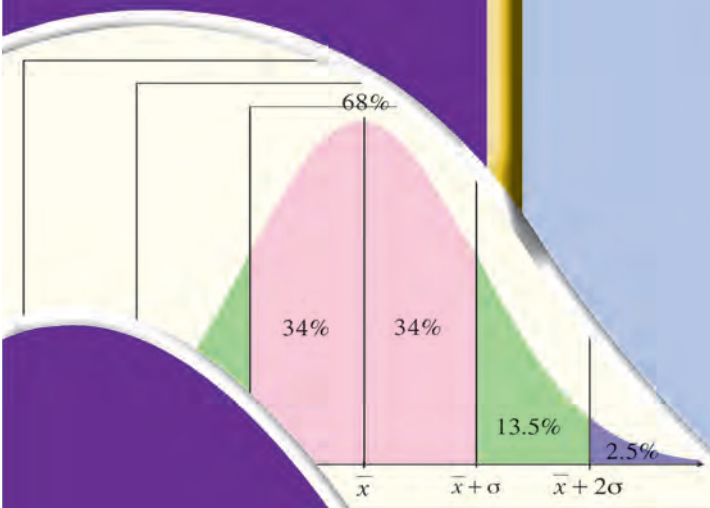
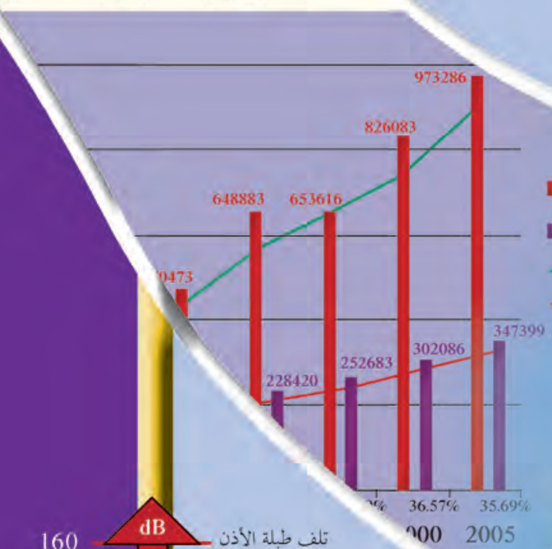
وزارة التربية

الرياضيات

كتاب الطالب





الصفّ الحادي عشر علمي

الفصل الدراسي الأوّل

11

الطبعة الثانية

وزارة التربية

NEWKUWAIT

الرياضيات

الصفّ الحادي عشر علمي
الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيسًا)

أ. حصة يونس محمد علي

أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ

٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

الطبعة الأولى ٢٠١٣م
الطبعة الثانية ٢٠١٥م
٢٠١٧م
٢٠١٩م

لجنة فرعية لدراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف الحادي عشر علمي

أ. حسن نوح علي المهنا (رئيسًا)

أ. حسين اليماني الشامي | أ. مصطفى محمد شعبان محمود
أ. صديقة أحمد صالح الانصاري | أ. شيخة فلاح مبارك الحجرف

أ. منى علي عيسى المسري

الكتاب كاملًا

شاركنا بتقييم مناهجنا

ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٥٢) بتاريخ ١٠/٥/٢٠١٥م

صاحب السمو الشيخ صباح الأحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت

سمو الشيخ نواف الأحمد الجابر الصباح

ولي عهد دولة الكويت

مقدمـــــة

الحمدلله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبدالله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

ومما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضامينها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيمانًا بأهميتها وانطلاقًا من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية، وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراستها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصفة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولنحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتوَياتُ

الوحدة الأولى

الأعداد الحقيقية

The Real Numbers

مشروع الوحدة: معدل السرعة

1 **مقدمة المشروع:** شغلت حركة كواكب النظام الشمسي العلماء منذ القدم. ما هو مدار كل كوكب؟ ما كتلته؟ وفي أي اتجاه يدور؟ وما هي الشهب؟
يعتبر يوهانز كيبلر Johannes Kepler من أهم علماء الفلك وواضع ما عرف بقوانين كيبلر الثلاثة حول حركة الكواكب في 1609 و1618.

2 **الهدف:** التعرف على قوانين كيبلر وإجراء بعض العمليات الحسابية حول مدار كوكب، وسرعته، وزنته.

3 **اللوازم:** آلة حاسبة علمية، أوراق رسم بياني، حاسوب، جهاز إسقاط Data Show.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

a اعرض قوانين كيبلر الثلاثة وادعم عرضك ببعض الرسوم التي تبيّن حركة الكواكب وعلاقتها بالمدار الإهليليجي (بيضاوي).

b ضع جدولًا يبيّن خصائص بعض كواكب النظام الشمسي: بُعدها عن الشمس، كتلتها، طول قطرها، الزمن المستغرق لدورانها دورة كاملة حول الشمس وحول نفسها.

c أوجد نسبة مربع الزمن لدورة الأرض دورة كاملة حول الشمس إلى مربع الزمن لدورة عطارد دورة كاملة حول الشمس، وقارنها بنسبة مكعب بُعد الأرض عن الشمس إلى مكعب بُعد عطارد عن الشمس.

d اسأل معلم مادة الجغرافيا عن حركة الكواكب وعن أبحاث كوبرنيكوس، وكيبلر، وجاليليو حول هذا الموضوع.

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصّلًا يبيّن خطوات المشروع وكيف استفدت من دروس الوحدة في حساباتك.
ضمّن التقرير نتائج محادثتك مع معلم مادة الجغرافيا. ودعمه بصور وملصقات أو عرض على جهاز الإسقاط Data Show.

دروس الوحدة

الجذور والتعبيرات الجذرية	الأسس النسبية	حل المعادلات
1–1	1–2	1–3

الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت الأعداد الحقيقية.
- تعرفت الجذر التربيعي.
- تعرفت حل المتباينات.
- استخدمت الآلة الحاسبة لإيجاد الجذور التربيعية.
- تعرفت القيمة المطلقة وحل متباينات تتضمن القيمة المطلقة.

ماذا سوف تتعلم؟

- ضرب الجذور التربيعية والجذور التكعيبية وقسمتها.
- ضرب التعبيرات الجذرية النونية وقسمتها.
- كيفية إيجاد المرافق واستخدامه.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي بالصورة الأسية.
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

المصطلحات الأساسية

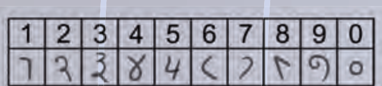
الجذر التربيعي – الجذر التكعيبي – الجذر النوني – المرافق – دليل الجذر – المجذور – المعادلة الجذرية – المعادلة الأسية – الصورة الجذرية – الصورة الأسية.

أضف إلى معلوماتك

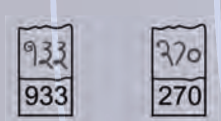
المعكوس الضربي لكل عدد حقيقي موجب أكبر من واحد هو عدد حقيقي موجب أصغر من واحد.

إذًا يوجد أعداد حقيقية موجبة أصغر من واحد بقدر ما يوجد أعداد حقيقية موجبة أكبر من واحد.

ظهور الصفر في الهند: في العام 876 وجدت الأرقام التالية في مغارة غواليور Gwalior (على بعد 300 km من نيودلهي) وتعود إلى القرن الخامس ويظهر فيها الصفر.



مثلًا:



انتقل هذا الترقيم إلى الغرب بواسطة الخوارزمي (بين القرنين الثامن والتاسع).

خضعت هذه الأرقام لعدة تحولات وأصبحت حاليًّا:

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

1–1

الجذور والتعبيرات الجذرية

Roots and Radical Expressions

سوف تتعلم

- اختصار الجذور.
- ضرب التعبيرات الجذرية.
- قسمة التعبيرات الجذرية.
- استخدام المرافق لتبسيط كسر إلى كسر مقامه عدد نسبي.

المفردات والمصطلحات:

- الجذر التربيعي Square Root
- الجذر التكعيبي Cubic Root
- التعبيرات الجذرية Radical Expressions
- دليل الجذر Radix
- المجذور Radicand
- المرافق Conjugate
- تحليل Analyse
- عوامل أولية Prime Factors

معلومة:

أسماء وحدات الطول

millimetre	mm
centimetre	cm
decimetre	dm
metre	m
decametre	dam
hectometre	hm
kilometre	km

معلومة:

عندما يكون دليل الجذر يساوي 2 فلا يكتب الدليل.

مثال: $\sqrt{x}$ تعني الجذر التربيعي لِـ x

أي مقدار يتضمن جذورًا يسمى تعبيرًا جذريًّا.

دعنا نفكر ونتناقش

1 صالة عرض سيّارات مكعبة الشكل. إذا كان:

a طول ضلعها يساوي 12 m فإن مساحة أحد أوجهها تساوي ....

b مساحة أحد أوجهها تساوي $100\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ...

c مساحة أحد أوجهها تساوي $400\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ... (يمكن استخدام الآلة الحاسبة).

d مساحتها الكلية تساوي $384\ m^2$ فإن طول ضلعها يساوي ...

e طول ضلعها يساوي 12 m فإن حجمها يساوي ...

f حجمها يساوي $512\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

g حجمها يساوي $970\ m^3$ فإن طول ضلعها يساوي ...

الجذور والتعبيرات الجذرية Roots and Radical Expressions

بما أن $(5)^2 = (-5)^2 = 25$

فإن العددين 5 , -5 هما الجذران التربيعيان للعدد 25

بما أن $(5)^3 = 125$ فإن العدد 5 هو الجذر التكعيبي للعدد 125

وأيضًا بما أن $(-5)^3 = -125$

فإن العدد (-5) هو الجذر التكعيبي للعدد (-125)

وبالتالي:

- لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

أي أن إذا كان $A^2 = x$ فإن $A = \pm\sqrt{x}\ ,\ x > 0$

- لكل عدد حقيقي جذر تكعيبي حقيقي واحد.

ملخص عدد الجذور الحقيقية لعدد حقيقي

العدد الحقيقي	عدد الجذور التربيعية	عدد الجذور الحقيقية التكعيبية
موجب	2	1
صفر	1	1
سالب	0	1

الجذور التكعيبية Cubic Roots

إذا كان $A^3 = B$، فإن $A = \sqrt[3]{B}$ وتقرأ **الجذر التكعيبي** للعدد B حيث 3 هو **دليل الجذر**، B هو **المجذور**.

$$(\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x \quad , \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

مثال (1)

أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلية الحاسبة:

a -8 b 125 c $-\frac{375}{24}$ d 0.064

الحل:

a الجذر التكعيبي للعدد (-8) هو $\sqrt[3]{-8}$

حلل (-8) إلى عوامله

$\sqrt[3]{x^3} = x \ , \ \forall x \in \mathbb{R}$

$$\sqrt[3]{-8} = \sqrt[3]{(-2)^3} = -2$$

b الجذر التكعيبي للعدد 125 هو $\sqrt[3]{125}$

حلل 125 إلى عوامله الأولية

$$\sqrt[3]{125} = \sqrt[3]{5^3} = 5$$

c $\sqrt[3]{\frac{-375}{24}} = \sqrt[3]{-\frac{125}{8}} = \sqrt[3]{-\frac{(5)^3}{(2)^3}} = \sqrt[3]{\left(-\frac{5}{2}\right)^3} = \frac{-5}{2}$

d $\sqrt[3]{0.064} = \sqrt[3]{\frac{64}{1000}} = \sqrt[3]{\frac{(4)^3}{(10)^3}} = \sqrt[3]{\left(\frac{4}{10}\right)^3} = \frac{4}{10}$

حاول أن تحل

1 أوجد الجذر التكعيبي لكل من الأعداد التالية دون استخدام الآلية الحاسبة:

a -27 b 64 c -0.008 d $\frac{343}{216}$

تبسيط الجذور Simplifying Radicals

حتى يكون التعبير الجذري في **أبسط صورة** يجب مراعاة ما يلي:

- ألا يكون للمجذور عوامل مرفوعة لقوة أكبر من أو تساوي دليل الجذر.
  فمثلًا $\sqrt{8a^6b^7}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المقام جذرًا. مثل: $\frac{5}{\sqrt{2}}$ «ليس في أبسط صورة».
- ألا يكون المجذور كسرًا. مثل: $\sqrt{\frac{4}{7}}$ «ليس في أبسط صورة».
- أن يكون دليل الجذر أصغر عدد صحيح موجب ممكن.
  مثل: $\sqrt[10]{32}$ «ليس في أبسط صورة».

معلومة:

$a^1 = a$

$a^0 = 1 \ , \ a \neq 0$

الرمز $(\forall)$ يقرأ لكل.

الرمز $(:)$ يقرأ حيث.

الرمز $(\in)$ يقرأ ينتمي إلى.

تذكر:

قوانين الأسس

$\forall n, m \in \mathbb{Z}, \forall a, b \in \mathbb{R},$

$a, b \neq 0$

$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$

$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$

$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$

$\left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$

معلومة:

أسماء مجموعات الأعداد

- مجموعة الأعداد الكلية Whole Numbers رمزها $\mathbb{N}$.
- مجموعة الأعداد الصحيحة Integers رمزها $\mathbb{Z}$.
- مجموعة الأعداد النسبية Rational Numbers رمزها $\mathbb{Q}$.
- مجموعة الأعداد غير النسبية Irrational numbers رمزها $\overline{\mathbb{Q}}$
- مجموعة الأعداد الحقيقية Real Numbers رمزها $\mathbb{R}$.

مثال (2)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية لكل عدد حقيقي x:

a $\sqrt{4x^6}$ b $\sqrt[3]{8x^3}+3x$

الحل:

a $\sqrt{4x^6}=\sqrt{2^2(x^3)^2}$ اكتب $4x^6$ على صورة مربعين

$=\sqrt{(2x^3)^2}$ $x^n \cdot y^n=(x\cdot y)^n$

$=|2x^3|$ $\sqrt{y^2}=|y|$

$$=\begin{cases}2x^3, & x\ge 0\\ -2x^3, & x<0\end{cases}$$

b $\sqrt[3]{8x^3}+3x=\sqrt[3]{2^3x^3}+3x$ تحليل العدد 8 إلى عوامله

$=\sqrt[3]{(2x)^3}+3x$ $x^n \cdot y^n=(x\cdot y)^n$

$=2x+3x$ $\sqrt[3]{x^3}=x$

$=5x$

حاول أن تحل

2 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية حيث x، y عددان حقيقيان:

a $\sqrt{9x^2y^4}$ b $\sqrt[3]{-27x^6}+3x^2$ c $\sqrt{x^8y^6}$

مثال (3) تطبيقات حياتية

أراد خالد أن يضع 4 درازن من البرتقال في صندوق.
يتسع الصندوق لـ 4 طبقات وتحتوي كل طبقة على 12 برتقالة، على أن تكون 3 برتقالات مقابلة لعرض الصندوق و 4 برتقالات مقابلة لطول الصندوق. وزن كل برتقالة هو بين 226 g و 255 g، إن وزن البرتقالة w مرتبط بأكبر طول لقطرها d وفق الصيغة: $w=\frac{d^3}{2.3}$ حيث w بالجرام (g)، d بالسنتيمتر (cm).

a أوجد طول قطر أكبر مقطع دائري للبرتقالة.

b أوجد الأبعاد لصندوق مناسب.

الحل:

a اكتب المتباينة $226<w<255$

عوّض $226<\frac{d^3}{2.3}<255$

اضرب في 2.3 $519.8<d^3<586.5$

تذكر:

$\sqrt{x^2}=|x|$

$$|x|=\begin{cases}x & : x>0\\ 0 & : x=0\\ -x & : x<0\end{cases}$$

معلومة:

أسماء وحدات الوزن

milligram	mg
centigram	cg
decigram	dg
gram	g
decagram	dag
hetogram	hg
kilogram	kg
ton	t

الربط بالحياة:

يستخدم الجذر التكعيبي لإيجاد طول نصف قطر كرة إذا عرف حجمها.

$V=\frac{4}{3}\pi r^3$

$r=\sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}}$

أوجد الجذر التكعيبي $\sqrt[3]{519.8} < \sqrt[3]{d^3} < \sqrt[3]{586.5}$

استخدم الآلة الحاسبة $8.04 < d < 8.37$

وبالتالي طول قطر أكبر مقطع دائري بين 8.04cm و 8.37cm

b عرض الصندوق: $3 \times 8.37 = 25.11\text{ cm}$

طول الصندوق = ارتفاع الصندوق:

$4 \times 8.37 = 33.48\text{ cm}$

حاول أن تحل

3 استخدم الصيغة $w = \frac{d^3}{2.3}$ لإيجاد طول قطر أكبر مقطع دائري لكل برتقالة وزنها كما يلي:

a 85 g　b 195.93 g　c 177.19 g

جمع وطرح التعبيرات الجذرية Adding and Subtracting Radical Expressions

لجمع التعبيرات الجذرية وطرحها، يجب أن تكون متشابهة

يكون التعبيران الجذريان متشابهين عندما يكون لهما دليل الجذر نفسه والمجذور نفسه.

يجب وضع التعبيرات الجذرية في أبسط صورة مما يسمح لنا بمعرفة ما إذا كانت متشابهة أم لا.

لاحظ أن: $5\sqrt{3}$ و $2\sqrt{3}$ تعبيران جذريان متشابهان

$8\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{x}$ $(x \geqslant 0)$ تعبيران جذريان متشابهان

$\sqrt{27}$ و $\sqrt{12}$ تعبيران جذريان متشابهان. لماذا؟

في حين أن:

$\sqrt{3}$ و $3\sqrt{5}$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

$\sqrt{x}$ و $-3\sqrt{y}$ $(x \geqslant 0 ، y \geqslant 0)$ هما تعبيران جذريان غير متشابهين

مثال (4)

أوجد الناتج في أبسط صورة

a $3\sqrt{32} - \sqrt{98}$

b $2\sqrt[3]{3} + 5\sqrt[3]{375}$

c $\sqrt{18} + \sqrt{50} - \sqrt{72}$

d $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{54} - 2\sqrt[3]{250}$

معلومة:

$\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$

- $\mathbb{R}^-$ مجموعة الأعداد الحقيقية السالبة.
- $\mathbb{R}^+$ مجموعة الأعداد الحقيقية الموجبة.

معلومة:

إذا كان $a \in \mathbb{R}^-$ ، فإن $\sqrt{a} \notin \mathbb{R}$ فمثلاً $\sqrt{-4} \notin \mathbb{R}$.

معلومة:

نتعامل مع التعبيرات الجذرية المتشابهة مثل تعاملنا مع الحدود الجبرية المتشابهة.

الحل:

a $3\sqrt{32}-\sqrt{98}$

$=3\sqrt{16\times 2}-\sqrt{49\times 2}$

$=3\sqrt{4^2\times 2}-\sqrt{7^2\times 2}$ اكتب 16 , 49 على صورة مربعات كاملة

$=3\times 4\times\sqrt{2}-7\times\sqrt{2}$ $\sqrt{x^2}=x, x\geqslant 0$

$=12\sqrt{2}-7\sqrt{2}$ بسّط

$=5\sqrt{2}$

b $2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{375}$

$=2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{125\times 3}$

$=2\sqrt[3]{3}+5\sqrt[3]{5^3\times 3}$ اكتب 125 على صورة مكعب كامل

$=2\sqrt[3]{3}+5\times 5\times\sqrt[3]{3}$ $\sqrt[3]{x^3}=x$

$=2\sqrt[3]{3}+25\sqrt[3]{3}$ بسّط

$=27\sqrt[3]{3}$

c $\sqrt{18}+\sqrt{50}-\sqrt{72}$

$=\sqrt{9\times 2}+\sqrt{25\times 2}-\sqrt{36\times 2}$

$=\sqrt{3^2\times 2}+\sqrt{5^2\times 2}-\sqrt{6^2\times 2}$ اكتب 9 , 25 , 16 على صورة مربعات كاملة

$=3\sqrt{2}+5\sqrt{2}-6\sqrt{2}$ $\sqrt{x^2}=x\ ,\ x\geqslant 0$

$=2\sqrt{2}$ بسّط

d $\sqrt[3]{128}+\sqrt[3]{54}-2\sqrt[3]{250}$

$=\sqrt[3]{64\times 2}+\sqrt[3]{27\times 2}-2\sqrt[3]{125\times 2}$

$=\sqrt[3]{4^3\times 2}+\sqrt[3]{3^3\times 2}-2\sqrt[3]{5^3\times 2}$ اكتب 64 , 27 , 125 على صورة مكعبات كاملة

$=4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-2\times 5\sqrt[3]{2}$ $\sqrt[3]{x^3}=x$

$=4\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{2}-10\sqrt[3]{2}$

$=-3\sqrt[3]{2}$ بسّط

حاول أن تحل

4 أوجد الناتج في أبسط صورة:

a $4\sqrt[3]{8}+2\sqrt[3]{128}$

b $2\sqrt{75}-\sqrt{48}$

c $\sqrt{12}+\sqrt{147}-\sqrt{27}$

d $\sqrt[3]{320}+\sqrt[3]{40}-\sqrt[3]{135}$

ضرب وقسمة الجذور التربيعية والجذور التكعيبية

الجذور التربيعية	الجذور التكعيبية
$\forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$	$\forall x, y \in \mathbb{R}$
$\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert = x$	$\sqrt[3]{x^3} = x$
$(\sqrt{x})^2 = x$	$(\sqrt[3]{x})^3 = x$
$\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}$	$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$
$\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}\ ,\ y \neq 0$	$\sqrt[3]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}}, y \neq 0$

فمثلًا:

$$\sqrt{12} = \sqrt{(4)(3)} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$$

$$\sqrt{2} \times \sqrt{8} = \sqrt{16} = 4$$

$$\frac{\sqrt[3]{54}}{\sqrt[3]{-2}} = \sqrt[3]{\frac{54}{-2}} = \sqrt[3]{-27} = -3$$

$$\sqrt{0.49} = \sqrt{\frac{49}{100}} = \frac{\sqrt{49}}{\sqrt{100}} = \frac{7}{10} = 0.7$$

مثال (5)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{72x^3}\ ,\quad x \geq 0$

b $\sqrt[3]{80n^5}$

الحل:

a $\sqrt{72x^3} = \sqrt{(6^2)(2)(x^2)(x)}$ — حلل 72، x^3

$= \sqrt{6^2x^2} \times \sqrt{2x}$ — $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y}, x \geq 0, y \geq 0$

$= 6\lvert x \rvert \times \sqrt{2x}$ — $\sqrt{x^2} = \lvert x \rvert,\ \forall x \in \mathbb{R}$

$= 6x\sqrt{2x}$ — $\lvert x \rvert = x,\ x \geq 0$

b $\sqrt[3]{80n^5} = \sqrt[3]{2^3(10)(n^3)(n^2)}$ — تحليل n^5 و 80 إلى مكعبات كاملة

$= \sqrt[3]{2^3n^3} \times \sqrt[3]{10n^2}$ — $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$= 2n\sqrt[3]{10n^2}$ — $\sqrt[3]{x^3} = x,\ \forall x \in \mathbb{R}$

حاول أن تحل

5 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{50x^4}$

b $\sqrt[3]{18x^3}$

مثال (6)

بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} \quad , \quad x \geq 0$

b $\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3}$

الحل:

a

$$\sqrt{5x^3} \times \sqrt{40x} = \sqrt{5(40)(x^3)(x)}$$ $\sqrt{x} \cdot \sqrt{y} = \sqrt{x \cdot y}, x \geq 0, y \geq 0$

$$= \sqrt{200x^4}$$ اضرب

$$= 10x^2\sqrt{2}$$ بسّط

b

$$\sqrt[3]{5x^3y^4} \times \sqrt[3]{64x^2y^3} = \sqrt[3]{(5x^3y^4) \times (64x^2y^3)}$$ $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$$= \sqrt[3]{(5x^3y^3y)(4^3)(x^2)(y^3)}$$ حلل إلى مكعبات كاملة

$$= \sqrt[3]{5(4^3) \cdot x^3 \cdot y^3 \cdot y^3 \cdot x^2 \cdot y}$$ خاصية التجميع

$$= \sqrt[3]{4^3x^3(y^2)^3} \times \sqrt[3]{5x^2y}$$ $\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$$= 4xy^2\sqrt[3]{5x^2y}$$ $\sqrt[3]{x^3} = x$

حاول أن تحل

6 بسّط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $3\sqrt{7x^3} \times 2\sqrt{x^3y^2} \quad , \quad x \geq 0$

b $4\sqrt[3]{x^4y} \times 3\sqrt[3]{x^2y}$

مثال (7)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\dfrac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}},\quad x \neq 0$

b $\dfrac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}},\quad x \neq 0,\ y \neq 0$

الحل:

a
$$\frac{\sqrt[3]{162x^5}}{\sqrt[3]{3x^2}} = \sqrt[3]{\frac{162x^5}{3x^2}}$$
$\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}},\ y \neq 0$

$$= \sqrt[3]{54x^3}$$
اقسم

$$= \sqrt[3]{2(3)^3x^3}$$
حلل 54 إلى عوامله

$$= \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{3^3 \times x^3}$$
$\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y}$

$$= 3x\ \sqrt[3]{2}$$
$\sqrt[3]{x^3} = x$

b
$$\frac{\sqrt[3]{250x^7y^3}}{\sqrt[3]{2x^2y}} = \sqrt[3]{\frac{250x^7y^3}{2x^2y}} = \sqrt[3]{125x^5y^2}$$
$\dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} = \sqrt[3]{\dfrac{x}{y}},\ y \neq 0$

$$= \sqrt[3]{125} \times \sqrt[3]{x^5y^2}$$
$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$$= 5 \times x\ \sqrt[3]{x^2} \times \sqrt[3]{y^2}$$
$\sqrt[3]{x^3} = x$

$$= 5x\ \sqrt[3]{x^2y^2}$$
$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

حاول أن تحل

7 أوجد ناتج كل من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\dfrac{\sqrt{243}}{\sqrt{27}}$

b $\dfrac{\sqrt{12x^4}}{\sqrt{3x}},\quad x > 0$

c $\dfrac{\sqrt[3]{128x^{15}}}{\sqrt[3]{2x^2}},\quad x \neq 0$

تبسيط كسر مقامه يتضمن جذرًا

إذا كان x, y تعبيرين جذريين يمثلان أعدادًا غير نسبية وكان ناتج ضرب x في y عددًا نسبيًّا فإن x, y مترافقان.

فمثلًا: $\sqrt{2}$ مرافق $\sqrt{2}$، لأن: $2 = \sqrt{2} \times \sqrt{2}$ حيث الناتج 2 عددًا نسبيًّا.

وكذلك $(3+\sqrt{2})$ مرافق $(3-\sqrt{2})$، لأن: $(3-\sqrt{2})(3+\sqrt{2}) = 9-2 = 7$ حيث الناتج 7 عددًا نسبيًّا.

وأيضًا $\sqrt[3]{5^2}$ مرافق لِـ $\sqrt[3]{5}$ لأنّ: $\sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{5^3} = 5$ حيث الناتج 5 عددًا نسبيًّا.

يمكن إعادة كتابة كسر يحتوي مقامه على جذور تربيعية أو جذور تكعيبية على شكل كسر مقامه عدد نسبي وذلك بضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام.

معلومة:

إذا كان a, b عددين صحيحين موجبين فإن:
$\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$.
$(\sqrt{a}-\sqrt{b})$، $(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ مترافقان.

معلومة:

المرافق ليس وحيد.

مثال (8)

اكتب كل كسر بحيث يكون المقام عددًا نسبيًّا:

a $\dfrac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ b $\dfrac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}$ c $\dfrac{3}{\sqrt[3]{5}}$ d $\dfrac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}$, $x>1$, $x\in\mathbb{Q}$

الحل:

a

اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt{3}$ وهو مرافق المقام $\sqrt{3}$

$$\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right)$$

اضرب

$$=\frac{\sqrt{3}+(\sqrt{2}\times\sqrt{3})}{(\sqrt{3})^2}$$

بسّط

$$=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$$

المقام عدد نسبيّ

$$\therefore\ \frac{1+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}+\sqrt{6}}{3}$$

b

اضرب بسط الكسر ومقامه في $3+\sqrt{2}$ وهو مرافق المقام $3-\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}-1}{3-\sqrt{2}}\times\left(\frac{3+\sqrt{2}}{3+\sqrt{2}}\right)$$

$(a-b)(a+b)=a^2-b^2$

$$=\frac{3\sqrt{2}+(\sqrt{2}\times\sqrt{2})-3-\sqrt{2}}{3^2-(\sqrt{2})^2}$$

بسّط

$$=\frac{3\sqrt{2}+2-3-\sqrt{2}}{9-2}$$

بسّط

$$=\frac{2\sqrt{2}-1}{7}$$

c

اضرب بسط الكسر ومقامه في $\sqrt[3]{5^2}$ وهو مرافق المقام $\sqrt[3]{5}$

$$\frac{3}{\sqrt[3]{5}}=\frac{3}{\sqrt[3]{5}}\times\frac{\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^2}}$$

$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{y}=\sqrt[3]{x\cdot y}$

$$=\frac{3\sqrt[3]{5^2}}{\sqrt[3]{5^3}}$$

$\sqrt[3]{x^3}=x$ وبالتالي المقام عدد نسبيّ

$$=\frac{3\sqrt[3]{25}}{5}$$

d

اضرب بسط الكسر ومقامه في مرافق المقام

$$\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}=\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-9x}\times\frac{\sqrt{x}+9x}{\sqrt{x}+9x}$$

اضرب

$$=\frac{x\sqrt{x}+9x^2+(\sqrt{x})^2+9x\sqrt{x}}{(\sqrt{x})^2-(9x)^2}$$

بسّط

$$=\frac{x\sqrt{x}+9x^2+x+9x\sqrt{x}}{x-81x^2}$$

$$=\frac{9x^2+10x\sqrt{x}+x}{x-81x^2}$$

$$= \frac{x(9x+10\sqrt{x}+1)}{x(1-81x)} \quad , \quad x > 1$$
عامل مشترك x

$$= \frac{9x+10\sqrt{x}+1}{1-81x}$$
بسّط

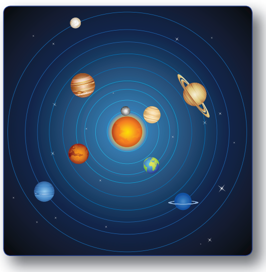
حاول أن تحل

8 أوجد ناتج كل من التعبيرات التالية في أبسط صورة:

a $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ **b** $\frac{3-\sqrt{2}}{2-\sqrt{2}}$ **c** $\frac{1}{\sqrt[3]{7^2}}$ **d** $\frac{x+\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}$, $x>1$, $x \in \mathbb{Q}$

مثال (9)

تطبيقات حياتية



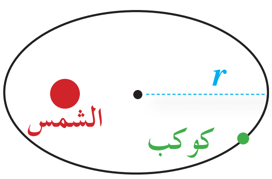
ينص قانون كيبلر الثالث على أن مربع الزمن الدوري (T^2) لدوران كوكب حول الشمس يتناسب طردًا مع مكعب نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب (r^3) ويمكن تمثيل ذلك بالعلاقة:

$T^2 = \frac{4\pi^2}{(6.673)\times(10^{-11})\times M} \times r^3$، حيث M بالكيلوجرام،

r بالمتر، T بالثانية.

أوجد نصف طول المحورالأكبر لمدار كوكب كتلته: $M=6\times10^{24}$kg

وزمنه الدوري: $T = 5175\ s$.



الحل:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{(6.673)(10^{-11})\times M} \times r^3$$

$$r^3 = \frac{M\times(6.673)(10^{-11})\times T^2}{4\pi^2}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{M\times(6.673)\times(10^{-11})\times T^2}{4\pi^2}}$$

$$r = \sqrt[3]{\frac{(6\times10^{24})(6.673\times10^{-11})(5175)^2}{4\pi^2}}$$

$$\approx 6.476\times10^6\ \text{m}$$

يبلغ نصف طول المحور الأكبر لمدار الكوكب حوالي 6.476×10^6 m

حاول أن تحل

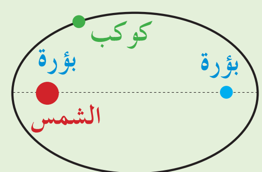
9 باستخدام العلاقة في مثال (9) أوجد الزمن الدوري إذا كان نصف طول المحور الأكبر لمدار كوكب 5.84×10^5 m، وكتلته 5.4×10^{21} kg

معلومة:

كيبلر عالم رياضيات وفلك وفيزياء ألماني، وضع قوانينًا تصف حركة دوران الكوكب حول الشمس.

من قوانينه:

كل كوكب يدور في مدار إهليليجي (بيضاوي) حول الشمس وتقع الشمس في إحدى بؤرتيه ويسمى هذا المدار بالقطع الناقص.



1-2

الأسس النسبية

Rational Exponents

سوف تتعلم

- كتابة عدد حقيقي في الصورة الجذرية.
- كتابة عدد حقيقي في الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الجذرية إلى الصورة الأسية.
- تحويل من الصورة الأسية إلى الصورة الجذرية.
- الجذر النوني للعدد.
- خواص الجذور النونية.
- ضرب الجذور النونية وقسمتها.

المفردات والمصطلحات:

- الصورة الجذرية Radical Form
- الصورة الأسية Exponential Form
- الجذر النوني n^{th} Root

دعنا نفكر ونتناقش

يقدّر علماء الآثار عمر المحفورات باستخدام الأسس النسبية

عرفت سابقًا أن: $x^3 \cdot x^3 = x^6$

ومنه استنتجنا أن x^3 هو جذر تربيعي لِـ x^6

كذلك $x^2 \cdot x^2 = x^4$ $\quad \therefore$ x^2 جذر تربيعي لِـ x^4

$x^{-1} \cdot x^{-1} = x^{-2}\ ,\ x \neq 0$

$\therefore$ x^{-1} جذر تربيعي لِـ x^{-2}

الجذر التربيعي الأساسي للعدد الموجب x هو $\sqrt{x}$

ونكتب: $x = \sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$

إذا حاولنا كتابة هذه المعادلة بالصيغة الأسية،

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$

$x^{\square} \cdot x^{\square} = x^1 = x$

بالمقارنة مع ما ورد أعلاه نستطيع أن نكتب: $\square + \square = 1$

$\square = \frac{1}{2}$.

تكتب $\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = x$ $\quad x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{2}} = x$

وقد اعتمدت الصيغة الأسية وعممت لكتابة أي تعبير جذري.

يمكنك كتابة أي تعبير جذري باستخدام الأس النسبي.

في الصورة الجذرية يعبر دليل الجذر عن الجذر الذي تريده، وفي الصورة الأسية يصبح دليل الجذر مقامًا للأس كما هو مبين في الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة الجذرية
$25^{\frac{1}{2}}$	$\sqrt{25} = \sqrt[2]{25}$
$27^{\frac{1}{3}}$	$\sqrt[3]{27}$
$64^{\frac{1}{4}}$	$\sqrt[4]{64}$

معلومة:

يعتبر عالما الرياضيات واليس WALLIS، وديكارت DESCARTES أول من استخدم الأسس النسبية.

ويمكن استخدام خواص الأسس لتبسيط التعبيرات الجذرية.

معلومة:

يرمز المفتاح ^ في بعض الآلات الحاسبة إلى الأس. وفي حالة الأسس النسبية يكتب الأس بين قوسين.

فمثلًا: $432^{\frac{3}{5}}$ يتم إدخالها إلى الآلة الحاسبة كما يلي:

432 ^ $(3 \div 5)$

مثال (1)

بسّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a) $125^{\frac{1}{3}}$ $\quad$ b) $5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}}$ $\quad$ c) $10^{\frac{1}{3}} \times 100^{\frac{1}{3}}$

الحل:

a

اكتب $125^{\frac{1}{3}}$ بالصورة الجذرية

$125^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{125}$

حلل 125 إلى عوامله الأولية

$= \sqrt[3]{5^3}$

$\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 5$

$\therefore\ 125^{\frac{1}{3}} = 5$

b

اكتب $5^{\frac{1}{2}}$ بالصورة الجذرية

$5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \times \sqrt{5}$

$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x} = (\sqrt{x})^2 = x\ ,\quad x \geq 0$

$= 5$

$\therefore\ 5^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 5$

c

اكتب $10^{\frac{1}{3}}$ و $100^{\frac{1}{3}}$ بالصورة الجذرية

$10^{\frac{1}{3}}(100^{\frac{1}{3}}) = (\sqrt[3]{10})(\sqrt[3]{100})$

$\sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{x \cdot y}$

$= \sqrt[3]{(10)(100)}$

$x^m \cdot x^n = x^{m+n}$

$= \sqrt[3]{10^3}$

$\sqrt[3]{x^3} = x$

$= 10$

$\therefore\ 10^{\frac{1}{3}}(100^{\frac{1}{3}}) = 10$

حاول أن تحل

1 بسِّط كل عدد من الأعداد التالية مستخدمًا الصورة الجذرية:

a $64^{\frac{1}{3}}$ **b** $(2^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$ **c** $(8^{\frac{1}{2}})(2^{\frac{1}{2}})$

يمكن أن يكون بسط الأس النسبي عددًا غير الواحد. الخاصية $(x^m)^n = x^{n \cdot m}$ تبين كيف يمكن إعادة كتابة أي تعبير بحيث يكون الأس كسرًا.

مثال (2)

اكتب العدد $25^{\frac{3}{2}}$ بالصورة الجذرية.

الحل:

$\frac{m}{n} = \frac{1}{n} \cdot m$

$x^{mn} = (x^m)^n$

$25^{\frac{3}{2}} = 25^{3 \times \frac{1}{2}} = (25^3)^{\frac{1}{2}}$

$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}\ ,\ x > 0$

$= \sqrt{25^3}$

$\therefore\ 25^{\frac{3}{2}} = \sqrt{25^3}$

حاول أن تحل

2 اكتب العدد $64^{\frac{4}{3}}$ بالصورة الجذرية.

إذا كان a عددًا حقيقيًّا، $n \geq 2$, $n \in \mathbb{Z}^+$:

وكان $\sqrt[n]{a}$ عددًا حقيقيًّا يساوي b حيث يرمز له بالرمز $b = \sqrt[n]{a}$ فإن $a = b^n$

المجذور ⟵ $\sqrt[n]{x}$ ⟶ دليل الجذر

إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، $n \geq 2$ ، $n \in \mathbb{Z}^+$ فإن:

1. $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
2. $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$ حيث $\frac{m}{n}$ في أبسط صورة
3. $\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| & \text{إذا كان } n \text{ عددًا زوجيًّا} \\ x & \text{إذا كان } n \text{ عددًا فرديًّا} \end{cases}$

مثال (3)

a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: (1) $x^{\frac{2}{5}}$ (2) $y^{-2.5}$, $\forall y > 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: (1) $(\sqrt[5]{y})^2$ (2) $\sqrt{b^3}$, $\forall b \geq 0$

الحل:

a (1) $x^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{x^2} = (\sqrt[5]{x})^2$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m} = (\sqrt[n]{x})^m$

(2) $y^{-2.5} = y^{-\frac{5}{2}}$ — حول 2.5 إلى كسر مركب

$= \frac{1}{y^{\frac{5}{2}}}$ — $x^{-n} = \frac{1}{x^n}, \ x \neq 0$

$= \frac{1}{\sqrt{y^5}}$, $\forall y > 0$ — $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

$\therefore \ y^{-2.5} = \frac{1}{\sqrt{y^5}}$, $\forall y > 0$

b (1) $(\sqrt[5]{y})^2 = \sqrt[5]{y^2}$ — $(\sqrt[n]{x})^m = \sqrt[n]{x^m}$

$= y^{\frac{2}{5}}$ — $\sqrt[n]{x^m} = x^{\frac{m}{n}}$

$\therefore \ (\sqrt[5]{y})^2 = y^{\frac{2}{5}}$

(2) $\sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$

$\therefore \ \sqrt{b^3} = b^{\frac{3}{2}}$, $b \geq 0$

حاول أن تحل

3 a اكتب بالصورة الجذرية كلًّا من: (1) $x^{0.4}$ (2) $y^{\frac{3}{8}}$, $\forall y \geq 0$

b اكتب بالصورة الأسية كلًّا من: (1) $\sqrt[3]{x^2}$ (2) $(\sqrt{y})^3$, $\forall y \geq 0$

مثال (4)

إن عدم شعور رائد الفضاء بانعدام التوازن في رحلة فضائية يعود إلى دوران جهاز يجلس فيه ويشعره بجاذبية وهمية تحاكي الجاذبية الأرضية.

يدور الجهاز وفق المعادلة الرياضية: $n = \dfrac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$

حيث n هي السرعة الدورانية وتقاس بالدورة في الثانية (s).

r هو طول نصف قطر جهاز الدوران ويقاس بالمتر (m).

g هي الجاذبية الوهمية التي تحاكي الجاذبية الأرضية.

احسب سرعة دوران جهاز، طول نصف قطره 1.7 m يدور ليحاكي الجاذبية الأرضية التي تساوي $9.8\ m/s^2$

الحل:

اكتب المعادلة
$$n = \frac{g^{0.5}}{2 \cdot \pi \cdot r^{0.5}}$$

عوض
$$\approx \frac{9.8^{0.5}}{2(3.14)(1.7)^{0.5}}$$

استخدم الآلة الحاسبة
$$n \approx 0.382$$

تبلغ سرعة دوران الجهاز حوالي 0.382 دورة في الثانية.

حاول أن تحل

4 احسب السرعة الدورانية المطلوبة للجهاز في المثال (4) ليحاكي جاذبية تحاكي نصف مقدار الجاذبية الأرضية.

الربط بالحياة:

نيل آرمسترونغ

Neil Armstrong

(1930 – 2012)

هو أول رائد فضاء وطأت قدماه سطح القمر.

- قاد سنة 1966 المركبة Gemini 8 وقام مع زميله ديفيد سكوت بإجراء أول عملية التحام بين مركبتين في الفضاء بواسطة إنسان.
- سنة 1969 قاد المركبة Apollo 11 برفقة بن آلدرن ومايكل كولينز. هبط آرمسترونغ مع آلدرن على سطح القمر حيث أمضيا 2h31min.

قوانين الأسس النسبية — Laws of Rational Exponents

ليكن n , m عددين نسبيين، b , a عددين حقيقيين حيث a^n , b^n , b^m أعدادًا حقيقية.

المثال	القانون
$8^{\frac{1}{3}} \times 8^{\frac{2}{3}} = 8^{\frac{3}{3}} = 8^1 = 8$	$b^m \cdot b^n = b^{m+n}$
$\left(5^{\frac{1}{2}}\right)^4 = 5^{\frac{1}{2}\times 4} = 5^2 = 25$	$(b^m)^n = b^{m \cdot n}$
$(4 \times 5)^{\frac{1}{2}} = 4^{\frac{1}{2}} \times 5^{\frac{1}{2}} = 2 \times 5^{\frac{1}{2}}$	$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$
$9^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{9^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{1}{3}$	$b^{-n} = \dfrac{1}{b^n}\ ,\ b \neq 0$
$\dfrac{9^{\frac{3}{2}}}{9^{\frac{1}{2}}} = 9^{\frac{3}{2}-\frac{1}{2}} = 9^1 = 9$	$\dfrac{b^m}{b^n} = b^{m-n}\ ,\ b \neq 0$
$\left(\dfrac{-125}{27}\right)^{\frac{1}{3}} = \dfrac{-125^{\frac{1}{3}}}{27^{\frac{1}{3}}} = \dfrac{-5}{3}$	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}\ ,\ b \neq 0$

يمكنك تبسيط أي عدد أسه عدد نسبي باستخدام قوانين الأسس النسبية أو بتحويله إلى تعبير جذري.

مثال (5)

بسّط كلًّا مما يلي مستخدمًا قوانين الأسس:

a) $(-32)^{\frac{3}{5}}$

b) $(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$, $x > 0$

الحل:

a)
$$(-32)^{\frac{3}{5}} = (-2^5)^{\frac{3}{5}}$$ $2^5 = 32$

$$= (-2)^{\frac{15}{5}}$$ $(b^m)^n = b^{m \cdot n}$

$$= (-2)^3$$ بسّط

$$= -8$$

b)
$$(x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{5}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$$

$$= \left(x^{\frac{1}{2}+\frac{5}{6}}\right) \div x^{\frac{2}{3}}$$ الخاصيّة

$$= (x^{\frac{8}{6}}) \div x^{\frac{2}{3}}$$ بسّط $\frac{b^m}{b^n} = b^{m-n}$

$$= x^{\frac{8}{6}-\frac{2}{3}} = x^{\frac{4}{6}} = x^{\frac{2}{3}}$$

حاول أن تحل

5 **بسّط كلًّا من الأعداد التالية مستخدمًا قوانين الأسس:**

a) $25^{-\frac{3}{2}}$

b) $(-32)^{\frac{4}{5}}$

c) $\left(\frac{16x^{14}}{81y^{18}}\right)^{\frac{1}{2}}$, $x \geq 0$, $y > 0$

لضرب أو لقسمة $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ يمكن استخدام الصورة الأسية لكل منهما وتطبيق قوانين الأسس أو تطبيق قوانين الجذور النونية.

قوانين الجذور النونية

إذا كان: $\sqrt[n]{y}$, $\sqrt[n]{x}$ عددين حقيقيين، فإن:

1. $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
2. $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}}$, $y \neq 0$
3. $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[m \cdot n]{x}$, $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \in \mathbb{R}$

مثال (6)

بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7}$

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}}$

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}}$

d $\left[\left(\sqrt{x^3 y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right]^{-1} \quad x , y \in \mathbb{Q}^+$

الحل:

طريقة أولى

a $\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{5 \times 7}$ $\qquad \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$

$= \sqrt[4]{35}$ اضرب

$\therefore \sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = \sqrt[4]{35}$

طريقة ثانية

$\sqrt[4]{5} \times \sqrt[4]{7} = 5^{\frac{1}{4}} \times 7^{\frac{1}{4}}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= (5 \times 7)^{\frac{1}{4}}$ $\qquad x^m \cdot y^m = (x \cdot y)^m$

$= (35)^{\frac{1}{4}}$ اضرب

$= \sqrt[4]{35}$ $\qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

طريقة أولى

b $\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\dfrac{16}{2}}$ $\qquad \dfrac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\dfrac{x}{y}}\,(y \neq 0)$

$= \sqrt[3]{8}$ اقسم

$= \sqrt[3]{2^3}$ حلل 8 إلى عوامله

$= 2$ $\qquad \sqrt[3]{x^3} = x$

$\therefore \dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = 2$

طريقة ثانية

$\dfrac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \dfrac{16^{\frac{1}{3}}}{2^{\frac{1}{3}}}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left(\dfrac{16}{2}\right)^{\frac{1}{3}}$ $\qquad \dfrac{x^n}{y^n} = \left(\dfrac{x}{y}\right)^n,\ y \neq 0$

$= 8^{\frac{1}{3}}$ اقسم

$= \sqrt[3]{8}$ $\qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 2$ بسّط

طريقة أولى

c $\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt{(256)^{\frac{1}{4}}}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left[(256)^{\frac{1}{4}}\right]^{\frac{1}{2}}$ $\qquad x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$

$= 256^{\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}}$ $\qquad (x^m)^n = x^{m\cdot n}$

$= 256^{\frac{1}{8}}$ اضرب

$= (2^8)^{\frac{1}{8}}$ حلل 256 إلى عوامله

$= 2$ $\qquad (x^m)^n = x^{m.n}$

طريقة ثانية

$\sqrt{\sqrt[4]{256}} = \sqrt[2\times4]{256}$ $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n\cdot m]{x}$

$= \sqrt[8]{2^8}$ حلل 256 إلى عوامله الأولية

$= 2$ $\qquad \sqrt[n]{x^n} = |x|$ (n عدد زوجي)

$\therefore \sqrt{\sqrt[4]{256}} = 2$

d $\left(\left(\sqrt{x^3y^3}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1} = \left(\left((x^3y^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ $\qquad \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$

$= \left(\left(((xy)^3)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ الخاصية: $(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$

$= \left(\left((xy)^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{1}{3}}\right)^{-1}$ الخاصية: $(b^n)^m = b^{n\cdot m}$

$= \left((xy)^{\frac{1\times3}{3\times2}}\right)^{-1}$

$= \left((xy)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$ بسّط

$= (xy)^{-\frac{1}{2}}$

$= \dfrac{1}{(xy)^{\frac{1}{2}}}$

$= \dfrac{1}{\sqrt{xy}}$

$= \dfrac{\sqrt{xy}}{xy}$ ضرب البسط والمقام بمرافق المقام

حاول أن تحل

6 بسط كلًّا من التعبيرات الجذرية التالية:

a $\sqrt[5]{9} \times \sqrt[5]{27}$ **b** $\dfrac{\sqrt[3]{243}}{\sqrt[3]{3}}$ **c** $\sqrt{\sqrt[3]{729}}$ **d** $\left(\sqrt[4]{x} \cdot \sqrt[4]{y^3}\right)^{-12}, x, y \in \mathbb{Q}^+$

مثال (7)

تعطى قوة الجاذبية بين جسمين بالعلاقة:

$g = 6.67 \times (10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$ حيث: k_2، k_1 كتلتي الجسمين بالكيلوغرام (kg)، d المسافة بين الجسمين بالمتر (m)، g قوة الجاذبية بالنيوتن (N).

أوجد المسافة بين الأرض والقمر إذا كانت كتلة الأرض تساوي تقريبًا 5.98×10^{24}kg ، كتلة القمر تساوي 1.23% من كتلة الأرض وقوة الجاذبية بينهما هي 183×10^{19} N تقريبًا.

الحل:

$$k_1 = (5.98)(10^{24})\text{kg} \quad , \quad k_2 = (1.23\%)(5.98)(10^{24})\text{kg}$$

$$g = (6.67)(10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{d^2}$$

$$\therefore \quad d^2 = (6.67)(10)^{-11} \cdot \frac{k_1 \cdot k_2}{g}$$

$$d = \sqrt{\frac{(6.67)(10)^{-11} \cdot k_1 \cdot k_2}{g}}$$

$$= \sqrt{\frac{(6.67)(10)^{-11}(5.98)(10^{24})(0.0123)(5.98)(10^{24})}{183 \times 10^{19}}}$$

$$d = \sqrt{\frac{(6.67)(5.98)^2(0.0123)(10^{18})}{183}}$$

$$\approx 126\,616\,735.4 \text{ m}$$

تبلغ المسافة بين الأرض والقمر 126 616 735.4 m تقريبًا.

حاول أن تحل

7 باستخدام العلاقة من مثال (7) أوجد المسافة بين الأرض والشمس إذا كانت كتلة الشمس تساوي $(2)(10^{30})$kg تقريبًا. وقوة الجاذبية بينهما $(53.2)(10^{23})$N

1-3

حل المعادلات

Solving Equations

سوف تتعلم
- حل معادلات جذرية.
- حل معادلات أسية.

المفردات والمصطلحات:
- معادلة جذرية Radical Equation
- معادلة أسية Exponential Equation
- كثيرة حدود من الدرجة الثانية Quadratic Polynomial

دعنا نفكر ونتناقش

1 ليكن: $a = \sqrt{7+4\sqrt{3}}$

a احسب: $(2+\sqrt{3})^2$

b استنتج قيمة مبسطة لِـ a

c أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^2 = 7+4\sqrt{3}$

2 مستعينًا بما قمت به في الفقرة 1

أوجد مجموعة حل المعادلة: $y^2 = 7-4\sqrt{3}$

3 a احسب $(\sqrt{7}-\sqrt{5})^2$.

b حل المعادلة: $x^2 = 12-2\sqrt{35}$

أولًا: المعادلات الجذرية Radical Equations

المعادلة الجذرية هي معادلة يكون أس المتغير فيها عددًا نسبيًّا (ليس عددًا صحيحًا) أو يتضمن المجذور متغيرًا.

فمثلًا:

معادلة جذرية $3+\sqrt{x} = 10$

معادلة جذرية $(x-2)^{\frac{1}{2}} = 1$

ليست معادلة جذرية $\sqrt{3}+x = 1$

تعلم

لحل معادلة جذرية اتبع الخطوات التالية:

الخطوة الأولى: أفصل الجذر إلى أحد طرفي المعادلة.

الخطوة الثانية: حدد شرط الحل

– إذا كان دليل الجذر عددًا زوجيًّا فإن قيمة ما تحت الجذر أكبر من أو يساوي الصفر وكلًّا من طرفي المعادلة أكبر من أو يساوي الصفر أيضًا.

– إذا كان دليل الجذر عددًا فرديًّا فإن قيمة ما تحت الجذر ينتمي إلى $\mathbb{R}$.

الخطوة الثالثة: ارفع طرفي المعادلة إلى أس مناسب يحذف الجذر.

الخطوة الرابعة: تأكد من أن الحل يحقق الشرط.

معلومة مفيدة:

الرمز $\Leftarrow$ يقرأ يؤدي إلى.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: **a** $2+\sqrt{3x-2}=6$ **b** $6+\sqrt{x-1}=3$

الحل:

a أفصل الجذر

$$2+\sqrt{3x-2}=6$$

$$\sqrt{3x-2}=4$$

$\because$ دليل الجذر عددًا زوجيًّا في $\sqrt{3x-2}$

حدِّد شرط الحل

$$\therefore\ 3x-2\geq 0$$

$$3x\geq 2 \Rightarrow x\geqslant \frac{2}{3}$$

$$\therefore\ x\in\left[\frac{2}{3},\infty\right)$$

ارفع إلى القوة 2 طرفي المعادلة

$$(\sqrt{3x-2})^2=4^2$$

$(\sqrt{x})^2=x$

$$3x-2=16$$

بسّط

$$x=6$$

تأكد من تحقق الشرط

$$\because\ 6\in\left[\frac{2}{3},+\infty\right)$$

$\therefore$ مجموعة الحل هي $\{6\}$

b أفصل الجذر

$$6+\sqrt{x-1}=3$$

$$\sqrt{x-1}=-3$$

مجموعة الحل $=\phi$ لأن $\sqrt{x-1}$ موجب، -3 سالب.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية: **a** $\sqrt{5x+4}-7=0$ **b** $\sqrt{x-2}+9=0$

لاحظ أن إيجاد شرط الحل يحدّد مجموعة التعويض والتي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة (صحيحة أو خاطئة) ومجموعة الحل تكون مجموعة جزئية من مجموعة التعويض وهي تشمل جميع القيم التي تجعل الجملة المفتوحة عبارة صحيحة.

يمكن حل معادلة على صورة $x^{\frac{m}{n}}=b$ برفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{n}{m}$، المعكوس الضربي لِـ $\frac{m}{n}$

إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن: $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}=|x|$

إذا كان m عددًا فرديًّا فإن: $\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}}=x$

ملاحظة: مقام الأس النسبي هو دليل الجذر.

مثال (2)

أوجد مجموعة الحل: $2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$

الحل:

$$2(x-2)^{\frac{2}{3}} = 50$$

اقسم

$$(x-2)^{\frac{2}{3}} = 25$$

ارفع طرفي المعادلة إلى الأس $\frac{3}{2}$

$$\left((x-2)^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}} = 25^{\frac{3}{2}}$$

$\left(x^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{n}{m}} = |x|$ إذا كان m عددًا زوجيًّا

$$|x-2| = \sqrt{25^3}$$

$$|x-2| = \sqrt{5^6} = 125$$

$|x| = b \Longrightarrow (x = b$ أو $x = -b)$

$$\therefore\ x-2 = 125 \quad \text{أو} \quad x-2 = -125$$

$$x = 127 \quad \text{أو} \quad x = -123$$

مجموعة الحل $= \{-123, 127\}$

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة الحل:

b $(1-x)^{\frac{2}{5}} - 4 = 0$

a $2(x+3)^{\frac{3}{2}} = 54$

يمكن الحصول على حلول دخيلة (لا تحقق الشرط) عند رفع طرفي المعادلة إلى قوة ما.

مثال (3)

أوجد مجموعة الحل: $5 + \sqrt{x-3} = x$

الحل:

أفصل الجذر

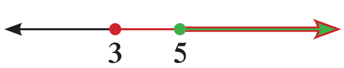
$$\sqrt{x-3} + 5 = x$$

$$\sqrt{x-3} = x - 5$$

تكون قيمة x مقبولة إذا حققت:

$$x - 3 \geq 0 \quad , \quad x - 5 \geq 0$$

$$x \geq 3 \quad , \quad x \geq 5$$



$$\therefore\ x \geq 5$$

$$\therefore\ x \in [5, \infty)$$

رفع طرفي المعادلة إلى القوة 2 $\quad (\sqrt{x-3})^2 = (x-5)^2$

$(\sqrt{x})^2 = x$ إذا كان $0 \le x$ $\quad x - 3 = (x-5)^2$

فك $\quad x - 3 = x^2 - 10x + 25$

بسّط $\quad x^2 - 11x + 28 = 0$

حلّل $\quad (x-4)(x-7) = 0$

$a \cdot b = 0$ مكافئ لِ $a = 0$ أو $b = 0$ $\quad x - 4 = 0$ أو $x - 7 = 0$

$x = 4$ أو $x = 7$

$4 \notin [5, \infty)\ ,\ 7 \in [5, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{7\}$

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة الحل: $\quad \sqrt{5x-1} + 3 = x$

في بعض الحالات تحتوي المعادلة على جذرين، فيتم فصلهما بحيث يحتوي كل طرف في المعادلة على جذر.

مثال (4)

أوجد مجموعة الحل لكل معادلة: b $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$ $\quad$ a $\sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

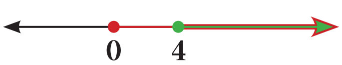
الحل:

a اكتب المعادلة $\quad \sqrt{8x} - 2\sqrt{4x-16} = 0$

أفصل كل جذر $\quad \sqrt{8x} = 2\sqrt{4x-16}$

تكون قيمة x مقبولة إذا حققت: $\quad 4x - 16 \ge 0\ ,\ 8x \ge 0$

أي $\quad x \ge 4\ ,\ x \ge 0$



$\therefore\ x \ge 4$

$\therefore\ x \in [4, \infty)$

ربّع طرفي المعادلة $\quad (\sqrt{8x})^2 = (2\sqrt{4x-16})^2$

$(\sqrt{x})^2 = x,\ x \ge 0$ $\quad 8x = 4(4x-16)$

اقسم على 4 $\quad 2x = 4x - 16$

$2x = 16 \Rightarrow x = 8$

$8 \in [4, \infty)$

$\therefore$ مجموعة الحل $= \{8\}$

ملاحظة:

$x = 4$ هو حل دخيل (لا يحقق الشرط).

b $\sqrt{x} + \sqrt{2x-4} = 0$

$\sqrt{x} = -\sqrt{2x-4}$

وهذا لا يتحقق إلّا إذا كان:

$\sqrt{2x-4} = 0 \Longrightarrow x = 2$ و $\sqrt{x} = 0 \Longrightarrow x = 0$

أي لا توجد قيمة للمتغير x تجعل الطرف الأيسر للمعادلة صفرًا

$\therefore$ مجموعة الحل $= \phi$

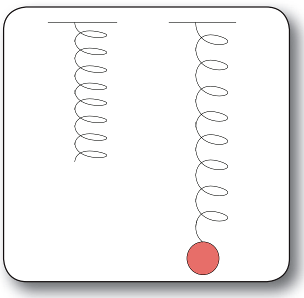
حاول أن تحل

4 أوجد مجموعة الحل لكل معادلة:

a $\sqrt{5x} - \sqrt{2x+9} = 0$

b $\sqrt{x-7} + \sqrt{3x-21} = 0$

مثال (5)



تعطى العلاقة بين دورة نابض مرن (زنبرك) مهتز وكتلة الجسم المعلّق به بالمعادلة: $f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$ ، حيث f : الدورة بالثواني(s)، m الكتلة بالكيلوجرام (kg)، $c = 20$ (ثابت).

أوجد كتلة جسم معلق بنابض دورته $f = 4s$

الحل:

$f = 2\pi\sqrt{\frac{m}{c}}$

$\sqrt{\frac{m}{c}} = \frac{f}{2\pi}$

عوّض

$\sqrt{\frac{m}{20}} = \frac{4}{2\pi}$

مربّع طرفي المعادلة

$\frac{m}{20} = \frac{16}{4\pi^2}$

استخدم الآلة الحاسبة

$m \approx 8.1$

تبلغ كتلة الجسم المعلق 8.1kg تقريبًا.

حاول أن تحل

5 تعطى العلاقة بين طول نابض مرن (زنبرك) ودورته بالمعادلة: $f = 2\pi\sqrt{\frac{l}{10}}$ ، حيث f دورة النابض بالثواني (s)، l طول النابض بالمتر (m).

أوجد طول نابض ساعة دورته 2 s.

ثانيًا: المعادلات الأسية Exponential Equations

المعادلات: $2^x = 32$, $(-3)^x = -243$, $\left(\frac{1}{2}\right)^y = 5$

تسمى معادلات أسية.

لحل معادلة أسية يمكن استخدام الخاصية التالية:

الربط بالحياة:

تستخدم المعادلات الأسية في العلوم الطبية فعند حقن مريض بمادة مشعة تحسب الكمية المتبقية في الجسم من هذه الجرعة بعد فترة زمنية بمعادلة أسية.

فمثلًا:

تنمذج الكمية المتبقية بعد t ساعة من حقنة هيبارين المضادة للتجلط بالمعادلة $y = 0.63^t$

ليكن a عدد حقيقي حيث $a \notin \{-1, 0, 1\}$

m، n عددان صحيحان

إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

تم استثناء الحالات التي يكون فيها a مساويًا لأي من الأعداد -1، 0، 1.

إليك أمثلة توضيحية لهذه الاستثناءات.

$1^{18} = 1^{17}$ ولكن $17 \neq 18$

$(-1)^3 = (-1)^{13}$ ولكن $3 \neq 13$

$0^3 = 0^4$ ولكن $3 \neq 4$

مثال (6)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a) $2^x = 64$

b) $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$

c) $\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$

الحل:

a)
$$2^x = 64$$
$$2^x = 2^6 \quad \text{حلل 64 إلى عوامله}$$
$$x = 6$$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{6\}$

b)
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 0.5$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \qquad 0.5 = \frac{1}{2}$$
$$\left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^1$$
$$\therefore\ x = 1$$

إذا كان $a^m = a^n$ فإن، $n = m$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{1\}$

c)
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{64}{27}\right)$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{4^3}{3^3} \qquad 3^3 = 27 \ ; 4^3 = 64$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{4}{3}\right)^3 \qquad \left(\frac{x^n}{y^n}\right) = \left(\frac{x}{y}\right)^n,\ y \neq 0$$
$$\left(\frac{3}{4}\right)^x = \left(\frac{3}{4}\right)^{-3} \qquad \left(\frac{x}{y}\right)^n = \left(\frac{y}{x}\right)^{-n},\ x \neq 0,\ y \neq 0$$
$$\therefore\ x = -3$$

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{-3\}$

تذكر:

إذا كان $ab = 0$ فإن $a = 0$ أو $b = 0$.

تذكر:

$a^0 = 1$ حيث $a \neq 0$

حاول أن تحل

6 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $3^x = 243$ b $\left(\frac{1}{4}\right)^x = \frac{1}{128}$ c $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$

يمكن أن يكون الأس كثيرة حدود.

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $3^{x^2-1} = 27$ b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$ c $6^{2x-8} = 1$

الحل:

a $3^{x^2-1} = 27$

$3^{x^2-1} = 3^3$ حلل 27 إلى عوامله الأولية

$x^2 - 1 = 3$ إذا كان $a^m = a^n$ فإن $m = n$

$x^2 = 4$ تبسيط

$x = 2$ أو $x = -2$ حل المعادلة

$\therefore$ مجموعة الحل = $\{2 ، -2\}$

b $7^{x^2-3x} = \frac{1}{49}$

$7^{x^2-3x} = \frac{1}{7^2}$ حلل 49 إلى عوامله الأولية

$7^{x^2-3x} = 7^{-2}$ $x^{-n} = \frac{1}{x^n}\ ,\ x \neq 0$

$x^2 - 3x + 2 = 0$ إذا كان $a^m = a^n$، فإن $m = n$

$(x-1)(x-2) = 0$ حلل

$x - 1 = 0$ أو $x - 2 = 0$

$\therefore x = 2$ أو $x = 1$

مجموعة الحل = $\{2 ، 1\}$

c $6^{2x-8} = 1$

$6^{2x-8} = 6^0$

$2x - 8 = 0$

$x = 4$

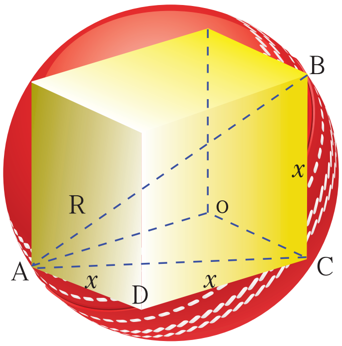
مجموعة الحل = $\{4\}$

حاول أن تحل

7 حل كل معادلة من المعادلات التالية:

a $5^{x^2-4} = 1$ b $3^{x^2+5x} = \frac{1}{81}$ c $2^{x^2-4} = 32$

المرشد لحل المسائل



مكعب طول ضلعه x محاط بكرة كما في الصورة المقابلة.

أوجد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

كيف نفكّر؟

إستراتيجية الحل:

إيجاد حجم المكعب، إيجاد حجم الكرة، ثم إيجاد نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب.

الخطوة الأولى: حجم المكعب.

في البداية علينا إيجاد حجم المكعب بدلالة طول ضلعه x.

حجم المكعب $= x^3$

الخطوة الثانية: حجم الكرة.

إيجاد نصف قطر الكرة.

AB هو قطر للكرة.

AB هو قطر للمكعب.

AB هو أيضًا وتر المثلث ABC قائم الزاوية C حيث: $AC = g$ ،$CB = x$.

a لإيجاد AB سنبدأ بإيجاد AC،

ACD مثلث قائم الزاوية D.

$(AC)^2 = x^2 + x^2 = 2x^2$ نظرية فيثاغورث

$\therefore\ AC = x\sqrt{2}$

b لإيجاد AB نستخدم المثلث ABC

ABC مثلث قائم الزاوية C

$(AB)^2 = (AC)^2 + (BC)^2$ نظرية فيثاغورث

$(AB)^2 = 2x^2 + x^2 = 3x^2$

$\therefore\ AB = x\sqrt{3}$

c لإيجاد طول نصف القطر:

$$R = \frac{x\sqrt{3}}{2}$$

d إيجاد حجم الكرة:

حجم الكرة: $\frac{4}{3}\pi r^3$

$$= \frac{4}{3}(3.14)\left(\frac{x\sqrt{3}}{2}\right)^3$$

$$= \frac{4(3.14)(3x^3\sqrt{3})}{(8)(3)}$$

$$\approx 1.57\sqrt{3}\,x^3$$

الخطوة الثالثة: احسب نسبة حجم الكرة إلى حجم المكعب:

نوجد $\frac{\text{حجم الكرة}}{\text{حجم المكعب}}$: $\frac{(1.57)\times x^3\sqrt{3}}{x^3} = \frac{2.72}{1}$

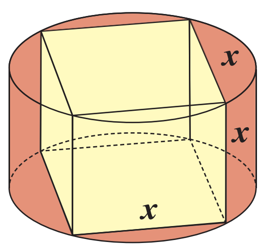
∴ حجم الكرة: حجم المكعب حوالى

2.72 : 1

مسألة إضافية

مكعب طول ضلعه x محاط بأسطوانة كما في الصورة أدناه.

أوجد نسبة حجم الأسطوانة إلى حجم المكعب.



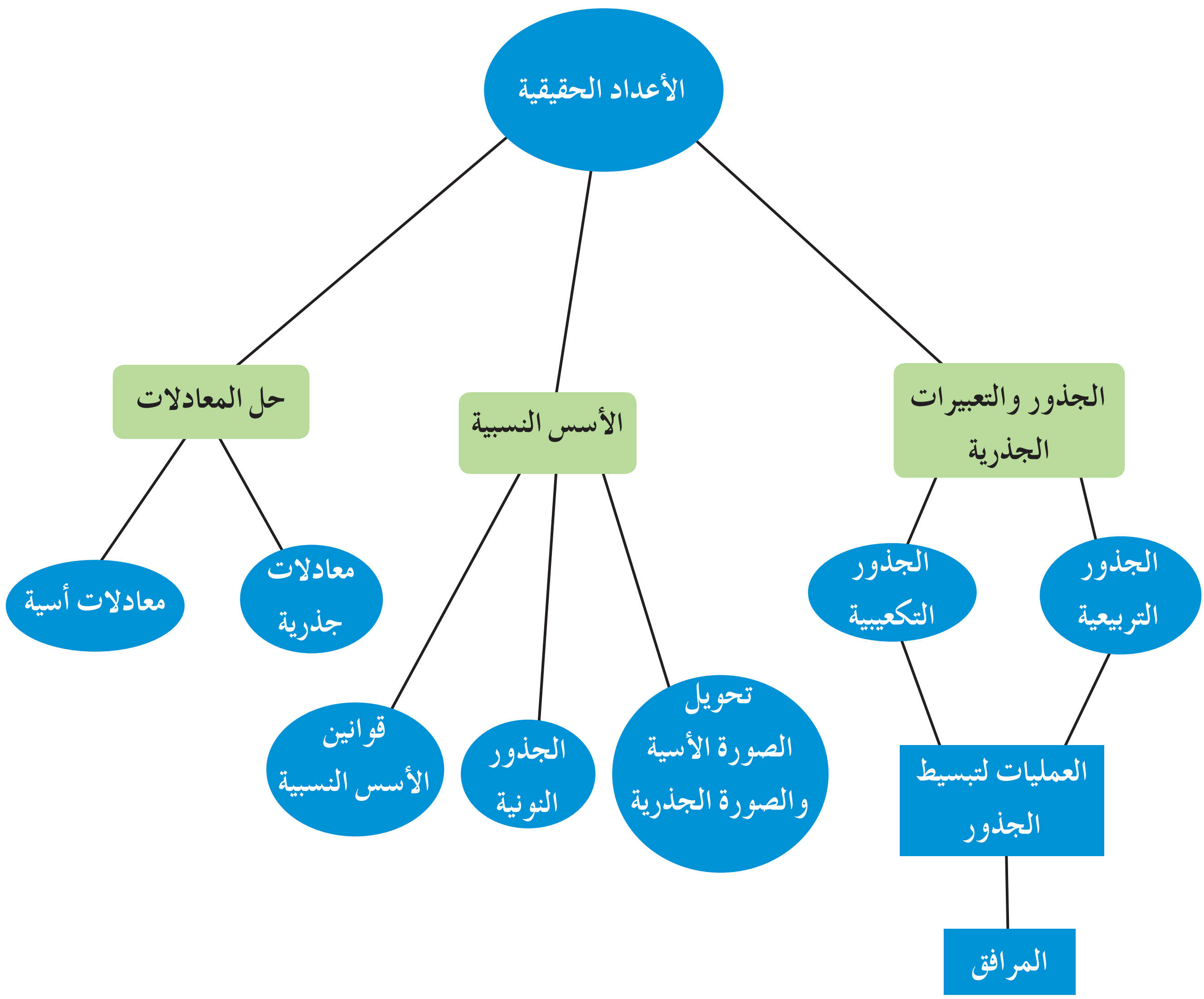
مساعدة رياضية

حجم الأسطوانة $= \pi \times r^2 \times h$

حيث h = ارتفاع الأسطوانة.

r = طول نصف القطر للأسطوانة.

مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



ملخص

- $\sqrt{x^2} = |x|\ ,\ (\sqrt{x})^2 = x$
- $A^2 = x,\ x \geqslant 0 \Longrightarrow A = \pm\sqrt{x}$
- $\forall x \in \mathbb{R}, (\sqrt[3]{x})^3 = \sqrt[3]{x^3} = x$
- $\sqrt{x \cdot y} = \sqrt{x} \cdot \sqrt{y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
- $\sqrt{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}^+$
- $\sqrt[3]{x \cdot y} = \sqrt[3]{x} \cdot \sqrt[3]{y} \qquad \forall x, y \in \mathbb{R}$
- $\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt[3]{y}} \qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \forall y \in \mathbb{R},\ y \neq 0$

- إذا كان a, b عددين نسبيين موجبين فإن:

$\sqrt{a}$ هو مرافق $\sqrt{a}$

$a+\sqrt{b}$ هو مرافق $a-\sqrt{b}$

المجذور $\longleftarrow \sqrt[n]{x} \longrightarrow$ دليل الجذر

- إذا كان الجذر النوني لعدد x هو عددًا حقيقيًّا، m عددًا صحيحًا، n عددًا طبيعيًّا $n > 1$ فإن:

- $x^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x}$
- $x^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{x^m}$

- إذا كان n عددًا زوجيًّا
- إذا كان n عددًا فرديًّا

$$\sqrt[n]{x^n} = \begin{cases} |x| \\ x \end{cases}$$

- $(\forall m,n \in \mathbb{Z} \ , \ \forall a,b \in \mathbb{R} \ , \ a,b \neq 0)$

$$\Longrightarrow \begin{cases} (a \cdot b)^n = a^n . b^n \\ a^m \cdot a^n = a^{m+n} \\ (a^m)^n = a^{m \cdot n} \\ \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m} \\ b^{-n} = \frac{1}{b^n} \\ \frac{b^n}{b^m} = b^{n-m} \end{cases}$$

- إذا كان $\sqrt[n]{x}, \sqrt[n]{y}$ عددين حقيقيين فإن:

- $\sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{x \cdot y}$
- $\frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}} = \sqrt[n]{\frac{x}{y}} \quad y \neq 0$
- $\sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} = \sqrt[n.m]{x} \ : \ \sqrt[n]{\sqrt[m]{x}} \in \mathbb{R}$

- المعادلة الجذرية معادلة أس المتغير فيها عدد نسبي أو يتضمن المجذور المتغير.

- إذا كان m عددًا زوجيًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = |x|$

- إذا كان m عددًا فرديًّا فإن: $(x^{\frac{m}{n}})^{\frac{n}{m}} = x$

- $m,n \in \mathbb{Z}, a \in \mathbb{R}, a \notin \{-1,0,1\} \ , \ a^m = a^n \Longrightarrow m = n$

الوحدة الثانية

الدوال الحقيقية

The Real Functions

مشروع الوحدة: رياضة القوس والنشاب

1 **مقدمة المشروع:** تستخدم رياضة القوس والنشاب سلاحًا على شكل قوس وأدوات رماية وهي الأسهم. يصوب فيها اللاعب على قرص كبير مقسم إلى خمس حلقات مختلفة الألوان بترتيب محدد من الداخل إلى الخارج: أصفر، أحمر، أزرق، أسود وأخيرًا أبيض ولكل حلقة عدد من النقاط غير المتساوية تتدرج من 1 إلى 10 بحسب قربها أو بعدها عن المركز. فمثلًا إذا سقط السهم على الحلقة البيضاء ينال الرامي نقطة واحدة (1) أما إذا سقط السهم على الحلقة الصفراء فينال الرامي 10 نقاط.

2 **الهدف:** خلال عملك في هذه الوحدة سوف تبحث في مواضيع مثل: كيف يختار الرماة أسهمهم؟ وكيف غيرت التكنولوجيا في هذه الرياضة؟ وقد تحتاج في نهاية المشروع إلى تقديم عرض لما توصلت إليه.

3 **اللوازم:** السهم: قطره الأقصى 9.3 mm، القوس: يختلف وزنه بين الإناث والرجال، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، أوراق ملصقات.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

a يرسم الطلاب القطع المكافئ الذي يمكن أن يمثله مسار السهم عندما يطلقه الرامي أثناء وقوفه أو أثناء جلوسه على كرسي متحرك.

b يمكن تنفيذ عدة رسوم لمسارات عدد من الأسهم، ثم تحديد التشابهات والاختلاف بينها. يوضح الجدول أدناه كيف أن وزن السهم يؤثر على محوره المركزي. ارسم البيانات المعطاة في الجدول على شبكة إحداثيات. هل حصلت على نموذج خطي أم على نموذج تربيعي؟

الوزن بالجرام (g)	140	150	170	175	205
المحور المركزي بالسنتيمتر (cm)	3.6	3.2	2.4	2	1.1

c افترض أنك أحد الرماة وصوبت سهمًا وأنت واقفًا. قس المسافة من الأرض إلى كتفك. افترض أنك قد أصبت هدفًا على ارتفاع 5 m عن سطح الأرض. ارسم بيانيًا الشكل الممثل لمسار سهمك مستخدمًا هذه البيانات. حدد هذا الشكل.

d أجر مقابلة مع أحد رماة القوس والنشاب في نادي الرماية الكويتي. ابحث عن بعض تقنيات هذه اللعبة وتطورها وشروط تطبيقها.

5 **التقرير:** قدم تقريرًا مفصلًا عن أبحاثك ورسومك عارضًا إيجابيات هذه اللعبة من حيث الدقة والتركيز والميزات الأساسية للاعب. قدم مشروعك بعرض بصري أو مسرحي قصير أو على قرص مدمج.

دروس الوحدة

مجال الدالة	الدوال التربيعية ونمذجتها	الدوال التربيعية والقطوع المكافئة	مقارنة بين صورة المعادلة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة	المعكوسات ودوال الجذر التربيعي	حل المتباينات
2-1	2-2	2-3	2-4	2-5	2-6

الوحدة الثانية

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعرفت العمليات الأساسية على التعابير الجذرية.
- تعرفت قوانين الأسس وكيفية استخدامها في تبسيط الجذور.
- تعلمت كيفية إيجاد حلول لمعادلات جذرية ومعادلات أسية.
- تعرفت نمذجة مواقف حياتية إلى دوال خطية ومعادلات تربيعية.
- تعلمت إيجاد حلول معادلة من الدرجة الثانية بطرائق متعددة.

ماذا سوف تتعلم؟

- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- نمذجة البيانات.
- إيجاد أوسع مجال للدوال الحدودية والنسبية والجذرية.
- إيجاد القيم الصغرى والقيم العظمى لدالة تربيعية.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.
- إيجاد رأس منحنى الدالة من الدالة المكتوبة في الصورة العامة.
- كتابة المعادلات التربيعية بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.
- إيجاد معكوس الدوال الخطية والدوال التربيعية.
- استخدام دوال الجذر التربيعي لتمثيل مواقف حياتية.
- حل متباينات تتضمن حدوديات من الدرجة الثانية في متغير واحد أو حدوديات نسبية.

المصطلحات الأساسية

دالة تربيعية – نمذجة بيانات – مجال – مدى – قيمة صغرى – قيمة عظمى – قطع مكافئ – رأس القطع المكافئ – الصورة العامة – معادلة بدلالة إحداثيات رأس القطع المكافئ – معكوس دالة خطية – معكوس دالة تربيعية – متباينة من الدرجة الثانية – متباينة حدوديات نسبية.

أضف إلى معلوماتك

ارتبطت رياضة الرماية منذ بداياتها الأولى بالقوة إذ بدأت كسلاح ثم تطورت لتصبح رياضة للنخبة.

حث الإسلام المسلمين على ممارسة هذه الرياضة وجعلها في مصاف الفروسية والسباحة. حتى أن الخليفة عمر بن الخطاب قال: «علموا أبناءكم السباحة والرماية وركوب الخيل». وبقيت هذه الهواية مصدرًا لكبرياء العرب وسلاحًا للدفاع عن أنفسهم.

ومن المتعارف عليه أنّ الرماية بالقوس والسهم يتطلب توازنًا وقدرة فائقة على التركيز تحت ضغط كبير وقوة مميّزة في جذب الوتر وإطلاق السهم وذلك بسرعة تصل إلى 240 km/h تقريبًا.

لقد تمكن المنتخب الوطني الكويتي لرماية القوس والسهم من الحصول على 8 ميداليات متنوعة في البطولة العربية الثامنة لرماية القوس والسهم والتي أقيمت في مدينة «سرت» الليبية لذا وضعت إدارة نادي الرماية الكويتي برامج هادفة لاستقطاب الشباب الكويتي على تطوير مهاراتهم وقدراتهم في ممارسة هذه الرياضة وقررت تجهيز ميدان متكامل وتوفير أحدث الأجهزة من أقواس وأسهم ومعدات للرماة.

2-1

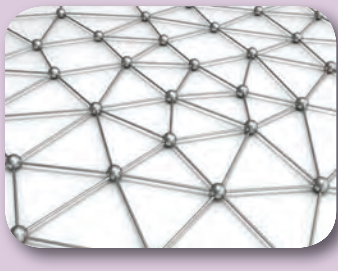
مجال الدالة

Domain of the Function

سوف تتعلم
- متى تمثل العلاقة دالة.
- مجال الدالة.

المفردات والمصطلحات:
- العلاقة Relation
- المجال Domain
- المجال المقابل Co-Domain
- المدى Range
- الدالة Function
- اختبار المستقيم الرأسي Vertical Line Test
- أصفار المقام Zeros of Denominator

دعنا نفكر ونتناقش



من أهم ما يميز حياة الإنسان العلاقات. مثل انتماء شخص إلى وطنه أو إلى نادي رياضي أو ثقافي أو انتماء نقطة إلى منحنى. يمكن تمثيل العلاقات أحيانًا بمخططات سهمية.

a اختر خمسة من أصدقائك، واكتب أسماءهم ثم صل كل اسم بسنة ولادته.

b أعد كتابة الأسماء الخمسة واكتب أسماء ثلاث رياضات ثم صل اسم كل شخص برياضته المفضلة.

في الفقرة a يرتبط كل اسم بسنة ولادته بينما في الفقرة b قد يرتبط الاسم الواحد بأكثر من رياضة أو قد لا يرتبط بأي رياضة.

قارن بين عملك وعمل زملائك في الفصل.

سوف نتعرف في هذا الدرس على العلاقات ونمثلها بيانيًا، وسوف نتعرف أيضًا متى تمثل العلاقة دالة مع التركيز على العلاقات في المستوى الإحداثي.

العلاقة والدالة Relation and Function

كثيرًا ما نحتاج في الرياضيات وتطبيقاتها إلى التعبير عدديًا أو جبريًا عن علاقة تربط بين متغيرين أو أكثر، والعلاقة رياضيًا هي أي مجموعة من الأزواج المرتبة في المستوى الإحداثي، وتسمى مجموعة المساقط الأولى لهذه الأزواج (الإحداثيات الأفقية أي السينية) **مجال العلاقة**.
وتسمى مجموعة المساقط الثانية (الإحداثيات الرأسية أي الصادية) **مدى العلاقة** وهي مجموعة جزئية من **المجال المقابل**.

عندما يكون كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر (عدد) واحد فقط من المجال المقابل، فإن العلاقة تسمى دالة.

والدالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.

معلومة مفيدة:
(a, b) زوج مرتب
يسمى a المسقط الأول،
b المسقط الثاني.

مثال توضيحي (1)

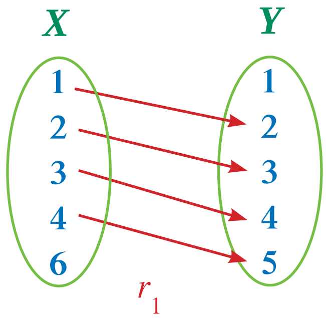
في المخططات السهمية التالية علاقات من: $X \longrightarrow Y$

1 حدّد المجال والمجال المقابل والمدى.

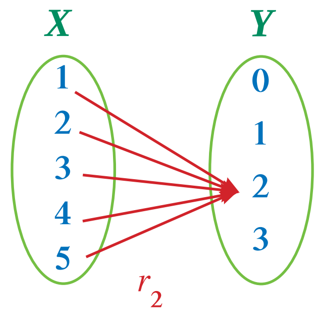
2 اكتب كل علاقة على شكل مجموعة من الأزواج المرتبة.

3 بيّن أي من العلاقات يمثل دالة حقيقية وأيها لا يمثل دالة حقيقية مع ذكر السبب.

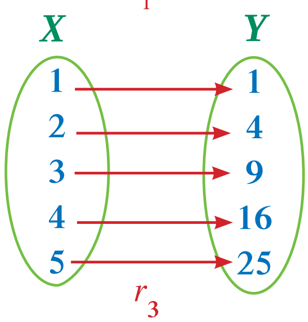
a



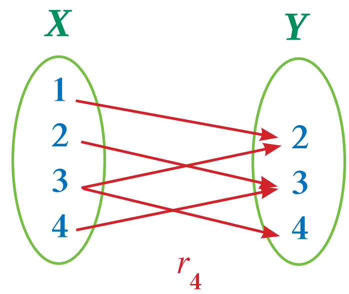
b



c



d



الحل:

a **1** المجال $= \{1, 2, 3, 4, 6\}$

المجال المقابل $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المدى $= \{2, 3, 4, 5\}$

2 العلاقة: $r_1 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 4), (4, 5)\}$

3 العلاقة r_1 لا تمثل دالة لأن العنصر 6 من المجال لم يقترن بعنصر من المجال المقابل.

b **1** المجال $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المجال المقابل $= \{0, 1, 2, 3\}$

المدى $= \{2\}$

2 العلاقة: $r_2 = \{(1, 2), (2, 2), (3, 2), (4, 2), (5, 2)\}$

3 العلاقة r_2 تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

c **1** المجال $= \{1, 2, 3, 4, 5\}$

المجال المقابل $= \{1, 4, 9, 16, 25\}$

المدى $= \{1 ،4, 9, 16, 25\}$

2 العلاقة: $r_3 = \{(1, 1), (2, 4), (3, 9), (4, 16), (5, 25)\}$

3 العلاقة r_3 تمثل دالة حقيقية لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

d **1** المجال $= \{1, 2, 3, 4\}$

المجال المقابل $= \{2, 3, 4\}$

المدى $= \{2, 3, 4\}$

2 العلاقة: $r_4 = \{(1, 2), (2, 3), (3, 2), (3, 4), (4, 3)\}$

3 العلاقة r_4 لا تمثل دالة حقيقية لأن العنصر 3 من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

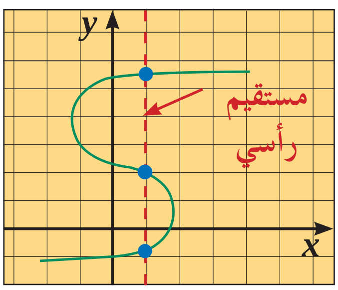
إذا كانت العلاقة ممثلة بيانيًّا في المستوى الإحداثي، نستخدم في هذه الحالة **اختبار المستقيم الرأسي** (العمودي) لمعرفة ما إذا كانت العلاقة تمثل دالة أم لا.

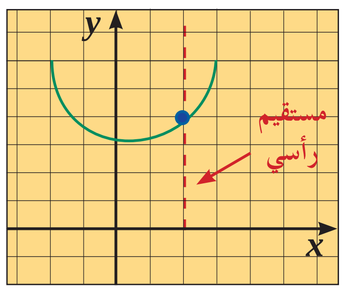
اختبار المستقيم الرأسي:

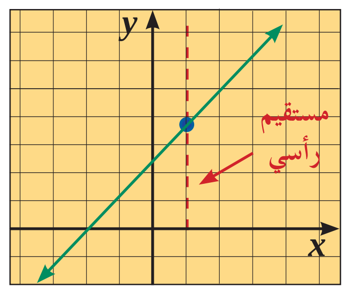
إذا تقاطع كل مستقيم رأسي مع بيان علاقة ما بنقطة واحدة على الأكثر، فإن هذه العلاقة تكون دالة.

مثال (1)

استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل بيان دالة أم لا:

a


b


c


الحل:

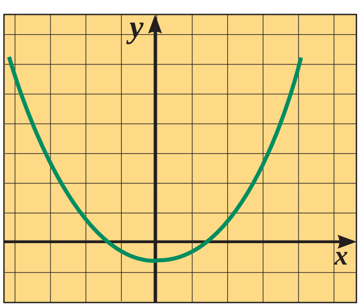
a يمكن رسم على الأقل مستقيم رأسي واحد يقطع المنحنى بأكثر من نقطة واحدة ∴ البيان لا يمثل دالة.

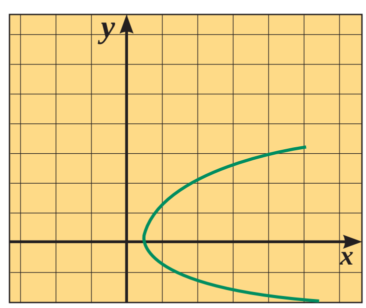
b كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة على الأكثر ∴ البيان يمثل دالة.

c كل مستقيم رأسي يقطع المنحنى بنقطة واحدة ∴ البيان يمثل دالة.

حاول أن تحل

1 استخدم اختبار المستقيم الرأسي لتحديد ما إذا كان بيان كل علاقة مما يلي يمثل دالة أم لا:

a


b


مجال الدالة   Domain of the function

إذا كانت لدينا دالة: $y = f(x)$، فإن مجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية التي يأخذها المتغير x ولتكن D هذه المجموعة، وينتج عنها قيم حقيقية للمتغير y ونقول أن **الدالة معرّفة على المجال D**.

مثال توضيحي (2)

حدّد مجال كل من الدوال التالية:

a $f(x) = 2x + 1$

b $g(x) = x^2 + 3x + 1$

c $t(x) = \sqrt{3x - 4}$

d $h(x) = \dfrac{x+2}{x-4}$

e $u(x) = \sqrt[3]{2x + 1}$

f $v(x) = \dfrac{\sqrt{3x-4}}{x-2}$

الحل:

a الدالة f كثيرة حدود وبالتالي أي قيمة حقيقية يأخذها المتغير x ينتج عنها قيمة حقيقية للمتغير y ومنه نجد أن مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

b الدالة g كثيرة حدود وكما هو في a نجد أن مجال الدالة g هو $\mathbb{R}$.

c من المعروف أنه لا يوجد للعدد السالب جذر تربيعي في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ وعليه يكون مجال الدالة t هو مجموعة قيم x الحقيقية والتي تجعل المجذور عددًا موجبًا أو صفرًا.
لذا نكتب:

$$3x - 4 \geq 0 \Longrightarrow x \geq \frac{4}{3}$$

$$x \in \left[\frac{4}{3}, \infty\right)$$

أي أن مجال t هو $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$

d لنفرض أن: $h(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$

الدالة h دالة نسبية (حدودية نسبية) حيث البسط n دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ والمقام d دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

لإيجاد أصفار المقام نكتب: $d(x) = 0$

كالتالي: $x - 4 = 0 \Longrightarrow x = 4$

فيكون مجال الدالة h مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ باستثناء العدد 4.

$\therefore$ مجال الدالة $h = \mathbb{R} / \{4\}$

أو $(-\infty, 4) \cup (4, \infty)$.

e إن الجذر التكعيبي لأي عدد معرّف في مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ ومنها الجذر التكعيبي لأي دالة كثيرة الحدود يكون معرفًا على مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.

$\therefore$ مجال الدالة u هو $\mathbb{R}$

f لنفرض أن: $v(x) = \dfrac{n(x)}{d(x)}$

الدالة v دالة نسبية حيث البسط n دالة مجالها $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$ والمقام d دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$.

معلومة رياضية:

$\mathbb{R} - \{4\}$ يمكن أن تكتب بالصورة $\mathbb{R} / \{4\}$.

مجموعة أصفار المقام $= \{2\}$

$\because$ مجال v هو كل قيم لـ x الحقيقية التي ينتج عنها $v(x)$ قيمًا حقيقية.

$\therefore$ تكون مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي البسط والمقام هي $\left[\frac{4}{3}, \infty\right)$ باستثناء $\{2\}$

أي أن مجال $v = \left[\frac{4}{3}, \infty\right)/\{2\}$

أو $\left[\frac{4}{3}, 2\right) \cup (2, \infty)$

تساعدنا القواعد التالية على تحديد مجال الدالة:

1. مجال الدالة كثيرة الحدود هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
2. مجال الدالة الحدودية النسبية هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ عدا مجموعة أصفار المقام.
3. مجال الدالة $f(x) = |x|$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$.
4. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد زوجي هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $g(x) \geq 0$.
5. مجال الدالة $f(x) = \sqrt[n]{g(x)}$ حيث n عدد فردي هو مجال الدالة g.
6. مجال الدالة $f(x) = g(x) \pm h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

   أي أن مجال $f =$ مجال $g \cap$ مجال h.
7. مجال الدالة $f(x) = g(x) . h(x)$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g.

   أي أن مجال $f =$ مجال $g \cap$ مجال h.
8. مجال الدالة $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ هو مجموعة الأعداد الحقيقية المشتركة بين مجالي الدالتين h, g عدا أصفار المقام $(h(x) \neq 0)$.

   أي أن مجال $f =$ (مجال $g \cap$ مجال h)/مجموعة أصفار المقام.

مثال (2)

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a) $f(x) = 2x^3 - 4x - \sqrt{2x-6}$

b) $g(x) = (2x^2 + x)\sqrt{8-2x}$

c) $h(x) = \dfrac{\sqrt[3]{1+x}}{x^2 - 1}$

d) $u(x) = \dfrac{4}{\sqrt{-x}}$

الحل:

a) لنفرض أن: $b(x) = 2x^3 - 4x \quad , \quad a(x) = \sqrt{2x-6}$

فيكون $f(x) = b(x) - a(x)$

مجال b هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

مجال a يتحقق إذا كان: $2x - 6 \geqslant 0 \Longrightarrow x \geqslant 3$

مجال a هو: $[3, \infty)$

$\therefore$ مجال $f =$ مجال $a \cap$ مجال b

أي أن مجال f: $\mathbb{R} \cap [3, \infty)$

$= [3, \infty)$

b لنفرض أن: $m(x) = 2x^2 + x \quad , \quad p(x) = \sqrt{8-2x}$

فيكون: $g(x) = m(x) \cdot p(x)$

مجال الدالة m هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة كثيرة الحدود.

مجال الدالة p يتحقق إذا كان $8 - 2x \geqslant 0 \Longrightarrow x \leqslant 4$

$\therefore$ مجال p هو $(-\infty, 4]$

أي أن مجال g: $\mathbb{R} \cap (-\infty, 4]$

$= (-\infty, 4]$

c لنفرض أن: $h(x) = \dfrac{q(x)}{r(x)}$ حيث $q(x) = \sqrt[3]{1+x}$ $\quad r(x) = x^2 - 1$

مجال البسط q هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنه جذر تكعيبي لكثيرة حدود.

المقام r دالة كثيرة حدود مجالها $\mathbb{R}$ ومجموعة أصفار المقام هي $\{-1 ,1\}$

$\therefore$ مجال h = (مجال q $\cap$ مجال r)/مجموعة أصفار المقام.

أي أن مجال h:

$$(\mathbb{R} \cap \mathbb{R}) - \{1-, 1\} = \mathbb{R} - \{-1, 1\}$$

d لنفرض أن: $u(x) = \dfrac{s(x)}{t(x)}$، حيث $s(x) = 4$, $t(x) = \sqrt{-x}$

مجال البسط s هو مجموعة الأعداد الحقيقية $\mathbb{R}$ لأنها دالة ثابتة.

مجال المقام t هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تجعل المجذور عددًا موجبًا أو صفرًا. $-x \geq 0 \Longrightarrow x \leq 0$

$x \in (-\infty, 0]$

مجموعة أصفار المقام هي $\{0\}$

$\therefore$ مجال u = (مجال s $\cap$ مجال t)/مجموعة أصفار المقام.

أي أن مجال u:

$$\left(\mathbb{R} \cap (-\infty, 0]\right) - \{0\} = (-\infty, 0)$$

حاول أن تحل

2 أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f_1(x) = \dfrac{2x+5}{x-4}$

b $f_2(x) = x^3 - 4x^2 - 4 + \sqrt{x-9}$

c $f_3(x) = \dfrac{\sqrt{5-4x}}{x^2+4}$

d $f_4(x) = \sqrt[3]{\dfrac{x^2-5x}{x}}$

2-2

الدوال التربيعية ونمذجتها

Quadratic Functions and their Modelling

سوف تتعلم

- الدوال التربيعية واستخداماتها.
- تقدير متى تستخدم النموذج الخطي أو النموذج التربيعي.

سوف تحتاج إلى...

- عبوة بلاستيكية سعتها لتران.
- شريط لاصق.
- مسمار.
- مسطرة.
- ساعة رقمية.
- مياه.
- وعاء أو حوض.
- ورق رسم بياني.
- آلة حاسبة علمية.

المفردات والمصطلحات

- الدوال التربيعية
  Quadratic Functions
- الصورة العامة
  General Form
- حد من الدرجة الثانية
  Quadratic Term
- حد مطلق (ثابت)
  Constant Term
- دالة خطية
  Linear Function
- مجال الدالة
  Domain of the Function

عمل تعاوني

قسم الفصل إلى مجموعات لإجراء هذه التجربة.

حدد مهام أفراد مجموعتك. اطلب إلى أحدهم أن يراقب الزمن، واطلب إلى آخر أن يقوم بوضع العلامات. ثبت شريطًا لاصقًا بطول الزجاجة واصنع ثقبًا بجانب قاعدتها بواسطة مسمار.

أولًا: ضع علامة عند مستوى الثقب على الشريط اللاصق واكتب عند هذه العلامة «0» ثم أغلق الثقب بواسطة الشريط اللاصق.

املأ الزجاجة بالماء، ثم ضع علامة عند مستوى الماء في الزجاجة.

ثانيًا: انزع الشريط اللاصق من على الثقب ودع الماء يتدفق. ضع علامة عند مستوى سطح الماء كل 10 s استمر على هذا النحو حتى يصل مستوى سطح الماء إلى الصفر.

1 قس المسافة من «0» إلى كل علامة، ثم ارسم جدولًا مماثلًا للجدول أدناه ودوّن فيه بياناتك.

2 a مثل بياناتك على شبكة إحداثيات.

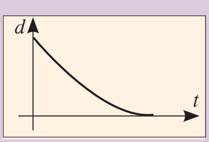
b أضف خطًّا إلى رسمك يوضح نزعة البيانات.

هل تبدو البيانات خطية؟

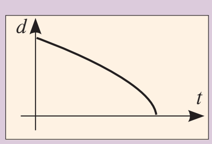
3 أي منحنى مما يلي يبدو أكثر ملاءمة لتمثيل بياناتك؟

الزمن بالثانية (s)	مستوى الماء بالمليلتر (ml)
0	
10	
20	
30	
40	
⋮	⋮

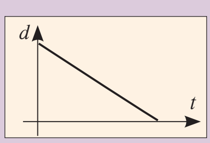
a



b



c



من الممكن أحيانًا أن تمثل البيانات غير الخطية، مثل البيانات التي جمعتها سابقًا في «عمل تعاوني» بدالة تربيعية.

الصورة العامة للدالة التربيعية هي:

$$f(x) = \underbrace{ax^2}_{\text{حد من الدرجة الثانية}} + \underbrace{bx}_{\text{حد من الدرجة الأولى}} + \underbrace{c}_{\text{حد مطلق (ثابت)}}, \quad a, b, c \in \mathbb{R},\ a \neq 0$$

تمثل الدالة التربيعية بيانيًّا بمنحنى متماثل حول المستقيم الرأسي الذي يمر برأس المنحنى، ويسمى شكل المنحنى **قطعًا مكافئًا** «parabola».

والإحداثي السيني لرأس هذا المنحنى $x = \frac{-b}{2a}$ وهو معادلة المستقيم الرأسي الذي يسمى **محور التماثل**.

نشاط

أي النقاط الواردة أدناه تقع على منحنى الدالة:

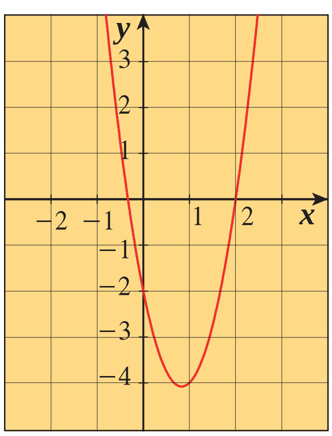
$f(x) = 3x^2 - 5x - 2$

A(1, −4)

B(2, 0)

C(0, 2)

D(−3, 40)



أكبر أس لمتغير ما في الدالة التربيعية هو (2)، وتكون الدالة خطية إذا كان أكبر أس لمتغير فيها هو (1).

تعريف الدالة الخطية:

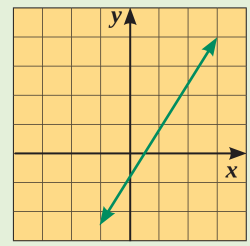
الدالة $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$

$f(x) = ax + b$

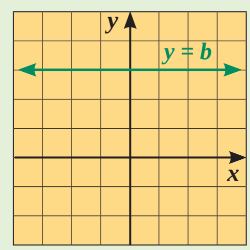
أو $y = ax + b$

حيث $a \neq 0$ ، $a \in \mathbb{R}$

و $b \in \mathbb{R}$ تسمى دالة خطية وبيانها خط مستقيم.



عندما $a = 0$ تكون الدالة $y = b$ ثابتة وبيانها خطًا مستقيمًا أفقيًّا.



مثال (1)

حدّد ما إذا كانت الدالة: $f(x) = (3x-4)(x+2)$ خطية أم تربيعية.

الحل:

نكتب الدالة بالصورة العامة:

$$f(x) = (3x-4)(x+2)$$

التوزيع بالضرب $f(x) = 3x^2 + 6x - 4x - 8$

جمع الحدود المتشابهة $f(x) = 3x^2 + 2x - 8$

∵ الدالة في الصورة العامة تتضمن الحد $3x^2$ (من الدرجة الثانية)

∴ هي دالة تربيعية.

حاول أن تحل

1 حدّد ما إذا كانت الدالة خطية أم تربيعية.

a $f(x) = 2x(x-3)$

b $f(x) = (x-2)(2x+1)$

c $f(x) = (2x+3)^2 - 4x^2 - 7x$

d $f(x) = 3(x^2-4x) - 3x^2 + 4$

نمذجة البيانات Modelling Data

تعلمت سابقًا كيفية كتابة نموذج خطي لبيانات، حيث يحدد الخط المستقيم نزعة معروفة للبيانات. ولكن يوجد بيانات لا يمكن نمذجتها خطيًّا وقد تكون الدالة التربيعية أفضل نمذجة لها.

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي عدد القطع المستقيمة الواصلة بين نقطتين مختلفتين إذا كان لدينا x نقطة، شرط ألا تكون 3 نقاط منها على مستقيم واحد.

عدد النقاط (x)	2	3	4	5	6	7
عدد القطع المستقيمة (y)	1	3	6	10	15	21

a إذا كانت العلاقة بين y , x تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b أوجد عدد القطع المستقيمة التي تصل بين 10 نقاط، وبين 20 نقطة.

الحل:

a الصورة العامة للدالة التربيعية: $f(x) = ax^2 + bx + c$

بالتعويض بالأزواج $(2, 1)$, $(3, 3)$, $(4, 6)$، ينتج النظام التالي:

$$\begin{cases} 1 = 4a + 2b + c & (1) \\ 3 = 9a + 3b + c & (2) \\ 6 = 16a + 4b + c & (3) \end{cases}$$

إرشاد

الإجراءات اللازمة لحل 3 معادلات بـ 3 مجاهيل:

لحل ثلاث معادلات بثلاثة مجاهيل يمكن استخدام طريقة الحذف أو طريقة التعويض.

تقوم طريقة التعويض على عزل أحد المجاهيل في إحدى المعادلات والتعويض عن هذا المجهول بما يساويه في المعادلتين الباقيتين. وهكذا نحصل على نظام معادلتين بمجهولين يسهل حلّه.

أما طريقة الحذف فتقوم على استخدام العمليات الأربع على المعادلات بحيث يتم إلغاء أحد المجاهيل وينتج من ذلك نظام معادلتين بمجهولين.

نطرح 1 من 2 ثم نطرح 2 من 3 فينتج:

$$\begin{cases} 2 = 5a + b & (4) \\ 3 = 7a + b & (5) \end{cases}$$

نطرح 4 من 5 فينتج:

$$2a = 1 \Longrightarrow a = \frac{1}{2}$$

نعوّض في 4 عن $a = \frac{1}{2}$:

$$2 = 5 \times \frac{1}{2} + b \qquad \Rightarrow \qquad b = -\frac{1}{2}$$

نعوّض في 1 عن $a = \frac{1}{2}\ ,\ b = -\frac{1}{2}$:

$$1 = 4\left(\frac{1}{2}\right) + 2\left(-\frac{1}{2}\right) + c$$

$$1 = 2 - 1 + c$$

$$c = 0$$

$$\because\ a = \frac{1}{2}\ ,\ b = -\frac{1}{2}\ ,\ c = 0$$

$\therefore$ الدالة التربيعية هي: $f(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x$

b عدد القطع المستقيمة التي تصل بين (10) نقاط هي $f(10)$:

$$f(10) = \frac{1}{2}(10)^2 - \frac{1}{2}(10)$$

$$f(10) = 50 - 5 = 45$$

أي يوجد 45 قطعة مستقيمة تربط بين 10 نقاط اثنتين اثنتين.

وبالمثل $f(20)$:

$$f(20) = \frac{1}{2}(20)^2 - \frac{1}{2}(20)$$

$$f(20) = 200 - 10 = 190$$

أي يوجد 190 قطعة مستقيمة تربط بين 20 نقطة اثنتين اثنتين.

حاول أن تحل

2 يبيّن الجدول التالي عدد الأقطار في المضلعات بحسب عدد أضلاعها.

عدد الأضلاع (x)	4	5	6	7
عدد الأقطار (y)	2	5	9	14

a إذا كانت العلاقة بين x, y تنمذج بدالة تربيعية فاكتب هذه الدالة.

b مستخدمًا العلاقة في a، أوجد عدد أقطار المضلع إذا كان عدد أضلاعه 10 وإذا كان عدد أضلاعه 15 .

نشاط إثرائي (تطبيقات حياتية)

يبيّن الجدول التالي بيانات اختبار مشابه للاختبار السابق في فقرة «عمل تعاوني»، حيث t تمثل المدة الزمنية بالثواني (s)، y تمثل مستوى المياه بالميليلتر (ml).

t	4	8	12	16	20	24	28	32
y	112.3	104.8	97.5	90.4	83.5	76.8	70.3	64

a أوجد دالة تربيعية تنمذج هذه البيانات.

b استخدم الدالة أعلاه لإيجاد مستوى المياه بعد مرور 36 s.

الحل:

a لتكن الدالة التربيعية: $f(t) = at^2 + bt + c \ , \quad y = f(t)$

نختار من الجدول 3 أزواج تحقق الدالة.

الزوج $(4, 112.3)$ $\quad 112.3 = a \times (4)^2 + b(4) + c$

الزوج $(12, 97.5)$ $\quad 97.5 = a(12)^2 + b(12) + c$

الزوج $(20, 83.5)$ $\quad 83.5 = a(20)^2 + b(20) + c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases} 16a + 4b + c = 112.3 \\ 144a + 12b + c = 97.5 \\ 400a + 20b + c = 83.5 \end{cases}$$

باستخدام آلة حاسبة علمية ينتج: $a = \frac{1}{160} = 0.00625 \quad b = -\frac{39}{20} = -1.95 \quad c = 120$

$$\therefore \ f(t) = \frac{1}{160}t^2 - \frac{39}{20}t + 120$$

أو

$$f(t) = 0.00625t^2 - 1.95t + 120$$

لاحظ أن النقطة $(8 \, , 104.8)$ تحقق المعادلة حيث

$$f(8) = \frac{1}{160}(8)^2 - 1.95(8) + 120 = 104.8 \checkmark$$

بالمثل يمكن إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

b نوجد:

$$f(36) = \frac{1}{160}(36)^2 - \frac{39}{20}(36) + 120$$
$$= 8.1 - 70.2 + 120$$
$$= 57.9$$

أي يصبح مستوى المياه حوالى 58cm

الربط بالتكنولوجيا

خطوات الحل المستخدمة لحل ثلاث معادلات بالحاسبة.

اضغط المفتاح **Mode**

يظهر على الشاشة 8 خيارات لبرامج مستخدمة

اختر البرنامج: 5: EQN

فيظهر على الشاشة 4 صيغ لمعادلات.

اختر الصيغة:

$2: a_n x + b_n y + c_n z = d_n$

فيظهر على الشاشة المصفوفة:

$$\begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{bmatrix} a\square & b\square & c\square & d\square \\ \square & \square & \square & \square \\ \square & \square & \square & \square \end{bmatrix}$$

اكتب كلًّا من المعادلات الثلاث على الشكل التالي:

$$ax + by + cz = d$$

املأ المربعات في السطر الأول بمعامل x يليه = ثم معامل y يليه = ثم معامل z يليه = ثم قيمة d يليه = .

كرر العملية في السطرين الثاني والثالث.

اضغط الآن على المفتاح = تظهر قيمة x (المجهول الأول)

اضغط ثانية على المفتاح = تظهر قيمة y (المجهول الثاني)

اضغط ثالثة على المفتاح = تظهر قيمة z (المجهول الثالث)

نشاط إثرائي (الصلة بالواقع)

يقف أحد السباحين على منصة يبلغ ارتفاعها 3 m عن مستوى سطح المياه. يقفز إلى أعلى ثم يسقط في المياه. يبيّن الجدول التالي ارتفاعه y بالأمتار (m)، ابتعاده الأفقي عن المنصة x بالأمتار (m).

x	0.6	1	1.2	1.3	1.6	2	2.6	3
y	4.44	4.92	5.016	5.028	4.92	4.44	3	1.56

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذج العلاقة بين x , y ثم تحقق.

الحل:

لتكن الدالة التربيعية: $f(x)=ax^2+bx+c, \qquad y=f(x)$

يتضمن الجدول 8 أزواج مرتبة (x,y) أي أن القطع المكافئ يجب أن يمر بهذه النقاط. نختار 3 أزواج لنجد الثوابت (a, b, c)

الزوج $(0.6, 4.44)$ $\qquad 4.44=a(0.6)^2+b(0.6)+c$

الزوج $(1, 4.92)$ $\qquad 4.92=a(1)^2+b(1)+c$

الزوج $(1.2, 5.016)$ $\qquad 5.016=a(1.2)^2+b(1.2)+c$

بالتبسيط نحصل على النظام:

$$\begin{cases} 0.36a+0.6b+c=4.44 \\ a+b+c=4.92 \\ 1.44a+1.2b+c=5.016 \end{cases}$$

نستخدم آلة حاسبة لحل النظام فنحصل على: $a=-1.2, \quad b=3.12, \quad c=3$

$$f(x)=-1.2x^2+3.12x+3$$

للتحقق، نعوّض عن $(x\ ,\ f(x))$ بقية أزواج قيم الجدول.

مثلًا: نعوّض بالزوج: $(1.3, 5.028)$:

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2(1.3)2+3.12(1.3)+3$$

$$5.028 \stackrel{?}{=} -1.2\times 1.69+3.12\times 1.3+3$$

$$5.028 \stackrel{\checkmark}{=} 5.028$$

$\therefore$ $(1.3, 5.028)$ يحقق المعادلة.

بالمثل يمكنك إثبات أن بقية الأزواج المرتبة تحقق المعادلة.

تدريب إثرائي

استخدم البيانات المدونة في الجدول لإيجاد معادلة تربيعية تنمذجها ثم تحقق من بقية الأزواج في الجدول.

x	−1	−0.5	0	0.5	1	1.5	2	3	4
y	10	6.25	3	0.25	−2	−3.75	−5	−6	−5

2–3

الدوال التربيعية والقطوع المكافئة

Quadratic Functions and Parabolas

سوف تتعلم

- إيجاد القيمة الصغرى أو القيمة العظمى لدالة تربيعية.
- إيجاد معادلة محور التماثل.
- رسم القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه.

المفردات والمصطلحات

- قطع مكافئ Parabola
- رأس القطع المكافئ Vertex of the Parabola
- محور التماثل Axis of Symmetry

عمل تعاوني

عندما تقذف بعض الأشياء (الأجسام) في الهواء مثل الكرات في الصورة المقابلة، فإن مسار الأشياء (الأجسام) يكون على شكل قطع مكافئ.

1. استخدم الرسم البياني في الصورة إذا كان القياس بالسنتيمترات (cm)، فما أقصى ارتفاع تصل إليه الكرة؟
2. كون جدولًا بالقيم للمعادلة.

$$y = -0.35x^2 + 50$$

ما قيمة x التي تحصل عندها على القيمة العظمى لـ y؟ ما القيمة العظمى لـ y؟

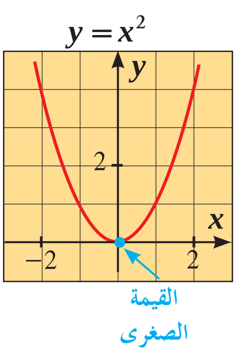
3. كيف تقارن إجاباتك عن السؤالين رقم 1، 2؟

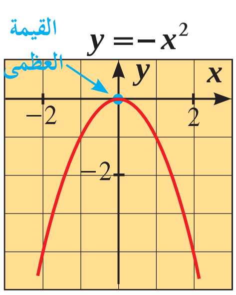
تعلمت في ما سبق أن بيان الدالة التربيعية يكون على شكل منحنى يسمى قطعًا مكافئًا وسنوضح في هذا البند بعض خصائص القطوع المكافئة في حالات خاصة.

القطوع المكافئة التي تمثل دوال تربيعية

Parabolas Representing Quadratic Functions

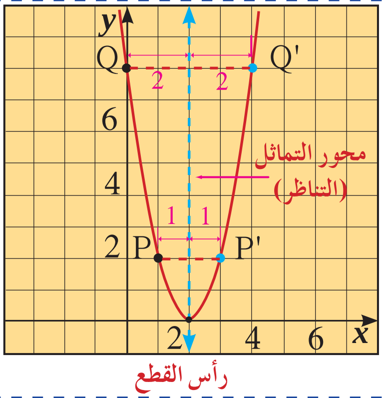
رأس القطع المكافئ هو أعلى (أو أدنى) نقطة في القطع المكافيء الذي يمثّل الدالة التربيعية بيانيًا، فنقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أكبر قيمة وتسمى **قيمة عظمى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأسفل أو نقطة الرأس هي النقطة التي تكون للدالة عندها أصغر قيمة وتسمى **قيمة صغرى** وفي هذه الحالة تكون فتحة القطع المكافئ لأعلى.





محور التماثل (التناظر) يقسم القطع المكافئ إلى جزءين متطابقين (كل جزء هو صورة للآخر بالانعكاس في المحور)، لذلك فإن كل نقطة من نقاط القطع المكافئ تناظرها نقطة أخرى هي صورتها بالانعكاس في محور التماثل، وتقع كلتا النقطتين المتناظرتين على البعد نفسه من محور التماثل الذي معادلته $x = x_1$ حيث x_1 الإحداثي السيني لنقطة رأس القطع.

نشاط (1)



مستخدمًا الرسم البياني الموضح:

a أوجد إحداثيات الرأس.

b حدد معادلة محور التماثل.

c حدّد النقطة المناظرة لكل من:

$P(1, 2)$, $Q'(4, 8)$

ملاحظة: معادلة الدالة التي تمثل قطعًا مكافئًا رأسه $(0, 0)$ هي: $y = ax^2$

لإيجاد قيمة a، استخدم إحداثيات نقطة على المنحنى غير نقطة الرأس.

معادلة محور تماثل هذا القطع المكافئ هي $x = 0$

مثال (1)

كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل. اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $F(-1, 6)$ **b** $H(-4, -8)$

الحل:

a معادلة القطع المكافئ الذي رأسه نقطة الأصل هي على الصورة: $y = ax^2$

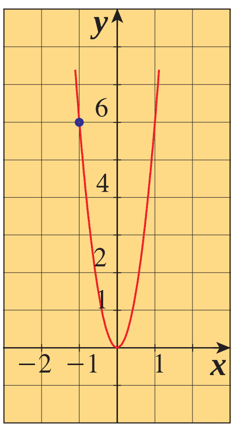
يمر القطع المكافئ بالنقطة $F(-1, 6)$

$$6 = a(-1)^2 \Longrightarrow a = 6$$

$\therefore$ تصبح المعادلة: $y = 6x^2$

$\because a = 6 \quad , 6 > 0$

$\therefore$ القطع المكافئ مفتوح إلى أعلى.



b المعادلة هي على الصورة: $y = ax^2$

يمر القطع المكافئ بالنقطة $H(-4, -8)$

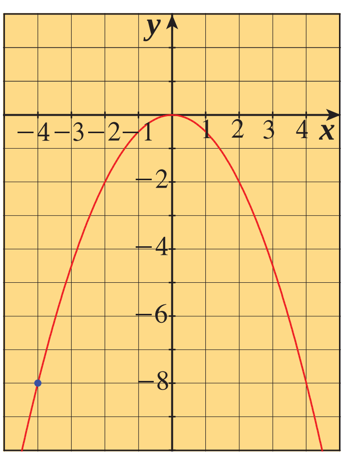
$$-8 = a(-4)^2$$

$$16a = -8 \Longrightarrow a = -\frac{1}{2}$$

تصبح المعادلة: $y = -\frac{1}{2}x^2$

$\because a = -\frac{1}{2} \quad , \quad -\frac{1}{2} < 0$

$\therefore$ القطع المكافئ مفتوح إلى أسفل.



حاول أن تحل

1 كل نقطة مما يلي تقع على قطع مكافئ رأسه نقطة الأصل.

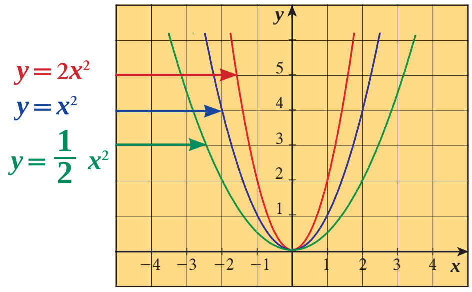
اكتب معادلة تربيعية لهذا القطع المكافئ واذكر ما إذا كان بيانه مفتوحًا إلى أعلى أم إلى أسفل.

a $E(4, 2)$ **b** $D(1, -5)$

كل القطوع المكافئة لها الشكل العام نفسه. ويتغير **اتساع القطع المكافئ** تبعًا لتغير معامل حد الدرجة الثانية.

نشاط (2)

استخدم الرسم البياني المجاور.



a حدّد معامل كل حد من حدود الدرجة الثانية.

b كيف تؤثر زيادة قيمة معامل حد الدرجة الثانية على الرسم البياني للدالة التربيعية؟

مثال (2) **الصلة بالواقع**

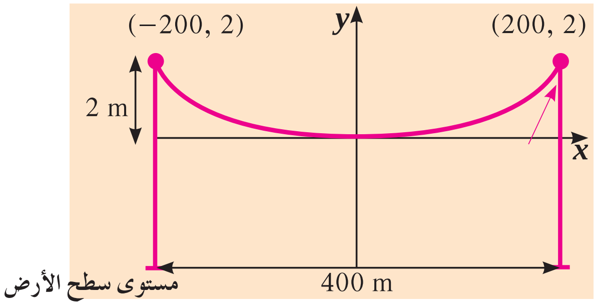
الكهرباء: توضع أعمدة خط التوتر العالي لنقل الطاقة الكهربائية بارتفاع مناسب فإذا كان البعد الرئيس بين العمودين هو 400 m، يتدلى السلك حوالى 2 m في الوسط بين العمودين.

أوجد معادلة القطع المكافئ والتي قد تمثل سلك أبراج خط التوتر العالي.

افترض أن رأس القطع المكافئ هو نقطة الأصل.

الحل:

ابدأ برسم الشكل



(الرسم تقريبي)

بما أن النقطة (200, 2) تقع على الرسم البياني، عوض بالقيم في المعادلة:

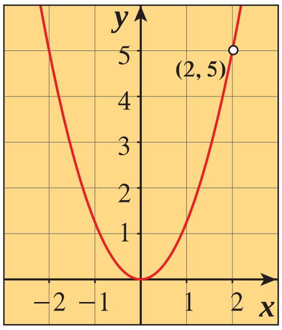
$$y = ax^2$$
$$a(200)^2 = 2$$
$$a = \frac{2}{40\,000}$$
$$a = 0.000\,05$$

المعادلة التي تصف الشكل الناتج عن السلك هي: $y = 0.00005x^2$

حاول أن تحل

2 البيان المقابل يمثل دالة: $y = ax^2$

أوجد معادلة هذه الدالة.



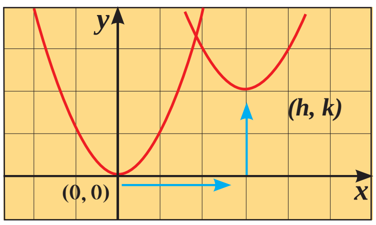
معادلات بعض القطوع المكافئة بدلالة إحداثيات رؤوسها وخواصها

Equations of some Parabolas in terms of the Coordinates of Vertices

ليس بالضرورة أن يكون رأس القطع المكافئ نقطة الأصل.

المعادلة في الصورة: $y = a(x-h)^2 + k,\ a \neq 0,\ h, k \in \mathbb{R}$

تسمى **معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات رأسه (h, k)** وهي عبارة عن إزاحة لبيان منحنى الدالة: $y = ax^2$



وتذكر أنه عندما تكون h، k موجبتين فإن الإزاحة تحرك المنحنى عدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى كما في الشكل. وعندما تكون h سالبة يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى اليسار، وعندما تكون k سالبة، يزاح المنحنى عدد من الوحدات إلى الأسفل.

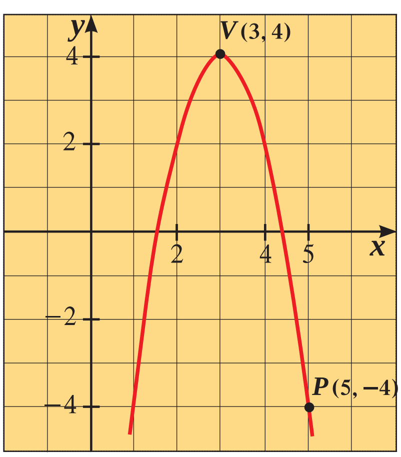
بعض خواص القطوع المكافئة

المعادلة على الصورة: $y = a(x-h)^2 + k$، هي دالة مكتوبة بدلالة إحداثيات الرأس، وهذه المعادلة تمدك بالمعلومات التالية:

- **رأس المنحنى هو النقطة (h, k)، ومحور التماثل هو الخط: $x = h$**
- **تكون فتحة القطع المكافئ إلى الأعلى عندما تكون a موجبة، وتكون فتحة القطع المكافئ إلى الأسفل عندما تكون a سالبة.**
- **إذا كان $|a| < 1$، فإن الرسم سوف يكون أوسع من رسم الدالة: $y = x^2$**
- **إذا كان $|a| > 1$، فإن الرسم سوف يكون أضيق من رسم الدالة: $y = x^2$**

مثال (3)

في الشكل المقابل اكتب معادلة القطع المكافئ الذي رأسه $V(3, 4)$ ويمر بالنقطة $P(5, -4)$



الحل:

رأس القطع: $(h, k) = (3, 4)$.

لذلك استخدم المعادلة، ثم حلها لإيجاد قيمة a:

$y = a(x-h)^2 + k$

$h = 3\,,\, k = 4$ $y = a(x-3)^2 + 4$

عوض بالنقطة $(5, -4)$ $-4 = a(5-3)^2 + 4$

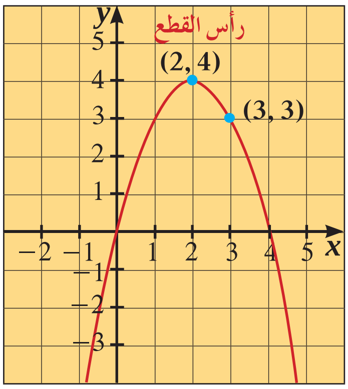
اختصر $-8 = 4a$

حل لإيجاد قيمة a $-2 = a$

$\therefore$ معادلة القطع المكافيء هي: $y = -2(x-3)^2 + 4$

حاول أن تحل

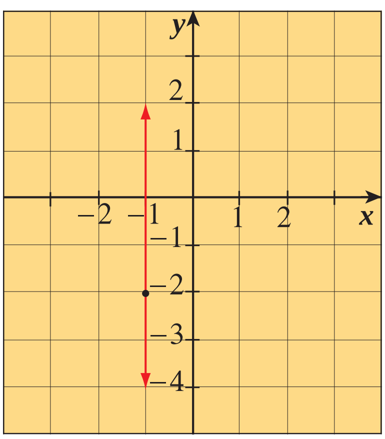
3 أوجد معادلة القطع المكافئ في الرسم المقابل.



يمكنك استخدام خصائص القطوع المكافئة لرسم بيان الدوال التربيعية.

مثال (4)

ارسم منحنى الدالة: $y = 2(x+1)^2 - 2$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.



الحل:

$\because$ المعادلة تربيعية على الصورة $y = a(x-h)^2 + k$ فهي تمثل قطعًا مكافئًا.

$\therefore$ $h = -1, \quad k = -2$

$\therefore$ $(-1, -2)$ رأس المنحنى

وكذلك $2 > 0 \quad a = 2, \because$

$\therefore$ فتحة المنحنى لأعلى

والرأس عنده قيمة صغرى للدالة.

معادلة محور التماثل هي: $x = h$

$\therefore$ $x = -1$ هو محور التماثل.

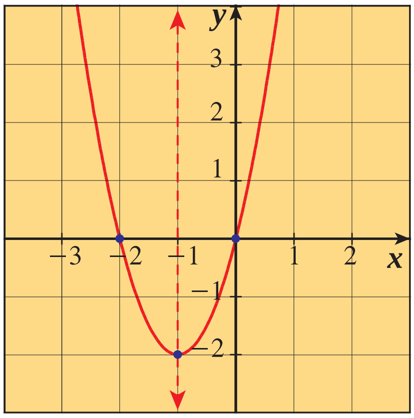
نرسم محور التماثل.

أوجد نقطة أخرى: عند $x=0$ فإن $y=0$

أي أن المنحنى يمر بنقطة الأصل.

حدّد انعكاس نقطة الأصل حول محور التماثل.

ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.



حاول أن تحل

4 ارسم منحنى الدالة: $y=(x+3)^2+1$.

مثال (5)

ارسم منحنى الدالة: $y=-0.5(x-2)^2+3$ مستخدمًا خواص القطوع المكافئة.

الحل:

$\because$ المعادلة تربيعية على الصورة $y=a(x-h)^2+k$ فهي تمثل قطعًا مكافئًا

$\therefore$ $k=3$ ، $h=2$

$\therefore$ $(2, 3)$ رأس المنحنى

$\because a=-0.5\ ,\ -0.5<0$

$\therefore$ فتحة المنحنى إلى أسفل والرأس عنده قيمة عظمى للدالة.

معادلة محور التماثل هي $x=h$.

$\therefore$ $x=2$ هو محور التماثل

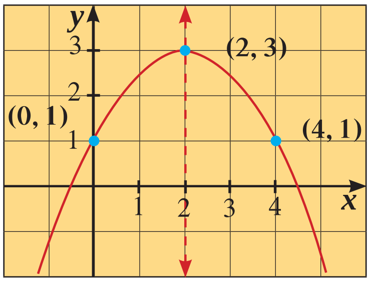
نرسم محور التماثل.

أوجد نقطة أخرى: عند $x=0$ فإن $y=1$

حدّد موقع النقطة $(0, 1)$.

حدّد موقع انعكاس النقطة $(0, 1)$ حول محور التماثل وهي $(4, 1)$.

ارسم منحنى يمر في النقاط الثلاث.



حاول أن تحل

5 ارسم منحنى الدالة: $y=-2(x-3)^2-1$

مثال (6)   تطبيقات حياتية

رميت كرة من فوق حاجز بارتفاع 150 cm عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الحاجز الشبكي ثم سقطت على الأرض مبتعدة 300 cm عن قاعدة الحاجز.

استخدم الحاجز كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع الحاجز مع الأرض.

الحل:

يمكن نمذجة المسألة كما يبين الرسم، باعتباره قطع مكافئ.

معادلة القطع المكافئ بدلالة إحداثيات الرأس هي:

$$y = a(x-h)^2 + k$$

$\because$ إحداثيات الرأس: $(0, 150)$

$$\therefore\ h = 0\ ,\ k = 150$$

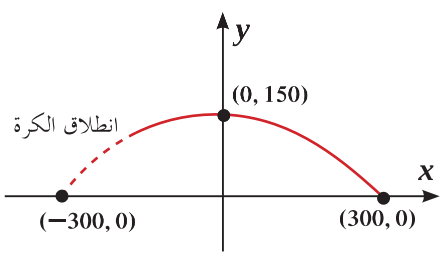
$$y = a(x-0)^2 + 150\ \ ,\ \ y = ax^2 + 150$$

يمر البيان بالنقطة $(300, 0)$ فيكون:

$$a(300)^2 + 150 = 0 \Longrightarrow a = -\frac{1}{600}$$

معادلة مسار الكرة هي:

$$y = -\frac{1}{600}x^2 + 150$$

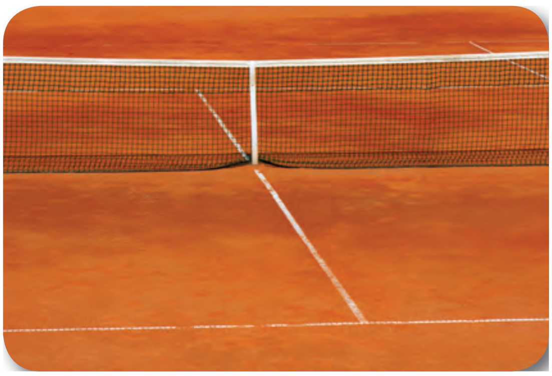


حاول أن تحل

6 في ملعب لكرة المضرب، رمى لاعب الكرة من فوق الشبكة بارتفاع 1 m عن سطح الملعب فاجتازت الكرة الشبكة ثم سقطت على الأرض مبتعدة 6 m عن قاعدتها.

افترض أن نقطة الأصل هي حيث يتقاطع المستقيم الرأسي في منتصف الشبكة مع أرض الملعب.

استخدم المستقيم كمحور تناظر واكتب معادلة تنمذج مسار الكرة.



الربط بالحياة:

كرة المضرب (Tennis) هي إحدى النشاطات الرياضيّة الحائزة على عدد كبير من تشجيع الجماهير. حيث يتبارى فيها لاعبان في مباريات الفردي أو فريقان مكوّنان من لاعبين في مباريات الزوجي.

يستخدم كل لاعب مضرب يستخدمه في إرسال الكرة إلى منطقة الخصم بهدف تسجيل النقاط. وما يميز لعبة كرة المضرب عن غيرها من بقية الألعاب هو أنها تفيد أجزاء كثيرة من الجسم فضلاً عن التوافق بين الذهن وكافة عضلات الجسم.

مثال (7)

تطبيقات حياتية

يبيع أحد المحلات عددًا أكبر من الفطائر عندما يخفض السعر، لكن ربحه يتغير. تنمذج أرباح هذا المحل (بالدينار) وفقًا للدالة التالية: $y = -100(x - 1.75)^2 + 300$ أرباح هذا المحل بالدينار، حيث x سعر الفطيرة بالدينار. يرغب صاحب المحل في تحقيق القيمة العظمى لربحه من المبيع.

a صف المجال الواقعي للدالة.

b أوجد أرباحه اليومية إذا باع الفطيرة الواحدة، بـ 2 دينار. وإذا باع الفطيرة الواحدة بـ 1.25 دينار.

c ما السعر الذي يجب أن يبيع به الفطيرة الواحدة ليحقق الربح الأكبر؟ وما قيمة هذا الربح؟

الحل:

a حيث إن x تمثل سعر الفطيرة يجب أن تكون $x > 0$.

b في المعادلة:

$$y = -100(x - 1.75)^2 + 300$$

عند $x = 2$

$$y = -100(2 - 1.75)^2 + 300$$

$$y = 293.75$$

أي يكون ربحه 293.75 دينارًا.

عند $x = 1.25$

$$y = -100(1.25 - 1.75)^2 + 300$$

$$y = 275$$

أي يكون ربحه 275 دينارًا.

c تمثل الدالة قطعًا مكافئًا له قيمة عظمى لأن $-100 < 0$، وبالتالي إحداثيات رأسه $(1.75, 300)$، حيث إن 1.75 دينار هو السعر الذي يحقق الربح الأكبر وقيمة هذا الربح الأكبر هي 300 دينار.

حاول أن تحل

7 في المثال (7) أوجد سعر مبيع الفطيرة الواحدة إذا لم يربح ولم يخسر في أحد الأيام.

2-4

مقارنة بين صورة معادلة الدالة التربيعية بدلالة إحداثيات رأس المنحنى والصورة العامة

Comparing Vertex and General Form Equation of Quadratic Functions

سوف تتعلم

- إيجاد رأس منحنى الدالة من التربيعبة بالصورة العامة.
- كتابة المعادلات بدلالة إحداثيات الرأس وفي الصورة العامة.

المفردات والمصطلحات

- رأس القطع المكافئ Vertex of a Parabola
- الصورة العامة General Form

عمل تعاوني

اعمل في مجموعات قوامها أربعة طلاب.

أوّلًا a اطلب من كل مجموعة رسم بيان زوج من المعادلات التالية. ويمكنك استخدام الآلة الحاسبة البيانية في رسم بيان زوج من المعادلات التالية على الشاشة نفسها للآلة الحاسبة.

	$y=ax^2+bx+c, a\neq 0$ (الصورة العامة)	a	b	$y=a(x-h)^2+k, a\neq 0$ (صورة المعادلة بدلالة إحداثيات رأس المنحنى)	h
1	$y = x^2 - 4x + 4$			$y = (x-2)^2$	
2	$y = x^2 + 6x + 8$			$y = (x+3)^2 - 1$	
3	$y = -3x^2 - 12x - 8$			$y = -3(x+2)^2 + 4$	
4	$y = 2x^2 + 12x + 19$			$y = 2(x+3)^2 + 1$	

b ما الذي تلاحظه في رسوم كل زوج من المعادلات؟

c هل كل زوج من المعادلات يمثل معادلتين متكافئتين؟

ثانيًا a **أنماط:** أكمل الجدول أعلاه.

b انظر إلى القيم h ،b في أول زوجين من المعادلات. اكتب صيغة توضح العلاقة بين h ،b.

c استخدم الزوجين الأخيرين من المعادلات لتوسع الصيغة التي حصلت عليها ولكي توضح العلاقة بين a، b، h.

ثالثًا a ما العلاقة بين محور التماثل ورأس القطع المكافئ؟

b ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y = ax^2 + bx + c$

c ما معادلة محور التماثل للقطع المكافئ: $y = 2x^2 + 10x + 7$

ربط بالحياة:

تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال ومنها الدوال التربيعية. تختلف الخطوات المتبعة من حاسبة لأخرى لكن معظمها بسّط كثيرًا عملية الرسم كالتالي :

a اضغط على رمز GRAPH.

b اكتب معادلة الدالة.

c اضغط على EXE ،

يظهر بيان الدالة على الشاشة.

في فقرة «عمل تعاوني»، بحثت في كيفية تحديد رأس منحنى الدالة التربيعية. عندما تكتب معادلة الدالة في الصورة العامة، فإن الإحداثي **السيني لرأس القطع المكافئ** يكون: $-\frac{b}{2a}$، ولإيجاد الإحداثي الصادي k، عوض بقيمة الإحداثي السيني h في المعادلة ثم بسط.

مثال (1)

اكتب الدالة: $y = 2x^2 + 10x + 7$، بدلالة إحداثيات الرأس.

الحل:

صورة المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس (h, k) هي: $y = a(x-h)^2 + k$

الإحداثي السيني:

استخدم $\frac{-b}{2a}$ لإيجاد الإحداثي السيني $\qquad h = -\frac{b}{2a}$

عوّض بقيم a، b $\qquad = \frac{-10}{2(2)}$

$= -2.5$

الإحداثي الصادي:

عوض بـ $x = -2.5$ $\qquad k = 2(-2.5)^2 + 10(-2.5) + 7$

في المعادلة الأصلية $\qquad = -5.5$

∴ المعادلة بدلالة إحداثيات الرأس هي: $y = 2(x+2.5)^2 - 5.5$

حاول أن تحل

1 اكتب الدالة: $y = -3x^2 + 12x + 5$ بدلالة إحداثيات رأس المنحنى، ثم ارسم بيانها.

المصطلحات

- المحيط: مح Perimetre (P)
- المساحة: م Area (A)
- الطول: ل Length (L)
- العرض: ض Width(W)
- الارتفاع: ع Height (h)
- المستطيل Rectangle

يمكنك استخدام رأس القطع المكافئ في تطبيقات حياتية تتطلب إيجاد أكبر مساحة وأصغر مساحة.

مثال (2) الصلة بالواقع

إذا قمت بالتخطيط لصنع برواز مستطيل الشكل لمجموعة من الصور، وذلك لتقديمها كهدية تخرج لأحد الأصدقاء، وكان لديك قطعة من الخشب طولها 2.8 m لصنع برواز. فما أبعاد البرواز التي تعطيك أكبر مساحة (A) لوضع مجموعة الصور؟
وما هي أكبر مساحة؟

الحل:

استخدم صيغة المحيط (P) لإيجاد تعبير رياضي (مقدار) يعبر عن طول البرواز (L) بدلالة العرض (W).

المحيط = 2 (الطول + العرض) $\qquad P = 2(L + W)$

$P = 2.8\text{ m} = 280\text{ cm}$ $\qquad 2(W + L) = 280$

بسط، وحل لإيجاد الطول $\qquad L = 140 - W$

مراجعة سريعة:

لإيجاد محيط المستطيل ومساحته، استخدم ما يلي:

المحيط = 2 (الطول + العرض)

$P = 2(L + W)$

المساحة = الطول × العرض

$A = L \times W$

اكتب معادلة لإيجاد مساحة البرواز

المساحة = الطول × العرض $A = L \times W$

عوّض بالطول والعرض $A = (140 - W)(W)$

بسّط $A = -W^2 + 140W$

المساحة دالة تربيعية وبيانها قطع مكافئ له قيمة عظمى عند رأس المنحنى $\frac{-b}{2a}$

نحصل على أكبر مساحة عندما يكون

$$W = \frac{-b}{2a} = \frac{-140}{2(-1)} = 70 \text{ cm}$$

وحيث إن $L = 140 - W$

$$L = 140 - 70 = 70 \text{ cm}$$

وتتحقق أكبر مساحة للبرواز عندما يكون كل من طول وعرض البرواز يساوي 70 cm

وتكون أكبر مساحة: $70 \times 70 = 4\,900$،

أي أكبر مساحة: $4\,900 \text{ cm}^2$

حاول أن تحل

2 a ما أفضل تسمية للشكل الهندسي الذي يعطي أكبر مساحة للبرواز في المثال (2)؟

b هل تعتقد أن هذا الشكل يعطي دائمًا أكبر مساحة لشكل مستطيل محيطه معلوم؟

c أوجد عددين موجبين c, d على أن يكون: $c + d = 18$ و $c \times d$ أكبر ما يمكن.

لقد حولت معادلة الدالة التربيعية من الصورة العامة إلى الصورة بدلالة إحداثيات الرأس.

يمكنك أيضًا تحويل معادلة الدالة التربيعية من صورتها بدلالة إحداثيات الرأس إلى الصورة العامة.

مثال (3)

اكتب المعادلة: $y = 3(x-1)^2 + 12$ في الصورة العامة.

الحل:

$y = 3(x-1)^2 + 12$

أوجد $(x-1)(x-1)$ $y = 3(x^2 - 2x + 1) + 12$

استخدم خاصية التوزيع $y = 3x^2 - 6x + 3 + 12$

بسّط $y = 3x^2 - 6x + 15$

حاول أن تحل

3 a اكتب المعادلة: $y = -2(x+3)^2 - 7$ في الصورة العامة. وارسم بيانها.

b تعطي كل من المعادلة في الصورة بدلالة إحداثيات الرأس والصورة العامة معلومات عن الدالة. ما مميزات استخدام كل صورة لرسم بيان الدالة؟

مثال (4)

منحنى الدالة $y = ax^2 + bx + 12$ له رأس عند النقطة $(1, 8)$ فما قيم a, b ؟

الحل:

طريقة أولى:

النقطة $(1, 8)$ تنتمي إلى منحنى الدالة

∴ بالتعويض

$$8 = a(1) + b(1) + 12$$
$$8 = a + b + 12$$
$$a + b = -4 \quad (1)$$

الإحداثي السيني لرأس القطع المكافئ:

$$x = \frac{-b}{2a}$$
$$\therefore 1 = \frac{-b}{2a} \Longrightarrow b = -2a \quad (2)$$

نحل النظام

$$\begin{cases} a + b = -4 & (1) \\ b = -2a & (2) \end{cases}$$

في (1) نعوّض عن b بقيمتها في (2) فنحصل على:

$$a - 2a = -4$$
$$-a = -4 \Longrightarrow a = 4$$

في (2) نعوّض عن a بـ 4 فنحصل على: $b = -2(4) = -8$

∴ $b = -8$ ،$a = 4$

طريقة ثانية:

$$y = a(x-1)^2 + 8$$
$$= a(x^2 - 2x + 1) + 8$$
$$= ax^2 - 2ax + a + 8$$

بالمقارنة مع الدالة المعطاة $y = ax^2 + bx + 12$

نجد أن

$$a + 8 = 12 \Longrightarrow a = 4$$
$$-2a = b \Longrightarrow b = -2(4) = -8$$

حاول أن تحل

4 منحنى الدالة $y = ax^2 + 4x + c$ له رأس عند النقطة $(-1, 5)$. فما قيم a, c ؟

مثال (5)

تطبيقات حياتية

وجد صاحب محل لبيع الأحذية الرياضية أنه يمكن نمذجة ربحه بالدالة:

$$f(x) = -15x^2 + 600x + 50$$ ،

حيث x تمثل سعر الحذاء بالدينار.

a ما سعر الحذاء الذي يحقق أعلى ربح؟

b ما قيمة أعلى ربح؟

الحل:

a $f(x) = -15x^2 + 600x + 50$

رسمها البياني قطع مكافئ له قيمة عظمى، تتحقق القيمة العظمى عند

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$$x = \frac{-600}{2(-15)} = 20$$

أي أن ثمن الحذاء الذي يحقق أعلى ربح هو 20 دينارًا.

b $f(20) = -15(20)^2 + 600(20) + 50 = 6\,050$

$\therefore$ الربح الأعلى يساوي 6 050 دينارًا.

حاول أن تحل

5 لاحظ صاحب محل لبيع الدراجات النارية أن بالإمكان نمذجة ربحه بالدالة:

$$f(x) = -x^2 + 2200x - 1150\,000$$

حيث x تمثل سعر مبيع الدراجة النارية بالدينار

a أوجد سعر مبيع الدراجة النارية الذي يحقق أعلى ربح.

b أوجد قيمة أعلى ربح.

المعكوسات ودوال الجذر التربيعي

Inverses and Square Root Functions

سوف تتعلم

- إيجاد معكوس الدالة.
- استخدام دوال الجذر التربيعي.

المفردات والمصطلحات

- المعكوس Inverse
- معكوس الدالة Inverse of a Function
- دوال الجذر التربيعي Square Root Functions

عمل تعاوني

هل تعلم أن هناك ارتباطًا بين طول قطعة الجليد الموضحة بالصورة وطول قطر أكبر مقطع دائري لها؟

1 يمكن استخدام الدالة $L = 11d - 0.5$، لمعرفة الطول التقريبي L لقطعة الجليد إذا علم طول قطرها d عند أكبر مقطع دائري لها.

a يبلغ طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة 5 cm أوجد طولها.

b اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد الطول في الجزء a.

2 a يبلغ طول قطعة جليدية مدلاة 27 cm أوجد طول قطر أكبر مقطع.

b اشرح الخطوات التي استخدمتها لإيجاد القطر في الفقرة a.

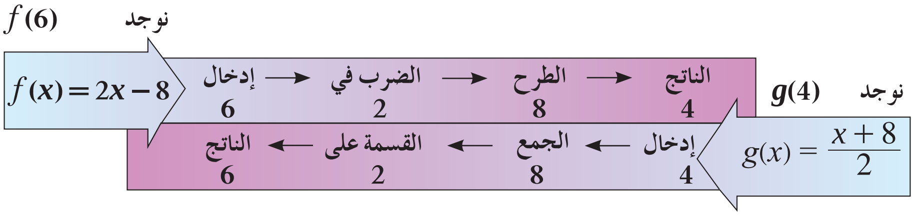
الخطوات التي سبق لك استخدامها لإيجاد طول قطر أكبر مقطع لقطعة جليدية مدلاة عند معرفة طولها مشابهة لتلك المستخدمة في إيجاد ما يسمى **معكوس الدالة**.

نشاط:

اعتبر الدالتين: $f(x) = 2x - 8$, $g(x) = \frac{x+8}{2}$

مجال الدالة f هو $\mathbb{R}$ ومجال الدالة g هو $\mathbb{R}$ أيضًا.

فإذا أخذنا أي عدد ينتمي لمجال الدالة f وليكن 6.



الدالتان: $g(x) = \frac{x+8}{2}$, $f(x) = 2x - 8$ كلًّا منهما تعكس عمليات الأخرى،

لذلك تسمى g معكوس الدالة f أو f معكوس الدالة g

1 a ارسم الدالتين: f, g في مستوى إحداثي واحد.

b أوجد ثلاث نقاط على الرسم البياني للدالة f

c اعكس إحداثيات كل نقطة، ثم ارسم النقاط الجديدة.

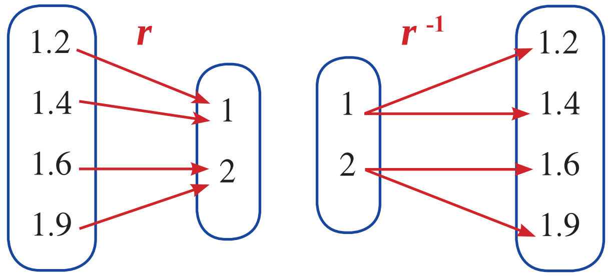
ماذا تلاحظ؟

إذا كانت r علاقة تصل بين عنصر a من مجال r وعنصر b من مدى r
فإن **معكوس العلاقة** r يصل من b إلى a.

إذا كان (a, b) زوج مرتب من علاقة r فإن (b, a) هو زوج مرتب من معكوس هذه العلاقة.

يبيّن المخطط أدناه علاقة r ومعكوسها r^{-1}
مدى العلاقة r هو مجال معكوس هذه العلاقة ومجال r هو مدى معكوسها.

معلومة:
يعبر عن معكوس العلاقة r بالرمز r^{-1}.



مثال توضيحي

يبيّن الجدول المقابل علاقة S

x	1	2	3	4
y	-1	0	1	1

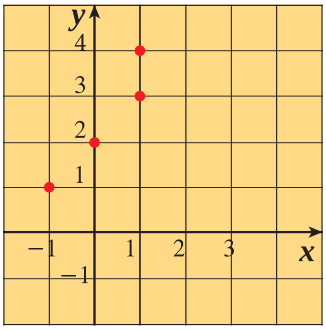
(a) أوجد معكوس العلاقة S
(b) مثّل بيان S وبيان معكوسها
(c) صف العلاقة بين المستقيم $y = x$ وبيان S وبيان معكوسها.
(d) هل العلاقة S تمثل دالة؟ هل معكوس S يمثل دالة؟

الحل: (a) نبدل قيم y , x في الجدول.

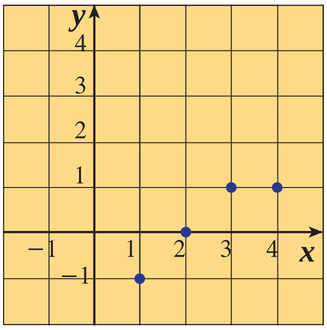
x	-1	0	1	1
y	1	2	3	4

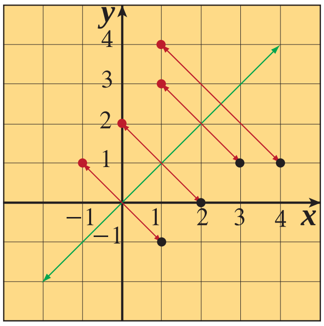
(b) بيان S وبيان معكوسها

بيان معكوس S



بيان العلاقة S





(c) المستقيم $y = x$ هو خط انعكاس لبيان S وبيان معكوسها.

(d) العلاقة S تمثل دالة لأن كل عنصر من المجال يقترن بعنصر واحد فقط من المجال المقابل.

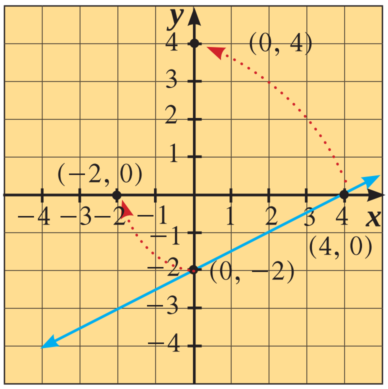
بينما معكوس S لا يمثل دالة لأن العنصر (1) من المجال يقترن بعنصرين من المجال المقابل.

إذا كانت النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان دالة فإن النقطة (b, a) تنتمي إلى بيان معكوس هذه الدالة. ولكي ترسم معكوس الدالة بيانيًّا اعكس الترتيب لكل زوج مرتب ينتمي لبيان الدالة.

معكوس الدالة الخطية هو دالة خطية أيضًا.

مثال (1)

ارسم بيان الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ ومعكوسها ثم اكتب معادلة المعكوس.



الحل:

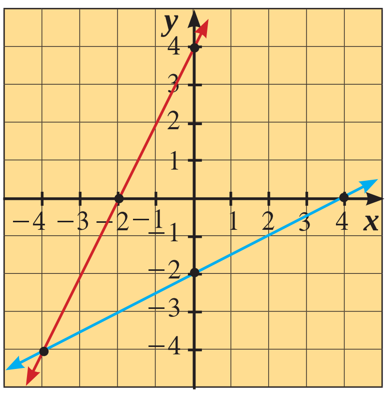
نرسم بيان الدالة الأصلية $y = \frac{x-4}{2}$ وهي دالة خطية

x	0	2	4
y	-2	-1	0

$\because$ $(0, -2)$، $(4, 0)$ تنتميان لبيان الدالة y.

$\therefore$ $(-2, 0)$، $(0, 4)$ تنتميان لبيان معكوس الدالة y وهو خط مستقيم.

ارسم المستقيم المار بالنقطتين الجديدتين.



لكتابة معادلة هذا المستقيم:

الميل: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $(x_2 \neq x_1)$

$$= \frac{4-0}{0-(-2)} = 2$$

معادلة المستقيم المار بالنقطة $(0, 4)$ وميله 2 هي:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 4 = 2(x - 0)$$

$$y = 2x + 4$$

معادلة المعكوس هي: $y = 2x + 4$

حاول أن تحل

1 ارسم الدالة $y = -3x + 5$ ومعكوسها، ثم اكتب معادلة المعكوس.

طريقة أخرى لإيجاد معكوس الدالة جبريًّا وهي التبديل بين متغيرات الدالة x, y ثم الحل بالنسبة إلى y

إذا كانت الدالة تستخدم الرمز $f(x)$ عوّض عن $f(x)$ بـ y

فمثلًا لإيجاد معكوس الدالة $y = \frac{x-4}{2}$ نبدل بين المتغيرات فيكون: $x = \frac{y-4}{2}$

$2x = y - 4$

$y = 2x + 4$

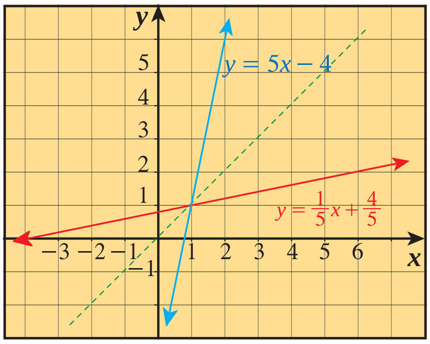
مثال (2)

أوجد معكوس الدالة $y = 5x - 4$

الحل:

	$y = 5x - 4$
بدّل x , y	$x = 5y - 4$
حلّ بالنسبة إلى y	$5y = x + 4$
	$y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$

معكوس الدالة $y = 5x - 4$ هو $y = \frac{1}{5}x + \frac{4}{5}$



حاول أن تحل

2 أوجد معكوس الدالة:

a $y = \frac{2x-1}{3}$ b $y = 2(x+1) - 3$

مثال (3)

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = x^2 + 3$ وناقش الحلول.

الحل:

	$f(x) = x^2 + 3$
عوّض عن $f(x)$ بـ y	$y = x^2 + 3$
بدل x، y	$x = y^2 + 3$
حل بالنسبة إلى y	$x - 3 = y^2$
أوجد الجذر التربيعي للطرفين	$y = \pm\sqrt{x-3}$

معكوس الدالة $f(x) = x^2 + 3$ هو:

$y = \pm\sqrt{x-3}$

الرسم البياني للدالة: $y = x^2 + 3$، ومعكوسها:

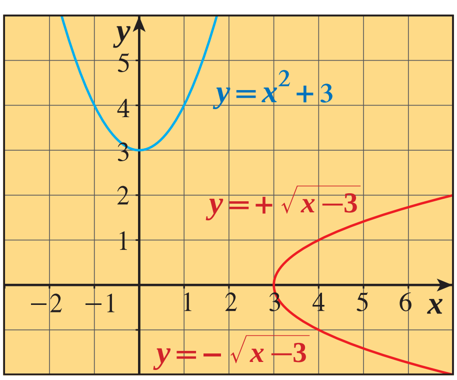
$y = \pm\sqrt{x-3}$ موضح إلى اليسار،

وكما ترى فإن معكوس الدالة ربما لا يكون دالة.

ومعكوس القطع المكافئ الممثل بالدالة:

$y = x^2 + 3$، هو قطع مكافئ مفتوح لليمين،

وهو ليس دالة لأنه توجد قيمتان لـ y لبعض قيم x



مناقشة الحلول:

a ما معادلة المعكوس للدالة: $y = x^2 + 3$ عند $x \geq 0$؟ $y = \sqrt{x - 3}$

b هل المعكوس دالة؟ نعم

c ما معادلة المعكوس للدالة: $y = x^2 + 3$ عند $x \leq 0$؟ $y = -\sqrt{x - 3}$

d هل المعكوس دالة؟ نعم

حاول أن تحل

3 أوجد معكوس الدالة: $f(x) = (x + 3)^2 - 4$. ناقش الحلول.

دوال الجذر التربيعي Square Root Functions

المعادلة $y = \sqrt{x}$ دالة جذر تربيعي.

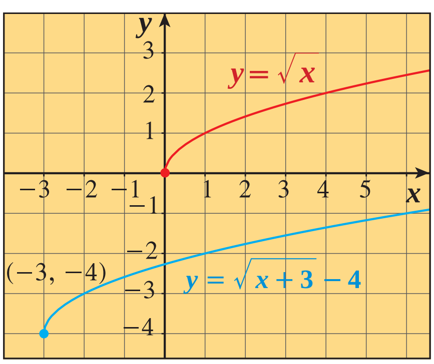
الشكل المرسوم يمثل بيان هذه الدالة ويبدأ من $(0, 0)$، حيث إن الدالة معرفة فقط بالنسبة إلى صفر وإلى القيم الموجبة لـ x. أي أنها معرّفة عندما $x \geq 0$.

فيكون مجالها $[0, \infty)$. والمدى هو $[0, \infty)$ لأن $y \geq 0$ وهي قيم الدالة عند المجال المعطى.

التمثيل البياني لدالة الجذر التربيعي $y = \sqrt{x - h} + k$

ينتج من إزاحة لبيان دالة المرجع $y = \sqrt{x}$ كالتالي:

- عندما تكون h, k موجبتين فإن الإزاحة تكون بعدد h من الوحدات يمينًا وعدد k من الوحدات إلى الأعلى.
- وعندما تكون h سالبة يزاح البيان إلى اليسار.
- وعندما تكون k سالبة يزاح البيان إلى الأسفل.



فمثلًا بيان الدالة: $y = \sqrt{x - (-3)} - 4$ أو $y = \sqrt{x + 3} - 4$ ينتج من إزاحة بيان الدالة $y = \sqrt{x}$ ثلاث وحدات إلى اليسار وأربع وحدات إلى الأسفل.

مثال (4)

ارسم الدالة: $y = \sqrt{x - 4} - 2$ ، وعيّن المجال والمدى للدالة.

الحل:

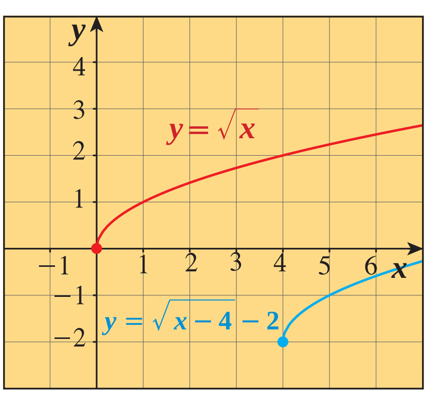
أزح بيان دالة المرجع: $y = \sqrt{x}$،

4 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

يبدأ بيان الدالة $y = \sqrt{x - 4} - 2$ عند النقطة $(4, -2)$

ويبيّن الرسم البياني لها أن المجال $= [4, \infty)$

والمدى $= [-2, \infty)$



حاول أن تحل

4 a ارسم بيانيًّا: $y=\sqrt{x-2}+1$

عيّن المجال والمدى للدالة.

b إذا تم إزاحة بيان الدالة: $y=\sqrt{x}$، 5 وحدات يمينًا 2 وحدة إلى الأسفل.

اكتب معادلة الدالة الناتجة عن الإزاحة.

يمكنك استخدام دالة الجذر التربيعي لتمثيل مواقف حياتية.

مثال (5) **الصلة بالواقع**

مقاس شاشة إعلانات هو طول قطر الشاشة، d، بالبوصة (in).

المعادلة: $d=\sqrt{2A}$، تقدر طول قطر شاشة إعلانات بالمساحة A.

لنفرض أن تاجرًا يريد شراء شاشة إعلانات مساحتها ضعف مساحة شاشته القديمة التي مساحتها $100\ \text{in}^2$، فما مقاس الشاشة التي يجب أن يشتريها؟

الحل:

مساحة الشاشة الجديدة $2\times 100\ \text{in}^2$ أو $200\ \text{in}^2$.

الطريقة الأولى: استخدام التعويض

استخدام دالة الجذر التربيعي $\quad d=\sqrt{2A}$

عوض بـ 200 عن A $\quad =\sqrt{2(200)}$

$=\sqrt{400}=20$

يجب أن يشتري شاشة 20 in

الطريقة الثانية: الربط بالتكنولوجيا (إثرائي)

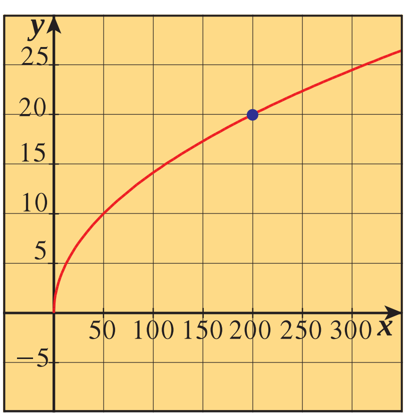
استخدام الآلة الحاسبة البيانية.

أدخل $y=\sqrt{2x}$.

اقرأ قيمة y عند $x=200$

يجب أن يشتري شاشة 20 in

ملاحظة: $1\ \text{in}=2.54\ \text{cm}$



حاول أن تحل

5 إذا كان لدى تاجر شاشة إعلانات قياسها 42 in (طول القطر 42 in).

فما هي مساحة الشاشة علمًا بأن المعادلة: $d=\sqrt{2A}$ تحدد العلاقة بين طول القطر d والمساحة A لشاشة الإعلانات؟

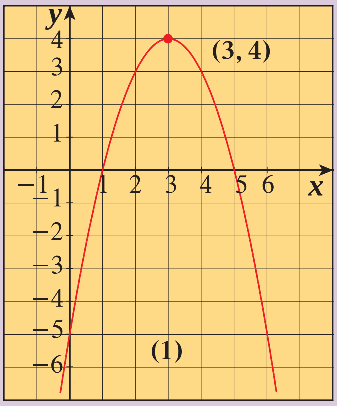
حل المتباينات

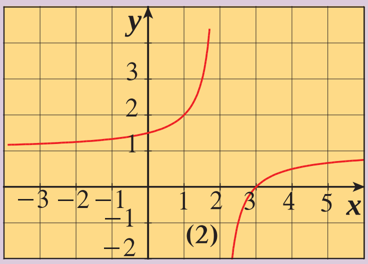
Solving Inequalities

سوف تتعلم
- حل متباينات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- حل متباينات تتضمن حدوديات نسبية في متغير واحد.
- إيجاد مجال دالة جذرية.

المفردات والمصطلحات
- متباينة Inequality
- حدوديات نسبية Rational Expressions
- متباينة من الدرجة الثانية Quadratic Inequality

عمل تعاوني





أولًا: يبيّن الرسم البياني المقابل (1) منحنى $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ ومن الرسم أوجد:

a قيم x حيث $f(x) = 0$.

b قيم x حيث $f(x) > 0$.

c قيم x حيث $f(x) < 0$.

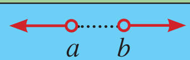
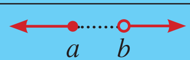
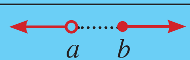
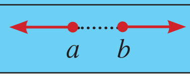
ثانيًا: يبيّن الرسم البياني المقابل (2) للدالة

$$f(x) = \frac{x-3}{x-2}$$

أجب عن الأسئلة **a**، **b**، **c**.

من العمل التعاوني السابق يمكننا أن نعبر عن اتحاد مجموعتي القيم $(-\infty, 1) \cup (5, \infty)$ بصورة أخرى وهي $\mathbb{R} / [1, 5]$.

يبيّن الجدول التالي كيفية كتابة اتحاد فترتين بصورة أخرى في بعض الحالات.

رمز الفترة	صورة أخرى لرمز الفترة	تمثيل الفترة على خط الأعداد
$(-\infty, a) \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R} / [a, b]$	
$(-\infty, a] \cup (b, \infty)$	$\mathbb{R} / (a, b]$	
$(-\infty, a) \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} / [a, b)$	
$(-\infty, a] \cup [b, \infty)$	$\mathbb{R} / (a, b)$	

تذكر:

إذا كان $a \times b = 0$

فإن $a = 0$ أو $b = 0$

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2 - x - 6 < 0$.

الحل:

المعادلة المناظرة $\quad x^2 - x - 6 = 0$

نحلل $\quad (x+2)(x-3) = 0$

$$x+2=0 \quad \Rightarrow \quad x=-2$$
أو
$$x-3=0 \quad \Rightarrow \quad x=3$$

للبحث عن قيم x التي تحقق $(x+2)(x-3) < 0$ نتبع التالي:

$x-3<0 \Longrightarrow x<3$ | $x+2<0 \Longrightarrow x<-2$

$x-3>0 \Longrightarrow x>3$ | $x+2>0 \Longrightarrow x>-2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-2		3		$+\infty$
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-3$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x+2)(x-3)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

يبيّن الجدول أن $(x+2)(x-3) < 0$ لكل قيم x حيث $-2 < x < 3$.

مجموعة الحل $= (-2, 3)$.

حاول أن تحل

1 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^2+4x+3 \leq 0$.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $-x^2+7x-10 \leq 0$

الحل:

$-x^2+7x-10 \leq 0$

اضرب في -1 $\qquad x^2-7x+10 \geq 0$

المعادلة المناظرة $\qquad x^2-7x+10=0$

حلل $\qquad x^2-7x+10=(x-2)(x-5)$

$x-2=0 \Longrightarrow x=2$

$x-5=0 \Longrightarrow x=5$

للبحث عن قيم x التي تحقق: $(x-2)(x-5) \geq 0$ نتبع التالي:

$x-5<0 \Longrightarrow x<5$ | $x-2<0 \Longrightarrow x<2$

$x-5>0 \Longrightarrow x>5$ | $x-2>0 \Longrightarrow x>2$

تذكر:

عند ضرب طرفي متباينة في عدد سالب نعكس علاقة الترتيب.

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		2		5		$+\infty$
$x-2$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-5$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x-5)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

يبيّن الجدول أن $(x-2)(x-5)\geq 0$ لكل قيم x حيث $x\leq 2$ أو $x\geq 5$.

$\therefore$ مجموعة الحل $= (-\infty,2]\cup[5,\infty)$

أو $\mathbb{R}/(2,5)$

تذكر:

يمكنك ضرب طرفي المتباينة في (-1) للسهولة.

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة قيم x التي تحقق المتباينة: $-2x^2+5x-3>0$.

مثال (3) **تطبيقات حياتية**

صمم مهندس مخططًا لحديقة منزل على شكل مستطيل طول أحد بعديها x ومحيطها 20 m.

a ما المجال الواقعي للمتغير x؟

b إذا اعتبرنا f دالة مساحة هذا المستطيل، فعبر عنها بدلالة x .

c ما مجموعة حل المتباينة $f(x)<24$ ؟

d ما مجموعة حل المتباينة $f(x)>9$ ؟

الحل:

a

$$P=2(L+W)=20\text{ m}$$

$$L+W=\frac{20}{2}=10\text{ m}$$

إذا اعتبرنا أحد البعدين يساوي x $\therefore$ البعد الآخر $=10-x$

$\therefore$ المجال الواقعي للمتغير هو:

$$0<x<10$$

$$x\in(0,\ 10)$$

b المساحة = الطول × العرض

$$f(x)=L\times W$$

$$f(x)=x(10-x)=-x^2+10x$$

c $f(x)<24$

$$-x^2+10x<24\Longrightarrow -x^2+10x-24<0$$

المعادلة المناظرة

$-x^2+10x-24=0$

حلل

$(-x+4)(x-6)=0$

$x-6=0$ أو $-x+4=0$

$\therefore\ x=6 \quad \therefore\ x=4$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(-x+4)(x-6) < 0$ نتبع التالي:

$x-6<0 \Longrightarrow x<6$ | $-x+4<0 \Longrightarrow x>4$

$x-6>0 \Longrightarrow x>6$ | $-x+4>0 \Longrightarrow x<4$

نكوّن الجدول مع مراعاة $x\in(0,\ 10)$

x	0		4		6		10
$-x+4$		+	0	−		−	
$x-6$		−		−	0	+	
$(-x+4)(x-6)$		−	0	+	0	−	

من الجدول: مجموعة الحل $=(0,4)\cup(6,10)$

d $f(x)>9$

$-x^2+10x>9 \Longrightarrow -x^2+10x-9>0$

المعادلة المناظرة

$-x^2+10x-9=0$

حلل

$(-x+1)(x-9)=0$

$x-9=0$ أو $-x+1=0$

$\therefore\ x=1$

$\therefore\ x=9$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $(-x+1)(x-9)>0$ نتبع التالي:

$x-9<0 \Longrightarrow x<9$ | $-x+1<0 \Longrightarrow x>1$

$x-9>0 \Longrightarrow x>9$ | $-x+1>0 \Longrightarrow x<1$

نكوّن الجدول: مع مراعاة $x\in(0,\ 10)$

x	0		1		9		10
$-x+1$		+	0	−		−	
$x-9$		−		−	0	+	
$(-x+1)(x-9)$		−	0	+	0	−	

من الجدول: مجموعة الحل $=(1,9)$.

حاول أن تحل

3 إذا كان محيط مستطيل يساوي $16\ m$ وكان x طول أحد بعديه.

a ما المجال الواقعي للمتغير x؟

b إذا اعتبرنا f دالة مساحة المستطيل فعبر عنها بدلالة x

c ما مجموعة حل المتباينة $f(x) > 7$ ؟

مثال (4) تطبيق على مجال الدالة

أوجد مجال كل دالة مما يلي:

a $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

b $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل:

a $f(x)=\sqrt{x^2-4}$

مجال الدالة f هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $x^2-4 \geqslant 0$

نوجد المعادلة المناظرة $x^2-4=0$

حلل $(x-2)(x+2)=0$

$x=2$ أو $x=-2$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(x-2)(x+2) \geqslant 0$ نتبع التالي:

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$ | $x-2<0 \Longrightarrow x<2$

$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$ | $x-2>0 \Longrightarrow x>2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-2		2		$+\infty$
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+2$		$-$	0	$+$		$+$	
$(x-2)(x+2)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

مجال الدالة f هو : $(-\infty,-2] \cup [2,+\infty)$

$= \mathbb{R}/(-2,2)$

b $g(x)=\sqrt{-x^2+4x-3}$

الحل:

مجال الدالة g هو مجموعة الأعداد الحقيقية التي تحقق الشرط $-x^2+4x-3 \geqslant 0$

المعادلة المناظرة $-x^2+4x-3=0$

تحليل إلى عوامل $(-x+1)(x-3)=0$

الأصفار $x=1$ أو $x=3$

لايجاد قيم x التي تحقق: $(-x+1)(x-3) \geqslant 0$ نتبع التالي:

$x-3<0 \Longrightarrow x<3$	$-x+1<0 \Longrightarrow x>1$
$x-3>0 \Longrightarrow x>3$	$-x+1>0 \Longrightarrow x<1$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		1		3		$+\infty$
$-x+1$		+	0	−		−	
$x-3$		−		−	0	+	
$(-x+1)(x-3)$		−	0	+	0	−	

مجال الدالة g هو : $[1, 3]$

حاول أن تحل

4 a هل يمكنك إيجاد مجال الدالة $y=\sqrt{x^2-4}$ بطريقة أخرى.

b أوجد مجال كل دالة مما يلي:

1 $h(x)=\sqrt{x^2-x}$

2 $q(x)=\sqrt{9-x^2}$

تذكر:

الحدوديات النسبية غير معرّفة عند أصفار المقام.

مثال (5)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$

الحل:

$$\frac{3x+7}{x+2} \geq 2$$

$$\frac{3x+7}{x+2} - 2 \geq 0$$

مقام مشترك

$$\frac{3x+7-2x-4}{x+2} \geq 0$$

$$\frac{x+3}{x+2} \geq 0$$

أصفار البسط: $x+3=0 \Longrightarrow x=-3$

أصفار المقام: $x+2=0 \Longrightarrow x=-2$

لإيجاد قيم x التي تحقق: $\frac{x+3}{x+2} \geq 0$ نتبع التالي:

$x+2<0 \Longrightarrow x<-2$	$x+3<0 \Longrightarrow x<-3$
$x+2>0 \Longrightarrow x>-2$	$x+3>0 \Longrightarrow x>-3$

نكون الجدول:

x	$-\infty$		-3		-2		$+\infty$
$x+3$		$-$	0	$+$		$+$	
$x+2$		$-$		$-$	0	$+$	
$\frac{x+3}{x+2}$		$+$	0	$-$	غير معرّفة	$+$	

مجموعة الحل: $(-\infty,-3]\cup(-2,\infty)$

$= \mathbb{R}/(-3,-2]$

حاول أن تحل

5 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{3x-5}{-2x+3} \geq 0$

مثال (6)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$

الحل:

$$\frac{x^2-5x+3}{x+4} < 3$$

$$\frac{x^2-5x+3}{x+4} - 3 < 0$$

مقام مشترك

$$\frac{x^2-5x+3-3x-12}{x+4} < 0$$

التبسيط

$$\frac{x^2-8x-9}{x+4} < 0$$

حلل البسط

$$\frac{(x+1)(x-9)}{(x+4)} < 0$$

أصفار البسط:

$$(x+1)(x-9)=0$$

$x=-1$ أو $x=9$

أصفار المقام:

$$x+4=0 \Rightarrow x=-4$$

لايجاد قيم x التي تحقق: $\frac{(x+1)(x-9)}{x+4} < 0$ نتبع التالي:

$x+1<0 \Rightarrow x<-1$	$x-9<0 \Rightarrow x<9$	$x+4<0 \Rightarrow x<-4$
$x+1>0 \Rightarrow x>-1$	$x-9>0 \Rightarrow x>9$	$x+4>0 \Rightarrow x>-4$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-4		-1		9		$+\infty$
$x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-9$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
$\frac{(x-1)(x-9)}{x+4}$		$-$	غير معرّفة	$+$	0	$-$	0	$+$	

مجموعة حل المتباينة $= (-\infty,-4) \cup (-1,9)$

حاول أن تحل

6 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2+5x}{x+3} > -2$.

تذكر:

من المهم جدًّا تحديد أصفار المقام قبل الاختصار.

مثال (7)

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{x^2-5x+6}{x-3} > 0$.

الحل:

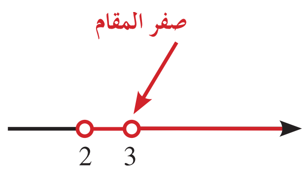
تحليل البسط: $x^2-5x+6=(x-2)(x-3)$

تكتب المتباينة: $\frac{(x-2)(x-3)}{(x-3)} > 0$

قبل التبسيط نحدد أصفار المقام: $x-3=0 \Longrightarrow x=3$

نبسط المتباينة: $\frac{(x-2)\cancel{(x-3)}^{1}}{\cancel{(x-3)}_{1}} > 0 \qquad x \neq 3$

$x-2>0 \Longrightarrow x>2$



القيمة $x=3$ غير مقبولة لأنها صفر المقام

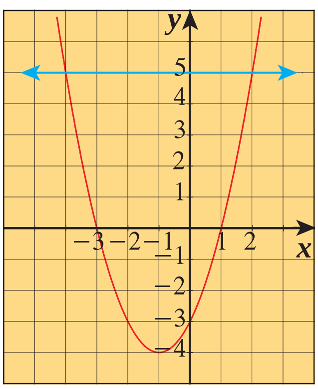
مجموعة الحل $= (2,\infty)/\{3\}$

$= (2,3)\cup(3,\infty)$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{x^2-49}{x+7} \leq 0$.

مثال (8) تطبيق على الرسم البياني



يبيّن الرسم البياني منحنى الدالة:

$f(x)=x^2+2x-3$ والمستقيم $y=5$

a ادرس بيانيًّا المتباينة $y < f(x)$.

b ادرس بيانيًّا المتباينة $y > f(x)$.

c تحقق حسابيًّا من النتائج التي حصلت عليها في a و b.

الحل:

a في الشكل يقطع المستقيم $y=5$ منحنى الدالة f في النقطتين $(2, 5)$، $(-4, 5)$

نلاحظ أن $f(x) < 5 \qquad \forall \ x \in (-4,\ 2)$

b نلاحظ أن $f(x) > 5 \qquad \forall \ x \in (-\infty,\ -4)\cup(2,\ \infty)$

c للتحقق حسابيًّا:

نضع:

$f(x) < 5$

$x^2+2x-3 < 5$

$x^2+2x-8 < 0$

المعادلة المناظرة $x^2+2x-8=0$

$(x-2)(x+4)=0$

$x=2$ أو $x=-4$

لإيجاد قيم x التي تحقق $(x-2)(x+4) < 0$ نتبع التالي:

$x+4<0 \Longrightarrow x<-4$ | $x-2<0 \Longrightarrow x<2$

$x+4>0 \Longrightarrow x>-4$ | $x-2>0 \Longrightarrow x>2$

نكوّن الجدول:

x	$-\infty$		-4		2		$+\infty$
$x+4$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$(x-2)(x+4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

من الجدول نستنتج: $\forall x \in (-4, 2)$ $\quad f(x) < 5$

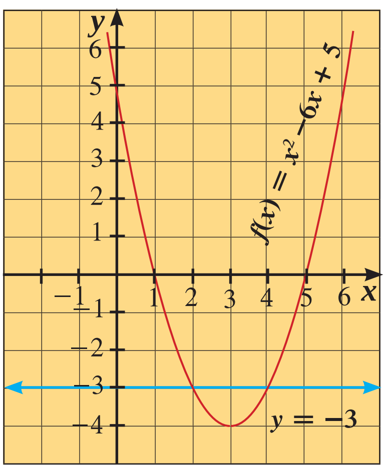
$\forall x \in (-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$ $\quad f(x) > 5$

حاول أن تحل

8 يبيّن الرسم البياني منحنى الدالة:

$f(x)=x^2-6x+5$ والمستقيم $y=-3$.

ادرس بيانيًّا: $f(x) \geq y$, $f(x) < y$, $f(x)=y$



المرشد لحل المسائل

المسافة بين المدينة A والمدينة B على الطريق السريع هي 300 km قاد خالد سيارته من المدينة A باتجاه المدينة B بمعدل سرعة x km/h، وفي طريق العودة من المدينة B إلى المدينة A، كان معدل سرعته $(x - 20)$ km/h

استغرقت هذه الرحلة 5 h 30 min

أوجد معدل سرعة السيارة ذهابًا وإيابًا.

كيف يمكنني حل هذه المسألة؟

أنا أعرف أن المسافة = الزمن × معدل السرعة.

لدي معدل السرعة x في الذهاب، ثم $x - 20$ في العودة.

أنا أعرف أن مجموع الزمن المستغرق هو: 5 h 30 min ويمكن تحويلها إلى 5.5

أنا أعرف المسافة بين المدينتين 300 km باستخدام القاعدة اكتب:

الزمن = $\frac{\text{المسافة}}{\text{معدل السرعة}}$ 　 $$\frac{300}{x} + \frac{300}{x-20} = 5.5$$

المقام المشترك 　 $$5.5x^2 - 710x + 6\,000 = 0$$

بالتبسيط 　 $$1.1x^2 - 142x + 1\,200 = 0$$

أحلل المعادلة التربيعية إلى عوامل أولية:

بالقسمة على 1.1 　 $$x^2 - \frac{142}{1.1}x + \frac{1\,200}{1.1} = 0$$

المربع الكامل 　 $$\left(x - \frac{71}{1.1} - \frac{61}{1.1}\right)^2 - \frac{3\,721}{1.21} = 0$$

التحليل 　 $$\left(x - \frac{71}{1.1} - \frac{61}{1.1}\right)\left(x - \frac{71}{1.1} + \frac{61}{1.1}\right) = 0$$

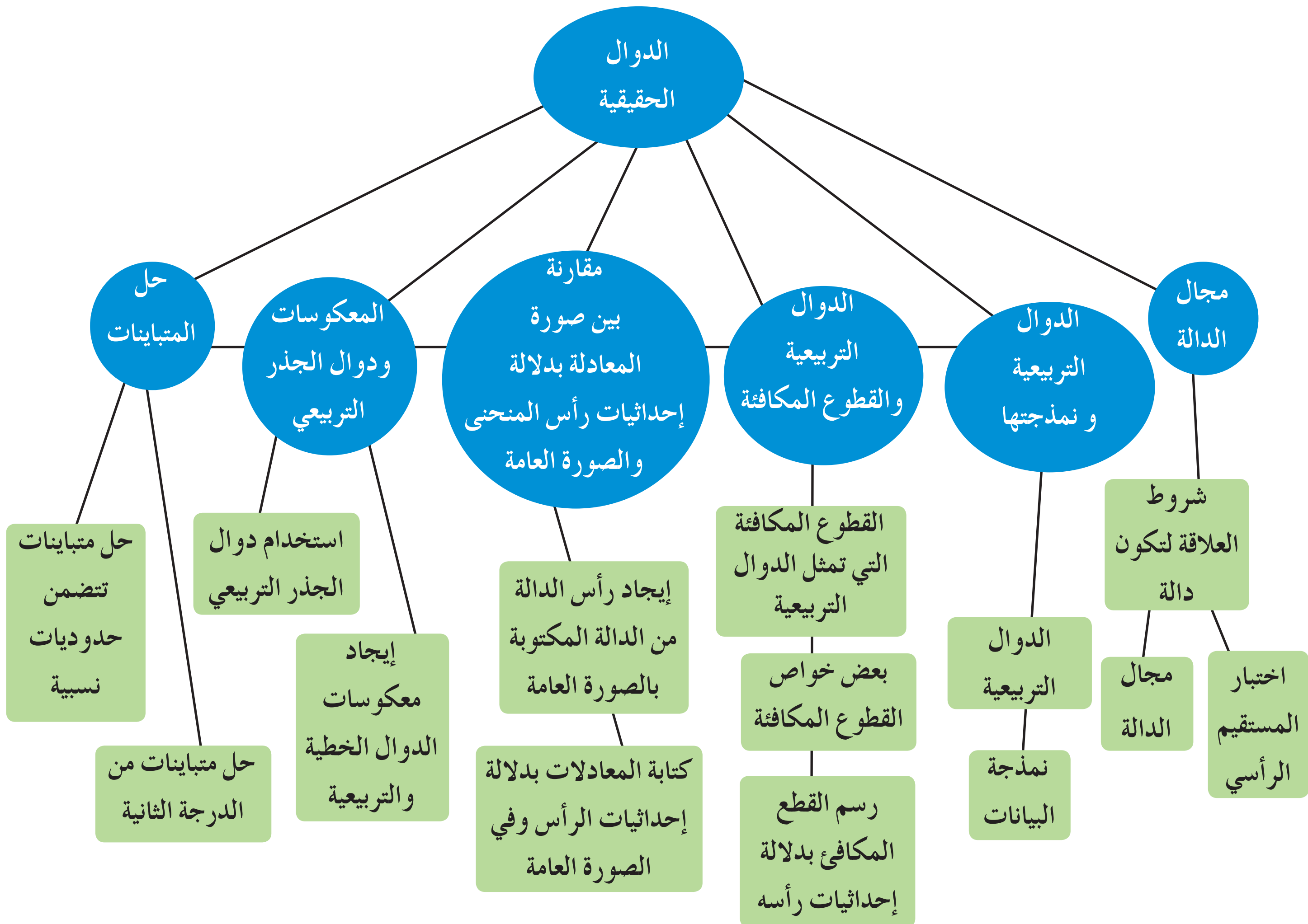
ومنه أحصل على قيمة مقبولة $x = 120$

أي أن معدل سرعة خالد في الذهاب هو 120 km/h، ومعدل سرعته في العودة 100 km/h

مسائل إضافية

1. كم سيكون معدل سرعة السيارة إذا أراد خالد أن تكون مدة الرحلة المستغرقة 7 h 30 min؟
2. يبيع أحد المحلات الحواسيب، وقد لاحظ أن ربحه يمكن نمذجته بالمعادلة:
   $f(x) = -x^2 + 250x - 2\,400$، حيث x ثمن الحاسوب الواحد بالدينار الكويتي.
   - a) إذا باع الحاسوب الواحد بسعر 100 دينار، فما هو ربحه؟
   - b) إذا أراد البائع تحقيق أكبر ربح، فبكم سوف يبيع الحاسوب الواحد؟
   - c) ما قيمة أكبر ربح؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- تكون العلاقة دالة إذا كان كل عنصر (عدد) في المجال مرتبطًا بعنصر (عدد) واحد فقط من المدى.
- كل دالة التي مجالها ومجالها المقابل مجموعتان جزئيتان من الأعداد الحقيقية تسمى دالة حقيقية.
- تكتب الدالة التربيعية على الصورة: $f(x) = ax^2 + bx + c\,,\quad a, b \in \mathbb{R}\,,\ a \neq 0$
- يمكن كتابة بعض البيانات على الصورة الخطية: $y = ax + b$ أو على الصورة التربيعية.
- مجال الدالة هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث يوجد المتغير x لتكون $f(x)$ معرّفة.
- المدى للدالة $f(x)$ هو الجزء من الأعداد الحقيقية أو كل الأعداد الحقيقية حيث $f(x)$ موجودة.
- القيمة الصغرى للدالة التربيعية هي أصغر قيمة للدالة $f(x)$ على محور الصادات.
- القيمة العظمى للدالة التربيعية هي أكبر قيمة للدالة $f(x)$ على محور الصادات.
- يمكن رسم القطع المكافئ إذا كان على الصورة: $f(x) = a(x - h)^2 + k$، حيث (h, k) إحداثيات الرأس.
- يمكن إيجاد الصورة العامة $f(x) = ax^2 + bx + c$ من الصورة $f(x) = a(x - h)^2 + k$ وبالعكس أيضًا.
- يمكن إيجاد معكوس الدوال الخطية والتربيعية بتبديل $x\,,\,y$.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من الدرجة الثانية في متغير واحد فإننا نحللها إلى عوامل أولية ونستخدم الجدول.
- لإيجاد مجموعة حلول متباينة من حدوديات نسبية فإننا نستخدم الجدول.

الوحدة الثالثة

كثيرات الحدود

Polynomials

مشروع الوحدة: المنحنيات بالتصميم

1 مقدمة المشروع: يمكن اعتبار المنحنى المرسوم في الشكل أدناه لدالة كثيرة الحدود. تعد هذه الحقيقة محور تصميم السيارة الحديثة. حيث يقوم المصمم أولاً بتصميم أشكال النماذج وفق مقياس معين، يوضح التصميم الأشياء الصغيرة مثل مقابض الأبواب. وعندما تكتمل عملية النمذجة، يتحول كل منحنى في التصميم إلى معادلة تضبط على الحاسوب بواسطة المصمم ويمكن إجراء بعض التعديلات الطفيفة على المعادلة. عندما ينتهي التصميم تستخدم هذه المعلومات لصنع القوالب اللازمة لإنتاج السيارة.

2 الهدف: البحث عن تصميم سيارة أو أي شيء آخر له أجزاء منحنية، والرسم على ورقة رسم بياني منحنى الشيء الذي اخترت البحث عنه.

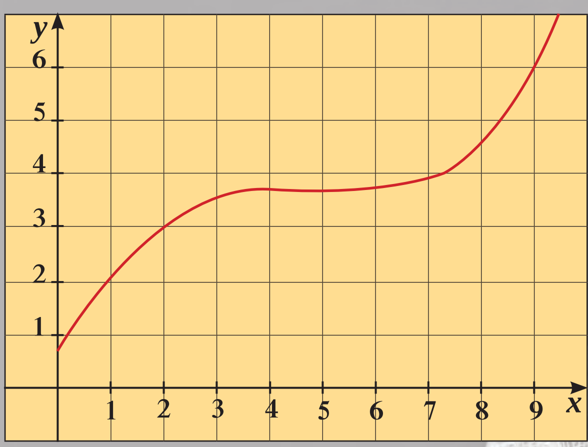
3 اللوازم: أوراق رسم، شبكة مربعات، آلة حاسبة بيانية، حاسوب.

4 أسئلة حول التطبيق:

نمذج غطاء محرك سيارة جديدة بالمعادلة:

$$y = 0.00143x^4 + 0.00166x^3 - 0.236x^2 + 1.53x + 0.739 \quad , \quad x > 0$$

بيان هذه المعادلة مبين إلى اليسار.



a لنفرض أنك مصمم السيارة، ارسم منحنى تراه مناسبًا أكثر لغطاء المحرك.

b ميّز 4 نقاط على المنحنى واكتب إحداثياتها.

c أوجد المعادلة التكعيبية المتوافقة مع هذه النقاط.

استخدم المعادلة: $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

d اختر قسمًا آخر منحنيًا من السيارة ثم اكتب معادلة تنمذج هذا القسم.

5 التقرير: ضعْ تقريرًا مفصلاً حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة. نفذ ملصقاً لعرض تصميمك ورسومك البيانية التي استخدمتها.

دروس الوحدة

دوال القوى ومعكوساتها	الدوال الحدودية	العوامل الخطية لكثيرات الحدود	قسمة كثيرات الحدود	حل معادلات كثيرات الحدود
3–1	3–2	3–3	3–4	3–5

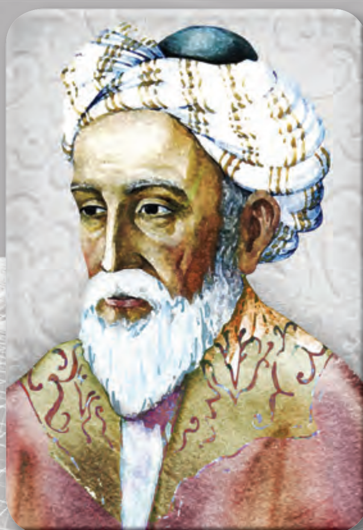
الوحدة الثالثة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كتابة دوال خطية ورسمها بيانيًّا.
- تعلمت حل أنظمة معادلات أو متباينات خطية وحلها جبريًّا وبيانيًّا.
- تعلمت حل معادلات تربيعية.
- تعلمت رسم معادلات تربيعية بيانيًّا.
- تعلمت حل متباينات تربيعية في متغير واحد.

ماذا سوف تتعلم؟

- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.
- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- تحليل كثيرات الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- حل معادلات كثيرات الحدود بطرق مختلفة.
- قسمة كثيرات الحدود.
- إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود.



عمر الخيام

المصطلحات الأساسية

دالة القوى – معكوس دالة القوى – دالة زوجية – دالة فردية – درجة دالة كثيرة الحدود– الصورة العامة – سلوك النهاية – صورة عوامل – القيمة العظمى النسبية – القيمة الصغرى النسبية – نظرية العامل – القسمة المطولة – القسمة التركيبية – نظرية الباقي – جذور – أصفار كثيرة الحدود – تحليل إلى عوامل – الأصفار النسبية الممكنة.

أضف إلى معلوماتك

عمر الخيام

هو شاعر وفيلسوف تخصص في الرياضيات.

اقترح طريقة لحل معادلات جبرية من الدرجة الثالثة تقوم على إيجاد التقاطع بين قطع مكافئ وقطع زائد.

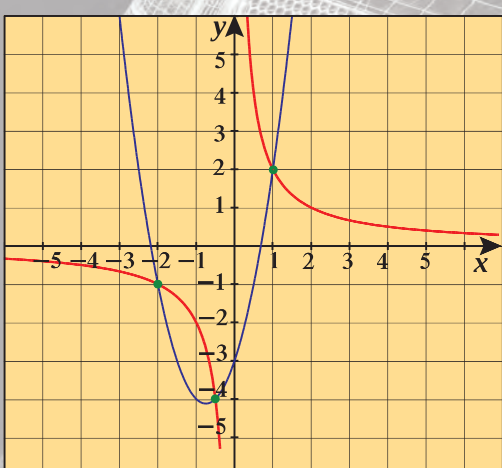
وفي عصرنا الحالي، حيث يمكن استخدام الحاسوب في وضع رسوم دقيقة لدوال القوى. أصبحت طريقة عمر الخيام من أفضل الطرق المتبعة لحل معادلات الدرجة الثالثة.

مثال على ذلك:

$$2x^3 + 3x^2 - 3x - 2 = 0$$

$$2x^3 + 3x^2 - 3x = 2$$

$$2x^2 + 3x - 3 = \frac{2}{x} \qquad (x \neq 0)$$



دوال القوى ومعكوساتها

Power Functions and their Inverses

سوف تتعلم
- استكشاف الرسوم البيانية لدوال القوى.
- استخدام القوى والجذور لحل المعادلات.

المفردات والمصطلحات:
- دوال القوى Power Functions
- دالة فردية Odd Function
- دالة زوجية Even Function
- المجال Domain

معلومة:
مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة رمزها: $\mathbb{Z}^+$

ملاحظة:
$y = ax^n$ يمكن كتابتها أيضًا على الصورة: $f(x) = ax^n$

عمل تعاوني

1 استخدم آلة حاسبة لحل النظام: $\begin{cases} y = x^2 \\ y = x^4 \end{cases}$ تحقق من كل حل.

2 يبيّن الجدول المقابل $y_1 = x^2$, $y_2 = x^4$
ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 < x^4$؟
ما قيم x في الجدول التي تحقق $x^2 > x^4$؟

3 استخدم رسمًا بيانيًا لإيجاد مجموعة حل كل من المتباينتين:
a $x^2 < x^4$ b $x^2 > x^4$

4 أوجد مجموعة حل المتباينة: $x^6 < x^4$
ارسم بيانيًا دالة القوى: $y = x^6$ باستخدام آلة حاسبة بيانية وتحقق من إجابتك.

x	$y_1 = x^2$	$y_2 = x^4$
−1.6	2.56	6.5536
−1.2	1.44	2.0736
−0.8	0.64	0.4096
−0.4	0.16	0.0256
0	0	0
0.4	0.16	0.0256
0.8	0.64	0.4096
1.2	1.44	2.0736
1.6	2.56	6.5536

استكشاف دوال القوى ومعكوساتها
Exploring Power Functions and their Inverses

الدوال مثل: $y = x^4$ ، $w = 0.014c^3$ هي دوال قوى.

تكون دوال القوى على الشكل:
$$y = ax^n ,\quad a \neq 0 ,\quad n \in \mathbb{Z}^+$$

مثال (1) تطبيقات حياتية

تستخدم الصيغة: $w = 0.014\,c^3$ لتقدير وزن w برتقالة بالجرام (g)، بدلالة c محيط أكبر مقطع دائري فيها بالسنتيمتر (cm). قدّر وزن برتقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها 20 cm

الحل:

$w = 0.014\,c^3$

$= 0.014\,(20)^3$ عوّض عن c بـ 20

$= 112$ g

يكون وزن البرتقالة التي يبلغ محيطها 20 cm حوالى 112 g

حاول أن تحل

1 قدّر وزن برتقالة محيط أكبر مقطع دائري فيها 22 cm باستخدام الصيغة في مثال (1).

مثال (2) علم الحيوان

الدالة $w(x)=15.625x^3$، هي تقريب للوزن «w» بالكجم (kg) لأنثى الزرافة بدلالة طولها «x» بالمتر (m). أوجد وزن كل من إناث الزرافة التي طولها 3.268m , 3.175m

الحل:

احسب $w(x)$ للطولين.

$$w(x)=15.625\,x^3$$

$$w(3.175)=15.625\times(3.175)^3\approx 500\,\text{kg}$$

$$w(3.268)=15.625\times(3.268)^3\approx 545.34\text{ kg}$$

حاول أن تحل

2 في المثال (2)، أوجد وزن زرافة طولها 3.3 m

نشاط 1

يوضح الجدول المقابل بعض القيم للدالة $y=x^3$

x	y
-3	-27
-2	-8
-1	-1
0	0
1	1
2	8
3	27

أكمل ما يلي:

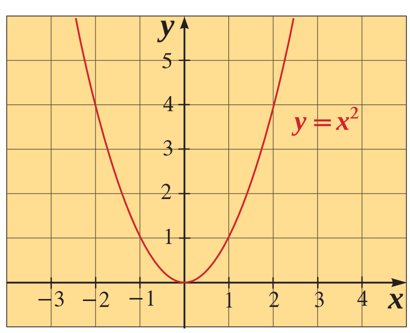
a في أي ربعين من المستوى الإحداثي تتوقع ظهور الرسم البياني لهذه الدالة؟

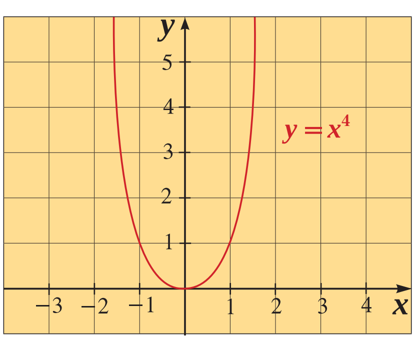
b أكمل كل زوج من النقاط التي تنتمي إلى بيان الدالة: $(4, 64)$، $(-4, \square)$، $(-0.5, -0.125)$، $(\square, 0.125)$

c لنفرض أن النقطة (a, b) تنتمي إلى بيان الدالة: $y=x^3$، فأي من النقاط التالية سوف تنتمي أيضًا إلى بيان هذه الدالة؟

1 $(a, -b)$ 2 $(-a, b)$ 3 $(-a, -b)$ 4 $(2a, 3b)$

مما سبق ومن فقرة «عمل تعاوني» لاحظنا أن بيان الدوال ذات الأسس الزوجية مثل:
$y=x^4$، $y=x^2$ كما في الشكلين أدناه.



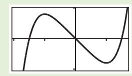


وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة $y=ax^n$ حيث n عددًا زوجيًّا موجبًا، $a\neq 0$.

الربط بالتكنولوجيا:

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

- في أعلى الشاشة اضغط على



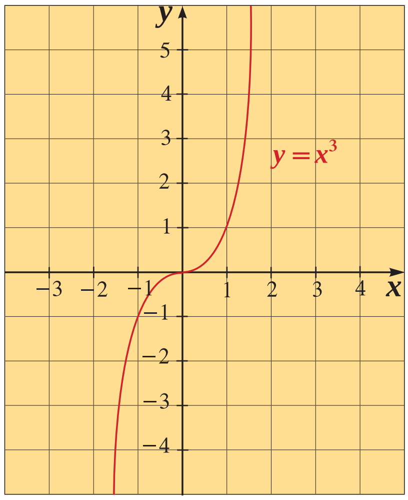
يظهر على الشاشة

$y_1=\square$
$y_2=\square$
$y_3=\square$
$y_4=\square$

(يمكن رسم بيانات عدة دوال معًا) فمثلًا للحصول على بيان الدالة: $y=x^4$

- اضغط على المربع قرب $y1$ فتظهر علامة ✓ داخله
- اضغط على x ثم ^ يليه 4 ثم =

كذلك لاحظنا من "نشاط 1" أن بيان الدوال ذات الأسس الفردية مثل $y = x^3$ كما في الشكل:



وهذا يمثل الشكل العام للدوال التي على الصورة **$y = ax^n$ حيث n عددًا فرديًا موجبًا، $a \neq 0$.**

الدوال الزوجية والدوال الفردية Even Functions and Odd Functions

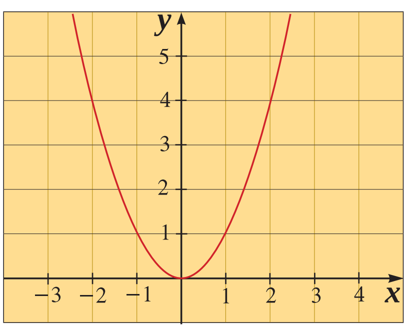
تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة زوجية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D\ ,\ -x \in D$
2. $f(-x) = f(x)$

في مستوى الإحداثيات، المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) لبيان كل دالة زوجية.

فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = x^2\ ,h(x) = x^4$ ، هما دالتان زوجيتان مجال كل منهما $\mathbb{R}$.



وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R}$ ،$-x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$

وكذلك: $h(-x) = (-x)^4 = x^4 = h(x)$

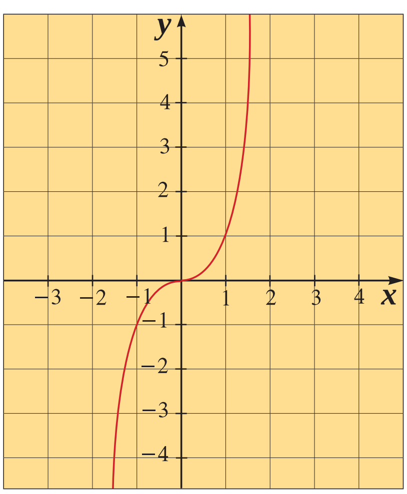
تعريف

تكون الدالة $y = f(x)$ التي مجالها D دالة فردية إذا وفقط إذا كان:

1. $\forall x \in D\ ,\ -x \in D$
2. $f(-x) = -f(x)$

في مستوى الإحداثيات نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) لبيان كل دالة فردية.

فمثلًا: $\forall x \in \mathbb{R}$، الدالة: $f(x) = x^3$ هي دالة فردية.



وذلك لأن: $\forall x \in \mathbb{R}\ ,\ -x \in \mathbb{R}$

فإن: $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$

معلومة

يكون لبيان دالة نقطة تماثل (مركز تناظر) إذا دار بيان الدالة بزاوية قياسها 180° حول هذه النقطة وانطبق على نفسه.

ملاحظة:

توجد دوال ليست زوجية وليست فردية.

مثال (3)

بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f(x) = 2x^7$

b $y = -x^8$

c $y = (x+2)^2$

d $h(x) = 4$

الحل:

a $f(x) = 2x^7$

$f(-x) = 2(-x)^7 = -2x^7 = -f(x) \quad \forall x, \ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة فردية لأن : $f(-x) = -f(x)$

b $y = -x^8$ بفرض أن $y = g(x)$

$g(-x) = -(-x)^8 = -x^8 = g(x) \quad \forall x, \ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $g(-x) = g(x)$

c $y = (x+2)^2$ بفرض أن $y = v(x)$

$v(-x) = (-x+2)^2 \neq (x+2)^2 \quad \forall x, \ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة ليست زوجية: $v(-x) \neq v(x)$

$v(-x) \neq -(x+2)^2$

∴ الدالة ليست فردية $v(-x) \neq -v(x)$

∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d $h(x) = 4$

$h(-x) = 4 = h(x) \quad \forall x, \ -x \in \mathbb{R}$

∴ الدالة زوجية لأن: $h(-x) = h(x)$

حاول أن تحل

3 بيّن ما إذا كانت كل دالة مما يلي زوجية أو فردية أو ليست زوجية وليست فردية.

a $f_1(x) = x^5$

b $f_2(x) = x$

c $f_3(x) = 2x^4$

d $f_4(x) = (x+3)^3$

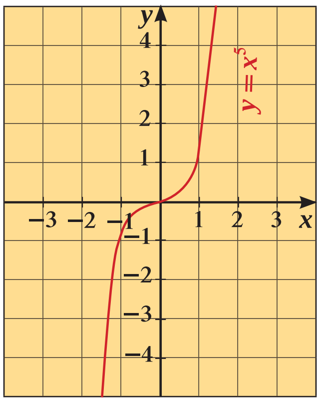
تذكر:

إذا لم يذكر المجال تكون الدالة معرّفة على مجالها.

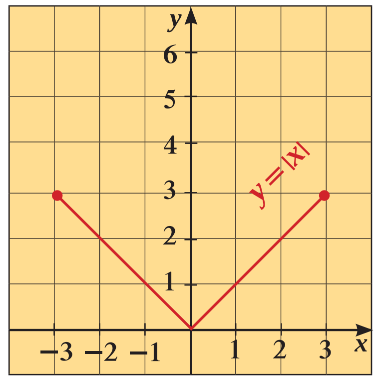
مثال (4)

الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي زوجية أم فردية أم ليست زوجية وليست فردية.

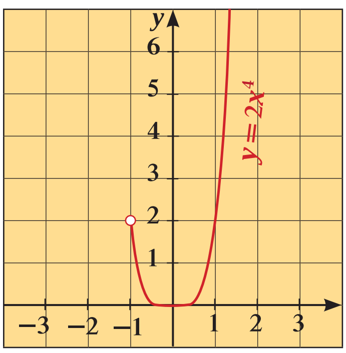
a $y = x^5 ,\quad x \in \mathbb{R}$



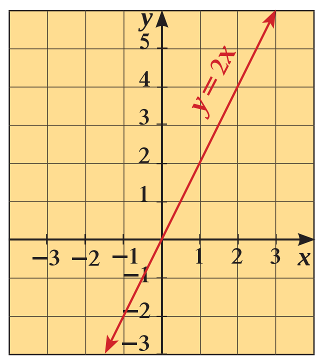
b $y = |x| ,\quad x \in [-3,\ 3]$



c $y = 2x^4 ,\quad x \in (-1,\ \infty)$



d $y = 2x ,\quad x \in \mathbb{R}$



الحل:

a ∵ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) ∴ الدالة فردية

b ∵ المحور الصادي هو محور تماثل (تناظر) ∴ الدالة زوجية

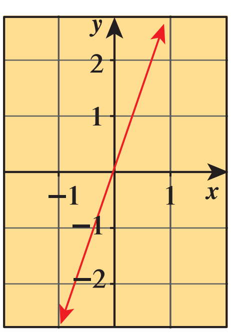
c ∵ ليس لها نقطة تناظر ولا محور تناظر ∴ الدالة ليست زوجية وليست فردية

d ∵ نقطة الأصل هي نقطة تماثل (تناظر) ∴ الدالة فردية

حاول أن تحل

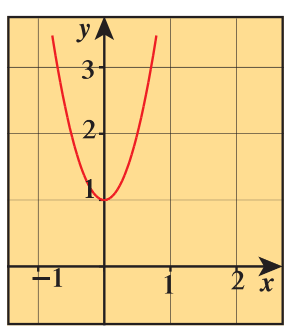
4 الأشكال التالية تمثل دوال. صف تماثل كل دالة ثم وضّح هل هي فردية أم زوجية أم ليست فردية وليست زوجية.

a



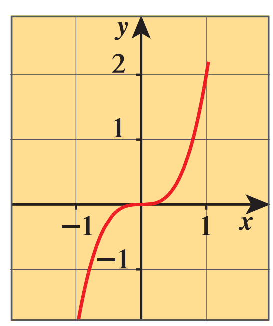
$y = 3x$

b



$y = 4x^2 + 1$

c

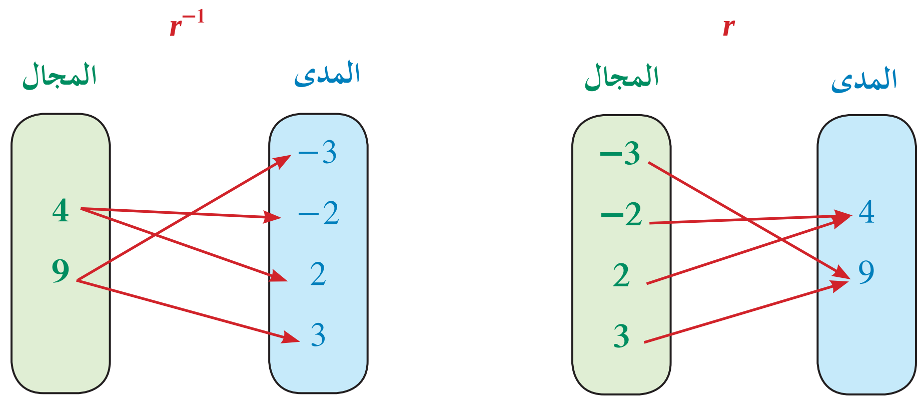


$y = 2x^3$

معكوس العلاقة (r^{-1}) Inverse Relation (r^{-1})

تعرّفت في الوحدة الثانية على معكوس العلاقة. ونذكر بالنقاط التالية:

- إذا كانت علاقة r تربط عنصرًا a من المجال بعنصر b من المدى، فمعكوس العلاقة يربط العنصر b بالعنصر a.
- إذا كان (a, b) عنصرًا من العلاقة r فإن (b, a) هو عنصر من معكوس العلاقة r^{-1}.
- مجال معكوس العلاقة (r^{-1}) هو مدى العلاقة r.
- المستقيم الذي معادلته: $y = x$ هو خط تناظر بين النقاط التي تمثل العلاقة r والنقاط التي تمثل معكوسها.



بعض العلاقات تعتبر دوال لذلك إذا كان لدينا دالة فيمكننا إيجاد معكوسها مع ملاحظة أنه ليس بالضرورة أن يكون المعكوس دالة.

مثال (5)

أوجد معكوس الدالة: $y = 2x^4$

الحل:

لاحظ أن $y \geq 0$

$$y = 2x^4$$

اعكس المتغيرين x , y

$$x = 2y^4$$

حل بالنسبة إلى المتغير y

$$\frac{x}{2} = y^4$$

أوجد الجذر الرابع لكل من الطرفين

$$\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = (y^4)^{\frac{1}{4}} \Longrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = |y| \quad , \quad x \geqslant 0$$

$$\pm\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{4}} = y$$

معكوس $y = 2x^4$ هو $y = \pm\sqrt[4]{\frac{x}{2}}$

حاول أن تحل

5 أوجد معكوس الدالة: $y = 5x^3$

مثال (6)

أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x+2}$

الحل:

$f(x) = \sqrt{x+2} \quad , \quad x \geqslant -2$

أعد كتابة الدالة باستخدام y : $y = \sqrt{x+2}$

اعكس المتغيرين x , y : $x = \sqrt{y+2}$

ربّع طرفي المعادلة: $x^2 = y+2$

حل في y : $y = x^2 - 2$

$\therefore$ معكوس الدالة $f(x) = \sqrt{x+2}$ هو

$f^{-1}(x) = x^2 - 2 \quad , \quad x \geqslant 0$

حاول أن تحل

6 أوجد معكوس الدالة: $f(x) = \sqrt{x-4}$

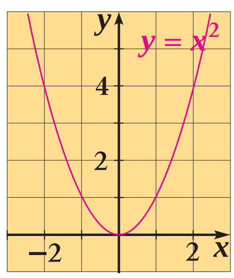
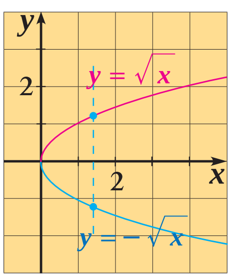
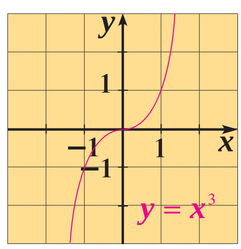
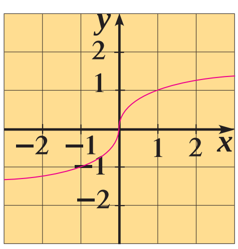
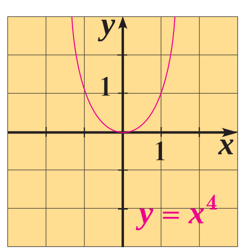
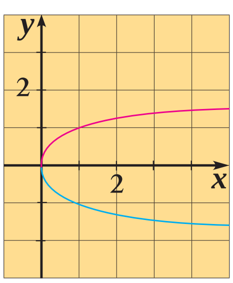
> **معلومة:**
> يرمز لمعكوس الدالة f بالرمز f^{-1}

> **معلومة:**
> - إذا كانت النقطة (a, b) تقع على بيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
> - عندما يقطع مستقيم رأسي المنحنى في موضعين فهذا المنحنى لا يمثل دالة.

تدريب

تفحص بدقة الرسوم البيانية لدوال القوى ومعكوساتها ثم أكمل الجدول.

لاحظ العلاقة بين مدى الدالة ومجال معكوسها.

دوال القوى	بيان الدالة	المعكوس	بيان المعكوس	ملاحظات
$y = x^2$		$y = \pm\sqrt{x}$		المعكوس ليس دالة
$y = x^3$		....		....
$y = x^4$		....		....

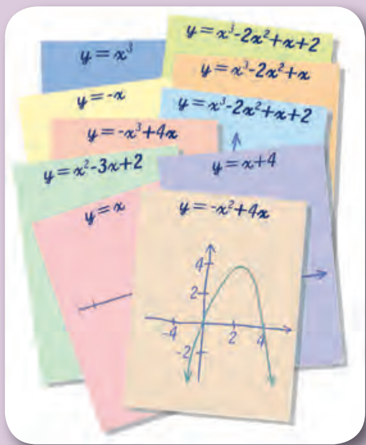
3–2

الدوال الحدودية

Polynomial Functions

عمل تعاوني

1. اعمل في مجموعات. كل مجموعة تحتاج إلى آلة حاسبة بيانية وعشر بطاقات ورقية. ارسم بيانيًا كل دالة مكتوبة جهة اليسار وخطط كل رسم على بطاقة منفصلة. عنون كل رسم بمعادلته.



2. صنّف الرسوم البيانية في مجموعات تبعًا لأشكالها.
3. فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات الخطية؟
4. فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات التربيعية؟
5. فيمَ تتشابه الرسوم البيانية للمعادلات المتبقية؟ وفيمَ تختلف؟
6. a قدر الجزء (الأجزاء) المقطوع من محور السينات لكل رسم بياني واكتبه على البطاقة الخاصة به.

   b ماذا تلاحظ بالنسبة إلى عدد الأجزاء المقطوعة من محور السينات في كل رسم بياني وأكبر أس يوجد في معادلته؟

عندما تجمع دوال قوى وثوابت أو تطرحها فإنك تحصل على **دالة حدودية (دالة كثيرة الحدود)**.

تعريف الدالة الحدودية (كثيرة الحدود)

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$$

حيث n عدد صحيح غير سالب.

a_n , a_{n-1} , a_{n-2} ... , a_0 أعدادًا حقيقية

الدوال في «عمل تعاوني» كلها دوال كثيرات الحدود مثل الدالة $P(x)$ التالية:

دالة كثيرة حدود

$$\boxed{P(x) = \boxed{2}x^3 - 5x^2 - 2x - 5}$$

المعامل الرئيسي   حد تكعيبي   حد تربيعي   حد خطي   حد ثابت

يحدد الأس في كل حد **درجة** الحد. الحدود في كثيرة الحدود الموضحة أعلاه مرتبة تنازليًّا بحسب درجاتها. هذا الترتيب يسمى **بالصورة العامة**. وفي الصورة العامة تجمع كل الحدود المتشابهة. يمكنك أن تصف أو تصنف كثيرة الحدود في الصورة العامة بعدد الحدود التي تحتويها أو **بأعلى درجة لها**.

سوف تتعلم

- وصف منحنيات كثيرات الحدود.
- نمذجة بيانات باستخدام دوال كثيرات الحدود.
- وصف سلوك النهاية لدوال كثيرات الحدود.

المفردات والمصطلحات:

- المعامل الرئيسي Leading Coefficient
- حد تكعيبي Cubic Term
- حد تربيعي Quadratic Term
- حد خطي Linear Term
- حد ثابت Constant Term
- درجة Degree
- الصورة العامة General Form
- سلوك النهاية End Behavior
- حدودية أو كثيرة حدود Polynomial

الحدودية	الدرجة	الاسم باستخدام الدرجة	عدد الحدود	الاسم باستخدام عدد الحدود
6	الصفرية	ثابتة	1	أحادية
$x + 3$	الأولى	خطية	2	ثنائية
$3x^2 + 5x - 2$	الثانية	تربيعية	3	ثلاثية
$2x^3 - 5x^2$	الثالثة	تكعيبية	2	ثنائية
$-x^4 + x^3 - 1$	الرابعة	ذات القوة الرابعة	3	ثلاثية

ملاحظة:

إذا كانت الدالة الحدودية من الدرجة n فإن لها على الأكثر $(n+1)$ حدًّا.

مثال (1)

اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعًا للدرجة وعدد الحدود.

a $-7x + 5x^4$ b $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$ c $(2l - 5)(l^2 - 1)$

الحل:

a $-7x + 5x^4 = 5x^4 - 7x$

الحد الذي له أكبر درجة هو $5x^4$

$\therefore$ حدودية من الدرجة الرابعة.

لها حدان $\therefore$ ثنائية.

b $5x^3 - (4x^2 + 5x^3) + 2x^2$

$= 5x^3 - 4x^2 - 5x^3 + 2x^2$

$= -2x^2$

الحد الذي له أكبر درجة هو $-2x^2$

$\therefore$ حدودية من الدرجة الثانية.

لها حد واحد $\therefore$ أحادية.

c $(2l - 5)(l^2 - 1)$

$= 2l^3 - 2l - 5l^2 + 5$

$= 2l^3 - 5l^2 - 2l + 5$

الحد الذي له أكبر درجة هو $2l^3$

$\therefore$ حدودية من الدرجة الثالثة.

لها أربعة حدود $\therefore$ رباعية.

حاول أن تحل

1 اكتب كل كثيرة حدود بالصورة العامة ثم صنفها تبعاً للدرجة وعدد الحدود.

a $4x - 6x + 5$ **b** $3x^3 + x^2 - (4x + 2x^3)$ **c** $6 - 2x^5$

لقد استخدمت سابقًا الخطوط المستقيمة والمنحنيات لتمثيل البيانات.

يمكنك أحيانًا إحكام تمثيل البيانات باستخدام كثيرات الحدود من الدرجة الثالثة أو أكثر.

نشاط إثرائي (الربط بالحياة)

يبيّن الجدول أدناه إنتاج العالم من الذهب لعدة سنوات. أوجد كثيرة حدود من الدرجة الرابعة لنمذجة البيانات، ثم استخدمها لتقدير الإنتاج العالمي من الذهب سنة 1988.

السنة	1975	1980	1985	1990	1995	2000
الإنتاج مليون أونصة	38.5	39.2	49.3	70.2	71.6	82.6

الحل:

استخدم آلة حاسبة بيانية.

أدخل البيانات. ليكن 0 يمثل 1975.

استخدم نموذجًا من الدرجة الرابعة.

ارسم بيانيًّا نموذج كثيرة الحدود:

$$f(x) = a_4x^4 + a_3x^3 + ... + a_0$$

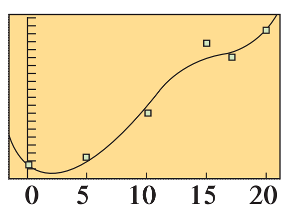
$$a_4 = 9.0333333 \times 10^{-4}$$

$$a_3 = -0.0519296296$$

$$a_2 = 0.9590277778$$

$$a_1 = -3.898753421$$

$$a_0 = 38.85753968$$



يظهر على شاشة الآلة الحاسبة

المعادلة: $f(x) = 0.0009033x^4 - 0.05193x^3 + 0.959x^2 - 3.899x + 38.86$

هي نموذج تقديري من الدرجة الرابعة.

لتقدير قيمة إنتاج الذهب سنة 1988 نستخدم جدول القيم.

$$f(13) \approx 61.96$$

استنادًا لهذا النموذج، يقدر إنتاج الذهب سنة 1988 بحوالي 62 مليون أونصة.

- استخدم كثيرة الحدود في هذا النشاط لتقدير إنتاج الذهب سنة 1997.

جدول القيم

x	y
8	46.157
9	49.519
10	52.875
11	56.12
12	59.168
13	61.959

معلومة:
يبلغ وزن أونصة الذهب once (oz). 28.349 g أي حوالي 28.35 g.

ملاحظة:
يجب اختيار آلة حاسبة لها هذه الخاصية وتتغير طريقة البرمجة من آلة إلى أخرى.

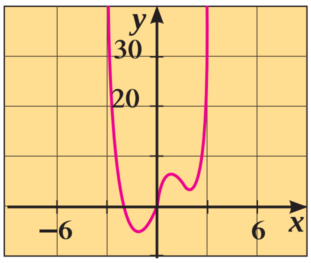
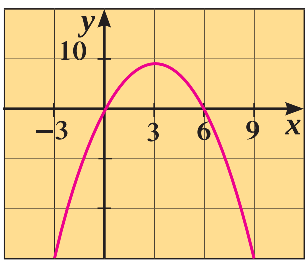
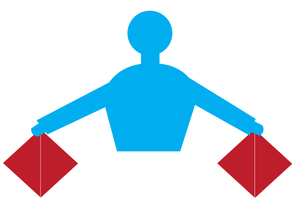
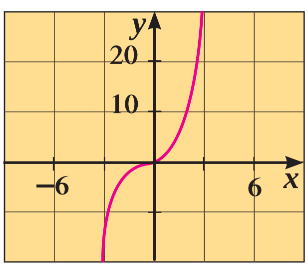
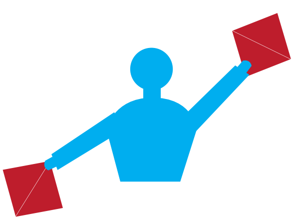
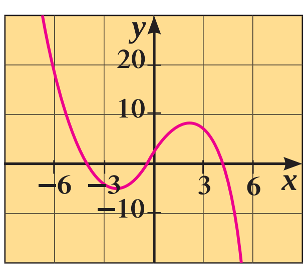
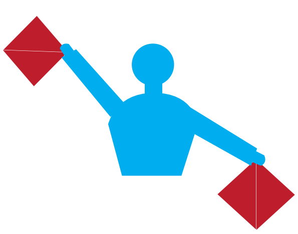
ملاحظة:
يمثل العدد 13 سنة 1988.

End Behavior سلوك النهاية

سلوك النهاية لمنحنى دالة يصف امتداد طرفيه الأيمن والأيسر، وتوجد أربعة نماذج لسلوك النهاية لكثيرة حدود وهي لأعلى ولأعلى، لأسفل ولأسفل، لأعلى ولأسفل، لأسفل ولأعلى.

وهذا نظام لإعطاء الإشارات بواسطة علمين يوضح النماذج الأربعة لسلوك النهاية.

لكل دالة كثيرة حدود مبينة أدناه يعين سلوك النهاية بواسطة الحد الذي له أعلى درجة في كثيرة الحدود.

الدرجة زوجي أم فردي	سلوك النهاية	المعامل الرئيسي موجب، سالب	الدالة وبيانها	نظام الإشارات
الرابعة زوجي	$(\nwarrow , \nearrow)$	1 عدد موجب	 $y = x^4 - 3x^3 + 5x$	
الثانية زوجي	$(\swarrow , \searrow)$	-1 عدد سالب	 $y = -x^2 + 6x$	
الثالثة فردي	$(\swarrow , \nearrow)$	1 عدد موجب	 $y = x^3$	
الثالثة فردي	$(\nwarrow , \searrow)$	-0.3 عدد سالب	 $y = -0.3x^3 + 4x + 2$	

مثال (2)

وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a $y = 4x^3 - 3x$

b $f(x) = -2x^4 + 8x^3 - 8x^2$

c $g(x) = x^2 - 4x + 3$

d $h(x) = -x^3 + 2x + 2$

الحل:

a المعامل الرئيسي 4 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو (↗، ↙).

b المعامل الرئيسي 2− (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الرابعة (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأسفل.

∴ سلوك النهاية هو (↘، ↙).

c المعامل الرئيسي 1 (عدد موجب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأعلى.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثانية (زوجي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار هو نفسه سلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو (↗، ↖).

d المعامل الرئيسي 1− (عدد سالب)

∴ سلوك النهاية جهة اليمين هو لأسفل.

∵ كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة (فردي).

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين أي لأعلى.

∴ سلوك النهاية هو (↘، ↖).

حاول أن تحل

2 وضّح سلوك النهاية لبيان كل دالة كثيرة الحدود.

a $y = -x^3 + 2x^2 + 6$

b $y = 4x^4 - 3x$

c $f(x) = 2x^3 - x$

d $h(x) = x - x^4$

3-3

العوامل الخطية لكثيرات الحدود

Linear Factors of Polynomials

سوف تتعلم

- تحليل كثيرة الحدود إلى عوامل.
- كتابة دالة كثيرة الحدود باستخدام أصفارها.
- الربط بين الأصفار والعوامل.

المفردات والمصطلحات:

- القيمة العظمى Maximum Value
- عوامل دالة حدودية Factors of a Polynomial Function
- أصفار دالة حدودية Zeros of a Polynomial Function
- نظرية العامل Factor Theorem

دعا نفكر ونتناقش

كثيرة الحدود في صورة عوامل

من المفيد أحيانًا التعامل مع كثيرات الحدود في صورة عوامل.

فمثلًا عوامل كثيرة الحدود: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ هي:

$(x-1)$, $(x+2)$,$(x-3)$

1 كيف يمكنك التحقق من أن: $(x-1)$, $(x+2)$, $(x-3)$، هي عوامل لكثيرة الحدود: $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$؟

2 ما العلاقة بين كل حد ثابت لعوامل كثيرة الحدود وعوامل الحد الثابت 6؟

عندما نحلل كثيرة الحدود إلى عوامل خطية فلا يمكن القيام بتحليلات أخرى لإيجاد عوامل إضافية.

معلومة:

عندما نقول عوامل العدد فإننا نعني بها العوامل الموجبة والعوامل السالبة لهذا العدد.

فمثلًا: عوامل العدد 6 هي:

$\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

مثال (1)

اكتب التعبير: $(x+1)(x+2)(x+5)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

الحل:

اضرب $(x+2)$، $(x+5)$ $\quad (x+1)(x+2)(x+5) = (x+1)(x^2+5x+2x+10)$

بسّط $\quad = (x+1)(x^2+7x+10)$

اضرب $\quad = x^3+7x^2+10x+x^2+7x+10$

بسّط $\quad = x^3+8x^2+17x+10$

الصورة العامة للتعبير $(x+1)(x+2)(x+5)$ هي $x^3+8x^2+17x+10$

حاول أن تحل

1 اكتب التعبير: $(x+1)(x+1)(x-2)$ في شكل كثيرة حدود في الصورة العامة.

مثال (2)

حلّل كثيرة الحدود: $2x^3 + 10x^2 + 12x$ إلى عوامل ثم تحقق.

الحل:

$2x$ عامل مشترك	$2x^3 + 10x^2 + 12x = 2x(x^2 + 5x + 6)$
حلّل $x^2 + 5x + 6$ إلى عوامل	$= 2x(x+2)(x+3)$
اضرب $(x+2)$, $(x+3)$	تحقق: $2x(x+2)(x+3) = 2x(x^2 + 5x + 6)$
✓	$= 2x^3 + 10x^2 + 12x$

حاول أن تحل

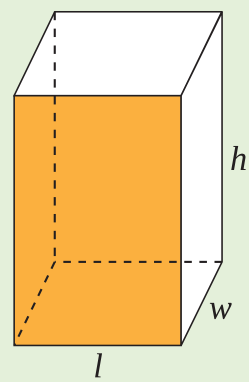
2 حلّل كثيرة الحدود: $12x^3 - 12x^2 + 3x$ إلى عوامل، ثم تحقق.

يمكنك استخدام دوال كثيرات الحدود لحل مسائل حياتية.

اعتبر الدالة التالية للحجم: ح = الطول × العرض × العمق (الارتفاع)

$$V = l \cdot w \cdot h$$

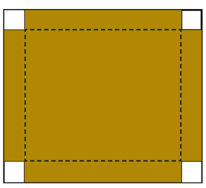
واعتبر كل من هذه الأبعاد هو عامل خطي للدالة كثيرة الحدود.

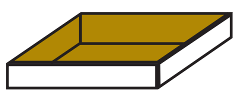


Length l الطول
Width w العرض
Height h الارتفاع

مثال (3) تطبيقات حياتية

نريد صنع علبة دون غطاء من قطعة كرتون مربعة الشكل طول ضلعها 3 dm لذلك نقطع من كل زاوية قطعة مربعة طول ضلعها x dm، ثم بالطي واللصق نحصل على العلبة.





a كوّن الدالة التي تربط حجم العلبة (V)، بـ (x)،

b صف المجال الواقعي للدالة.

الحل:

a إذا اقتطعنا مربعًا من كل زاوية، يصبح طول ضلع القطعة $(3 - 2x)$،

وتصبح أبعادها: x , $(3 - 2x)$, $(3 - 2x)$

العلاقة: الحجم = الطول × العرض × الارتفاع	$V = l \cdot w \cdot h$
عوّض	$V = (3 - 2x)(3 - 2x)x$
بسّط	$V = 4x^3 - 12x^2 + 9x$

$\therefore$ دالة الحجم بدلالة x هي:

$$V(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$$

b $\because x \quad , \quad (3 - 2x)$ أبعادًا للعلبة

$\therefore \; 3 - 2x > 0 \quad , \quad x > 0$

$\therefore \; x < 1.5 \quad , \quad x > 0$

وبذلك يكون المجال الواقعي: $(0 , 1.5)$

حاول أن تحل

3 قطعة خشب على شكل شبه مكعب طولها $12\ \text{cm}$ وعرضها $8\ \text{cm}$ وسماكتها $x\ \text{cm}$. اقتطع من إحدى زواياها مكعب طول حرفه $x\ \text{cm}$

a كوّن الدالة التي تربط حجم قطعة الخشب المتبقي بـ x

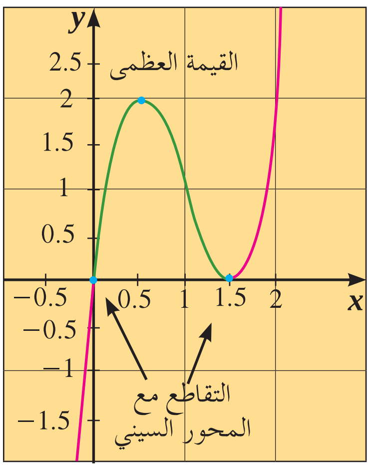
b صف المجال الواقعي للدالة.

الشكل المقابل يمثل بيان الدالة: $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 9x$ من مثال (3)

ونلاحظ أن:

$x = 1.5$ هو صفر مكرر و $x = 0$ هو صفر بسيط

الأجزاء المقطوعة من محور السينات تسمى **أصفار الدالة**، لأن قيمة الدالة تساوي صفرًا عند هذه الأجزاء.



نستنتج أن القيمة العظمى للدالة على المجال $(0, 1.5)$ هي 2 عندما تكون $x = 0.5$.

أي أن القيمة العظمى لحجم العلبة هي $2\ \text{dm}^3$ عندما يكون ارتفاع العلبة $0.5\ \text{dm}$ وطول ضلع القاعدة المربعة:

$3 - 2 \times (0.5) = 2\ \text{dm}$

عوامل وأصفار دالة كثيرة الحدود

Factors and Zeros of a Polynomial Function

إذا كانت دالة كثيرة الحدود في صورة العوامل، فإنه بإمكانك استخدام خاصية الضرب في الصفر لإيجاد القيم التي تجعل الدالة تساوي صفرًا.

مثال (4)

أوجد أصفار $y = (x-2)(x+1)(x+3)$،

ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا للدالة مراعيًّا سلوك نهاية الدالة.

الحل:

باستخدام خاصية الضرب في الصفر، أوجد صفرًا لكل عامل خطي.

$x - 2 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x + 3 = 0$

$x = 2$ $\quad$ $x = -1$ $\quad$ $x = -3$

$\therefore$ أصفار الدالة هي: $2, -1, -3$

مراجعة سريعة:

تنص خاصية الضرب في الصفر على أنه عندما يساوي ناتج الضرب صفرًا، فإن أحد العوامل على الأقل يجب أن يساوي صفرًا.

لرسم بيان تقريبي للدالة:

أصفار الدالة هي: $2, -1, -3$

سلوك النهاية:

∵ المعامل الرئيسي موجب (لماذا؟)

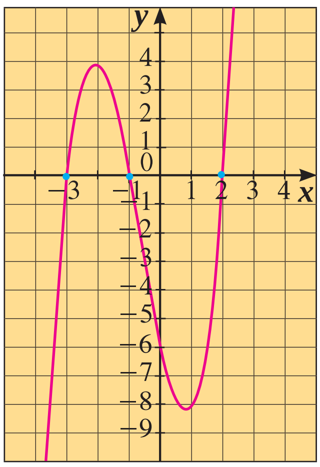
∴ سلوك النهاية جهة اليمين لأعلى

∵ الحدودية من الدرجة الثالثة (لماذا؟)

∴ سلوك النهاية جهة اليسار معاكس لسلوك النهاية جهة اليمين (لأسفل).

∴ سلوك النهاية (↗، ↙).

نكوّن الجدول:



$y = (x-2)(x+1)(x+3)$

x	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-18	0	4	0	-6	-8	0	24

حاول أن تحل

4 أوجد أصفار الدالة $y = (x-7)(x-5)(3-x)$، ثم ارسم بيانًا تقريبيًّا للدالة مراعيًا سلوك نهاية الدالة.

يمكنك عكس هذه العمليات وكتابة العوامل الخطية عندما تعلم أصفار الدالة. تسمى هذه العلاقة **بنظرية العامل**.

نظرية العامل

المقدار $(x-a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ a صفر من أصفار كثيرة الحدود.

ويعني أنه إذا كان $(x-a)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن a صفر من أصفار دالة كثيرة الحدود والعكس صحيح.

فمثلًا $(x-5)$ عامل خطي لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ 5 صفر لها.

أي أنه إذا كان $(x-5)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود فإن 5 صفر لها والعكس صحيح.

وكذلك $(x+3)$ عاملًا خطيًّا لكثيرة الحدود $\Leftrightarrow$ -3 صفر لها.

معلومة:
كلما أوجدنا نقاطًا أكثر تنتمي إلى بيان الدالة يكون الرسم أكثر دقة.

معلومة:
الرمز $\Leftrightarrow$ يقرأ إذا وفقط إذا

مثال (5)

اكتب دالة كثيرة حدود حيث أصفارها: 3 , 3 , 2− في الصورة العامة.

الحل:

∴ أصفار الدالة هي:

$$-2 \quad , \quad 3 \quad , \quad 3$$

∴ عوامل كثيرة الحدود هي: $(x-3)$, $(x-3)$, $(x-(-2))$

$f(x) = (x+2)(x-3)(x-3)$

$= (x+2)(x^2-6x+9)$ اضرب $(x-3)(x-3)$

$= x(x^2-6x+9)+2(x^2-6x+9)$ خاصية التوزيع

$= x^3-6x^2+9x+2x^2-12x+18$

$= x^3-4x^2-3x+18$ بسّط

∴ الدالة هي:

$f(x) = x^3-4x^2-3x+18$

حاول أن تحل

5 a اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 1 , -2 , -4

b اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث أصفارها: 0 , -2 , -4

c اكتب دالة كثيرة حدود في الصورة العامة حيث 3 صفر مكرر مرتين و 1− صفر بسيط.

d التفكير الناقد: اشرح لماذا الصفر عند 0 في b يعطي أكثر من إمكانية واحدة للإجابة.

e هل كل دالة من الدوال التي حصلت عليها من b , a وحيدة؟ فسر إجابتك.

معلومة:
عندما يكرر عامل خطي في كثيرة الحدود، فإن صفر الدالة يكرر أيضًا ويسمى في هذه الحالة «صفر مكرر».

نلاحظ مما سبق أن لنظرية العامل أربعة مفاهيم مرتبطة بكثيرة الحدود.
وهذه الأفكار متكافئة، بمعنى أنك إذا علمت إحداها، فسوف تعلم الكل.

1. $(x=+1)$ حل للمعادلة: $x^2+3x-4=0$
2. $(+1)$ جزء مقطوع من محور السينات لمنحنى الدالة: $y=x^2+3x-4$
3. $(+1)$ صفر من أصفار الدالة: $y=x^2+3x-4$
4. $(x-1)$ عامل من عوامل كثيرة حدود: x^2+3x-4

3–4

قسمة كثيرات الحدود

Dividing Polynomials

سوف تتعلم

- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة المطولة.
- قسمة كثيرات الحدود باستخدام القسمة التركيبية.
- ايجاد الباقي باستخدام نظرية الباقي.

المفردات والمصطلحات:

- القسمة المطولة Long Division
- القسمة التركيبية Synthetic Division
- نظرية الباقي Remainder Theorem
- المقسوم Dividend
- المقسوم عليه Divisor
- ناتج القسمة Quotient
- باقي القسمة Remainder

دعنا نفكر ونتناقش

يمكن استخدام قسمة كثيرات الحدود للمساعدة على إيجاد أصفار دالة كثيرة الحدود.
واعلم أن قسمة كثيرات الحدود مشابهة لقسمة الأعداد.

تذكر أنه عندما يكون الباقي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة هما من عوامل المقسوم.

$$\begin{array}{r} 7 \\ 8\,\overline{)\,56} \\ \underline{56} \\ 0 \end{array}$$

فمثلًا: $7 = 8 \div 56$ ونلاحظ أن 8 , 7 من عوامل 56

أما إذا كان الباقي لا يساوي صفرًا، فإن المقسوم عليه وناتج القسمة لا يكونا من عوامل المقسوم.

ناتج القسمة

المقسوم عليه

المقسوم

باقي القسمة

$$\begin{array}{r} 8 \\ 5\,\overline{)\,42} \\ \underline{40} \\ 2 \end{array}$$

فمثلًا: $8 = 5 \div 42$ والباقي 2

ونلاحظ أن 5، 8 ليسا من عوامل 42

بالتالي، تسمح القسمة بمعرفة ما إذا كان عدد من عوامل عدد آخر.
وهذا أيضًا صحيح بالنسبة إلى قسمة كثيرات الحدود.

إذا قسمت كثيرة حدود على أحد عواملها تحصل على عامل آخر.
وعندما يكون باقي القسمة صفرًا تكون قد حوّلت كثيرة الحدود إلى عوامل.

$$\begin{array}{r} 2x \\ x\,\overline{)\,2x^2} \\ \underline{2x^2} \\ 0 \end{array}$$

فمثلًا: $2x^2 \div x = 2x$

ونلاحظ أن $2x$, x من عوامل $2x^2$

القسمة المطولة Long Division

عند قسمة كثيرة حدود على أخرى اتبع الخطوات المستخدمة في قسمة الأعداد الكلية.

مثال (1)

اقسم:

a $x^2 + 6x + 8$ على $(x + 4)$

b $x^2 + 3x - 12$ على $(x - 2)$

الحل:

نوجد الناتج باستخدام القسمة المطولة.

a اقسم: $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب: $x(x+4) = x^2 + 4x$

اطرح: $(x^2+6x)-(x^2+4x) = 2x$

أنزل $+8$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x+4 & x^2+6x+8 \\ & \underline{-x^2 \mp 4x} \\ & \quad 2x+8 \end{array}$$

اقسم: $\frac{2x}{x} = 2$

اضرب: $2(x+4) = 2x+8$

الباقي صفر

$$\begin{array}{r|l} & x+2 \\ \hline x+4 & x^2+6x+8 \\ & \underline{-x^2 \mp 4x} \\ & \quad 2x+8 \\ & \underline{\mp 2x \mp 8} \\ & \qquad 0 \end{array}$$

∴ ناتج القسمة $(x+2)$ والباقي صفر.

تحقق من النتيجة :

$$(x+2)(x+4) = x^2 + 4x + 2x + 8$$
$$= x^2 + 6x + 8$$

b اقسم: $\frac{x^2}{x} = x$

اضرب: $x(x-2) = x^2 - 2x$

اطرح: $(x^2+3x)-(x^2-2x) = 5x$

$$\begin{array}{r|l} & x \\ \hline x-2 & x^2+3x-12 \\ & \underline{-x^2 \pm 2x} \\ & \quad 5x-12 \end{array}$$

أنزل -12

اقسم: $\frac{5x}{x} = 5$

اضرب: $5(x-2) = 5x-10$

اطرح: $(5x-12)-(5x-10) = -2$

الباقي -2

$$\begin{array}{r|l} & x+5 \\ \hline x-2 & x^2+3x-12 \\ & \underline{-x^2 \pm 2x} \\ & \quad 5x-12 \\ & \underline{-5x \pm 10} \\ & \qquad -2 \end{array}$$

∴ ناتج القسمة $(x+5)$ والباقي -2

تحقق من النتيجة:

$$(x+5)(x-2)+(-2) = x^2 - 2x + 5x - 10 - 2$$
$$= x^2 + 3x - 12$$

حاول أن تحل

1 اقسم:

b $x-8 \overline{\big)\, 2x^2 - 19x + 24}$

a $x+2 \overline{\big)\, x^2 + 5x + 6}$

يمكنك استخدام قسمة كثيرات الحدود المطولة لإيجاد عوامل كثيرة الحدود.

مثال (2)

تحقق ما إذا كان $(x+4)$ عامل من عوامل كل كثيرة حدود باستخدام القسمة المطولة

a x^3+3x^2-6x-7 b x^3+64

الحل:

a

$$\begin{array}{r|l} & \quad x^2-x-2 \\ \hline x+4 & \quad x^3+3x^2-6x-7 \\ & \overset{-}{}x^3\overset{-}{+}4x^2 \\ \hline & \qquad -x^2-6x \\ & \qquad \overset{+}{-}x^2\overset{+}{-}4x \\ \hline & \qquad\qquad -2x-7 \\ & \qquad\qquad \overset{+}{-}2x\overset{+}{-}8 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 1 \end{array}$$

$\because$ الباقي $\neq 0$

$\therefore$ $(x+4)$ ليس من عوامل (x^3+3x^2-6x-7)

b

$$\begin{array}{r|l} & \quad x^2-4x+16 \\ \hline x+4 & \quad x^3+ \qquad\qquad 64 \\ & \overset{-}{}x^3\overset{-}{+}4x^2 \\ \hline & \qquad -4x^2 \\ & \qquad \overset{+}{-}4x^2\overset{+}{-}16x \\ \hline & \qquad\qquad 16x+64 \\ & \qquad\qquad \overset{-}{}16x\overset{-}{+}64 \\ \hline & \qquad\qquad\qquad 0 \end{array}$$

$\because$ الباقي $= 0$

$\therefore$ $(x+4)$ هو عامل من عوامل x^3+64

حاول أن تحل

2 تحقق ما إذا كان كل مقسوم عليه هو من عوامل المقسوم.

a $(x^3+4x^2+x-6)\div(x+2)$ b $(x^3-x+1)\div(x+1)$

استخدام القسمة التركيبية Using Synthetic Division

عندما نقسم على عامل خطي على الصورة $(x-a)$ يمكننا استخدام عمليات مختصرة تعرف **بالقسمة التركيبية**، وفيها تهمل كل المتغيرات والأسس من المقسوم واستخدام صفر العامل الخطي a، ويتم إجراء عملية الجمع بدلًا من الطرح خلال العمليات والمثال التالي يوضح ذلك.

معلومة:

إذا كان المقسوم كثيرة حدود من الدرجة n والمقسوم عليه من الدرجة الأولى فإن ناتج القسمة من الدرجة $(n-1)$ حيث $n \geq 1$

ملاحظة:

$x^3+64=$

$x^3+0x^2+0x+64$

مثال توضيحي

استخدم القسمة التركيبية لقسمة:

$(x+4)$ على $x^3 - 13x + 12$

الحل:

خطوة 1:

ضع المقسوم بالصورة العامة ثم اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود واستخدم الصفر مكان الحدود الناقصة.

حدد صفر المقسوم عليه.

أدخل $0x^2$

اكتب معاملات المقسوم وصفر المقسوم عليه

$x+4$	x^3+	$0x^2$	$-13x$	$+12$
-4	1	0	-13	12

خطوة 2: أنزل أول معامل.

أنزل العدد 1

بذلك يبدأ ناتج القسمة

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & \square & \square & \square \\ \hline & 1 & \square & \square & \square \end{array}$$

خطوة 3: اضرب المعامل الأول في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (0) واجمع.

اضرب 1 في -4

اكتب الناتج تحت 0

اجمع 0، -4

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ \times & & -4 & \square & \square \\ \hline & 1 & -4 & \square & \square \end{array}$$

خطوة 4: اضرب ناتج الجمع (-4) في (-4)

اكتب الناتج تحت المعامل التالي (-13) واجمع.

اضرب -4 في -4

اكتب الناتج تحت -13

اجمع -13، 16

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ \times & & -4 & 16 & \square \\ \hline & 1 & -4 & 3 & \square \end{array}$$

معلومة:

عند كتابة كثيرة الحدود بالصورة العامة مرتبة تصاعديًا أو تنازليًا يمكن إضافة الحد الناقص على أن يكون معامله صفرًا مثلًا:

$x^3 + x - 3$

تكتب: $x^3 + 0x^2 + x - 3$

معلومة :

الأعداد الناتجة من عملية القسمة التركيبية هي معاملات لكثيرة حدود في الصورة العامة.

خطوة 5: اضرب ناتج الجمع (3) في (−4)

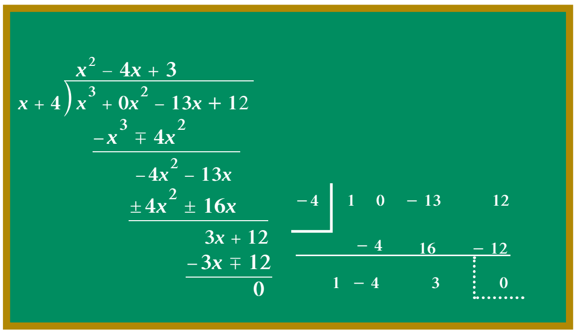
اكتب الناتج تحت المعامل التالي (الحد الثابت 12) واجمع.

اضرب 3 في −4

اكتب الناتج تحت 12

اجمع 12 , −12

$$\begin{array}{r|rrrr} -4 & 1 & 0 & -13 & 12 \\ & & -4 & 16 & -12 \\ \hline & 1 & -4 & 3 & 0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & x^2 & -4x & +3 & \text{الباقي} \end{array}$$



ناتج القسمة: $x^2 - 4x + 3$

ناتج القسمة من الدرجة الثانية. (لماذا؟)

مثال (3)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 3x^2 - 6x + 8$ على $(x + 2)$ ثم أوجد باقي العوامل.

الحل:

لتحديد صفر المقسوم عليه اعكس إشارة الحد الثابت في $(x + 2)$ فيصبح −2

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

$$\begin{array}{r|rrrr} -2 & 1 & -3 & -6 & 8 \\ & & -2 & 10 & -8 \\ \hline & 1 & -5 & 4 & 0 \\ & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ & x^2 & -5x & +4 & \text{الباقي} \end{array}$$

ناتج القسمة: $x^2 - 5x + 4$ والباقي صفر:

نحلل: $x^2 - 5x + 4 = (x - 1)(x - 4)$

∴ باقي العوامل هي: $(x - 4)$, $(x - 1)$

حاول أن تحل

3 a استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ على $(x + 2)$

b استخدم الإجابة في a لتحليل $x^3 - 2x^2 - 5x + 6$ إلى عوامل.

مثال (4)

استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 2x^2 + x - 5$ على $(x + 3)$

الحل:

اعكس إشارة الحد الثابت في المقسوم عليه فتصبح -3

اكتب جميع معاملات كثيرة الحدود.

-3	1	2	1	-5
		-3	3	-12
	1	-1	4	$\boxed{-17}$
	x^2	$-x$	$+4$	الباقي

ناتج القسمة: $x^2 - x + 4$، الباقي -17

حاول أن تحل

4 استخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 4x^2 + x - 6$ على $(x + 1)$

مثال (5)

تعتبر قلعة بعلبك في لبنان من أهم الآثار في العالم العربي

يعطى حجم أحد الحجارة الضخمة قرب قلعة بعلبك بالعلاقة:

$$V = x^3 + 21x^2 + 56x + 36$$

a إذا كان $(x + 2)\text{m}$ أحد أبعاد هذا الحجر.

فأوجد البعدين الآخرين.

b إذا كان أكبر أبعاد هذا الحجر يساوي 21 m

فأوجد البعدين الآخرين.

الحل:

a نستخدم القسمة التركيبية لقسمة $x^3 + 21x^2 + 56x + 36$ على $(x + 2)$

-2	1	21	56	36
		-2	-38	-36
	1	19	18	$\boxed{0}$

ناتج القسمة: $x^2 + 19x + 18$ والباقي صفر

بالتحليل: $x^2 + 19x + 18 = (x + 1)(x + 18)$

$\therefore$ البعدان الآخران هما $(x + 1)$، $(x + 18)$ بالأمتار (m)

b ∵ أكبر الأبعاد يساوي 21 m

$\therefore\ x + 18 = 21$

$x = 3$

وبالتعويض في البعدين الآخرين:

$x + 1 = 3 + 1 = 4$

$x + 2 = 3 + 2 = 5$

بعدا الحجر الآخران هما: 4 m، 5 m

حاول أن تحل

5 في مثال (5) هل يمكن أن يكون $(x + 3)$ أحد أبعاد هذا الحجر؟ فسّر.

مثال (6)

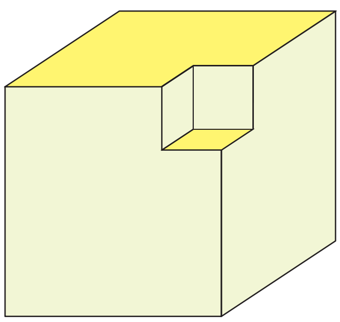
يبيّن الشكل المقابل منحوتة على شكل شبه مكعب وقد اقتطع مكعب من إحدى زواياه.

أبعاد شبه المكعب قبل اقتطاع المكعب هي:

$h = 2x + 7\ ,\ w = x + 5\ ,\ l = x + 8$

وطول ضلع المكعب المقتطع x (الأبعاد بالـ cm)

وأصبح حجم المنحوتة يساوي $762\ cm^3$



a أثبت أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة.

b أوجد أبعاد شبه المكعب.

الحل:

a حجم شبه المكعب $V_1 = (x+8)(x+5)(2x+7)$

حجم المكعب المقتطع $V_2 = x^3$

حجم المنحوتة $V = V_1 - V_2 = (x+8)(x+5)(2x+7) - x^3$

نكتب المعادلة $(x+8)(x+5)(2x+7) - x^3 = 762$

بالتبسيط $x^3 + 33x^2 + 171x = 482$

بالتعويض عن x بـ 2: $(2^3) + 33(2)^2 + 171(2) \stackrel{?}{=} 482$

$482 = 482$

∴ $x = 2$ قيمة مقبولة.

للتحقق من أن $x = 2$ هي القيمة الوحيدة المقبولة:

نقسم $x^3 + 33x^2 + 171x - 482$ على $(x - 2)$

للحصول على قيم x المتبقية نستخدم القسمة التركيبية.

2	1	33	171	−482
		2	70	482
	1	35	241	0

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 + 35x + 241$

باستخدام الآلة الحاسبة، جذرا المعادلة التربيعية $x^2 + 35x + 241 = 0$ هما: $x_1 \approx -9.42$, $x_2 \approx -25.58$

وهما يعطيان قيمًا سالبة لطول المكعب.

∴ القيمتان مرفوضتان.

b بالتعويض عن x بـ 2 نحصل على: $h = 11\text{ cm}$, $w = 7\text{ cm}$, $l = 10\text{ cm}$

حاول أن تحل

6 مبنى على شكل شبه مكعب، يعطى حجمه بالعلاقة: $V = x^3 + 4x^2 - x - 4$ إذا كان:

a $(x+4)$ أحد أبعاد المبنى. فأوجد البعدين الآخرين.

b أصغر أبعاد المبنى يساوي 10 m فأوجد البعدين الآخرين.

مثال توضيحي

لتكن: $f(x) = x^2 - 2x - 8$

a أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x-4)$ ثم أوجد $f(+4)$

b أوجد ناتج قسمة $f(x)$ على $(x+1)$ ثم أوجد $f(-1)$

نلاحظ أن $f(x)$ تقبل القسمة على $(x-4)$

أي أن $(x-4)$ أحد عواملها

∴ 4 أحد أصفارها

أي أن $f(4) = 0$

بينما $f(x)$ لا تقبل القسمة على $(x+1)$

أي أن $(x+1)$ ليس من عواملها

∴ (-1) ليس من أصفارها.

لأن $f(-1) = -5$ لا يساوي الصفر وهو باقي القسمة.

نظرية الباقي

إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت، فإن باقي القسمة هو $f(a)$

مثال (7)

باستخدام نظرية الباقي أوجد باقي قسمة

$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$ على $(x + 4)$

ثم تحقق باستخدام القسمة التركيبية.

الحل:

$$f(x) = x^4 - 5x^2 + 4x + 12$$

استخدم نظرية الباقي

$$f(-4) = (-4)^4 - 5(-4)^2 + 4(-4) + 12$$
$$= 256 - 80 - 16 + 12$$
$$= 172$$

$\therefore$ باقي القسمة $= 172$

وللتحقق من صحة الإجابة نستخدم القسمة التركيبية.

$$\begin{array}{r|rrrrr} -4 & 1 & 0 & -5 & 4 & 12 \\ & & -4 & 16 & -44 & 160 \\ \hline & 1 & -4 & 11 & -40 & \boxed{172} \end{array}$$

الباقي

حاول أن تحل

7 استخدم نظرية الباقي لإيجاد باقي قسمة $f(x) = 2x^4 + 6x^3 - 5x^2 - 60$ على $(x + 1)$، ثم تحقق من صحة الإجابة باستخدام القسمة التركيبية.

3-5

حل معادلات كثيرات الحدود
Solving Polynomial Equations

دعنا نفكر ونتناقش

a يبيّن الشكل المقابل بيان الدالة: $f(x) = x^3 + 3x^2$

مثّل بيانيًّا $g(x) = x + 3$ على الشبكة البيانية نفسها.

ثم استخدم الرسم لإيجاد مجموعة حل المعادلة:

$x^3 + 3x^2 = x + 3$

بيانيًّا هناك 3 نقاط تقاطع.

الإحداثيات السينية لنقاط التقاطع:

$-3 \; , \; -1 \; , \; 1$

$\therefore$ للمعادلة $x^3 + 3x^2 = x + 3$ ثلاثة حلول:

$x = -3, \; x = -1, \; x = 1$

$\therefore$ مجموعة الحل: $\{-3, -1, 1\}$

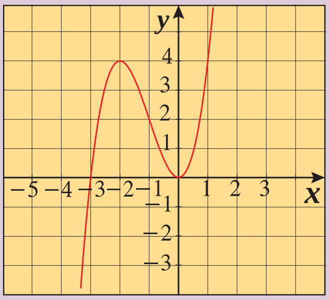
b يمثّل الشكل المقابل بيان الدالة:

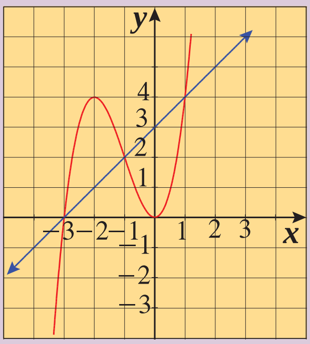
$f(x) = x^3 + 3x^2 - x - 3$

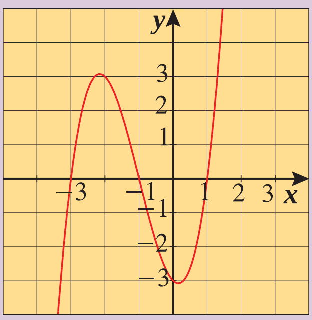
استخدم الشكل لإيجاد مجموعة حل المعادلة:

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$

c قارن بين مجموعتي الحل في **b** , **a** . فسّر.







حل المعادلات بالتحليل Solving Equations by Factorising

عندما تحلل كثيرة الحدود، فإنك تحول شكلها من مجموع (أو فرق) حدود إلى ناتج ضرب عوامل كما هو موضح بالجدول.

الصورة العامة	الصورة بالتحليل (العوامل)
$x^2 - 4x - 12$	$(x + 2)(x - 6)$
$3x^3 - 12x$	$3x\,(x - 2)\,(x + 2)$
$3x^2 + 5x + 2$	$(3x + 2)(x + 1)$
$x^3 + 6x^2 + 11x + 6$	$(x + 1)(x + 2)(x + 3)$

يمكنك حل بعض معادلات كثيرات الحدود بالتحليل واستخدام خاصية الضرب في الصفر أو نظرية العامل.

سوف تتعلم

- حل معادلات كثيرات الحدود بالتحليل.
- حل معادلات كثيرات الحدود بيانيًّا.

المفردات والمصطلحات:

- أصفار نسبية ممكنة
Possible Rational Zeros
- المعامل الرئيسي
Leading Coefficient
- عامل مشترك
Common Factor
- تحليل بالتقسيم
Factorising by Division

الربط بالتكنولوجيا:

يمكنك حل معادلات كثيرة الحدود بواسطة آلة حاسبة بيانية وباستخدام TABLE أو TRACE ثم CALC و ZOOM.

وسوف تساعدك الاختيارات المتاحة بالآلة على إيجاد الحلول.

مثال (1)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$ بالتحليل ثم تحقق من صحة الحل.

الحل:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$

$3x(x^2 + 2x - 3) = 0$ حلّل بإخراج العامل المشترك الأعلى: $3x$

$3x(x+3)(x-1) = 0$ حلّل $x^2 + 2x - 3$

$x = 0, \quad x = -3, \quad x = 1$ استخدم نظرية العامل

مجموعة الحل $= \{1, -3, 0\}$

تحقق:

$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$	$3x^3 + 6x^2 - 9x = 0$
$3(1)^3 + 6(1)^2 - 9(1) \stackrel{?}{=} 0$	$3(-3)^3 + 6(-3)^2 - 9(-3) \stackrel{?}{=} 0$	$3(0)^3 + 6(0)^2 - 9(0) \stackrel{?}{=} 0$
$3 + 6 - 9 \stackrel{?}{=} 0$	$-81 + 54 + 27 \stackrel{?}{=} 0$	
$0 = 0$ ✔	$0 = 0$ ✔	$0 = 0$ ✔

حاول أن تحل

1 **a** أوجد مجموعة حل المعادلة: $4x^3 - 16x^2 - 20x = 0$ بالتحليل. ثم تحقق من صحة الحل.

b تفكير ناقد: صف طريقتين يمكنك بهما حل المعادلة: $2x^3 + 10x^2 + 8x = 0$ أي طريقة تفضل؟ ولماذا؟

لا يتوجب عليك أحيانًا تحليل معادلة كثيرة الحدود من الدرجة الثالثة تحليلًا كاملًا لحلها. فمتى أوجدت عاملًا يمكنك استخدام القانون العام لحل المعادلة التربيعية.

مثال (2)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $2x^3 - 4x^2 = 10x$

الحل:

$2x^3 - 4x^2 = 10x$

$2x^3 - 4x^2 - 10x = 0$ اجعل أحد الطرفين مساويًا للصفر

$2x(x^2 - 2x - 5) = 0$ حلّل

$2x = 0$ أو $x^2 - 2x - 5 = 0$ استخدم خاصية الضرب في الصفر

$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ استخدم القانون العام لتحديد جذور المعادلة: $x^2 - 2x - 5 = 0$

$x = \dfrac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(-5)}}{2(1)}$

$= \dfrac{2 \pm \sqrt{24}}{2}$

$= \dfrac{2 \pm 2\sqrt{6}}{2}$

$= 1 \pm \sqrt{6}$

مجموعة الحل $= \{0, \ 1 + \sqrt{6}, \ 1 - \sqrt{6}\}$

حاول أن تحل

2 أوجد مجموعة حل كل معادلة مما يلي:

a $2x^3 = 3x - 5x^2$

b $x^3 - x^2 - 3x = 0$

يمكن حل بعض معادلات كثيرات الحدود باستخدام التحليل بطريقة التقسيم حيث يمكن تقسيم الحدود بطريقة تساعدنا على تحويل كثيرة الحدود إلى حاصل ضرب عوامل.

مثال (3)

أوجد مجموعة حل المعادلة:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

الحل:

a $x^3 + 3x^2 = x + 3$

$x^3 + 3x^2 - x - 3 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 + 3x^2) + (-x - 3) = 0$

$x^2(x + 3) - (x + 3) = 0$ حلّل بالتقسيم

$(x + 3)(x^2 - 1) = 0$ خذ العامل المشترك $(x + 3)$

$(x + 3)(x + 1)(x - 1) = 0$ حلّل

استخدم خاصية الصفر $x + 3 = 0$ أو $x + 1 = 0$ أو $x - 1 = 0$

$x = -3$ $x = -1$ $x = 1$

مجموعة الحل $= \{-3, 1, -1\}$

b $x^3 - 3x = 6 - 2x^2$

$x^3 - 3x - 6 + 2x^2 = 0$ اجعل أحد الطرفين يساوي الصفر

$(x^3 - 3x) + (-6 + 2x^2) = 0$ خاصية التجميع

$x(x^2 - 3) + 2(x^2 - 3) = 0$ حلّل

$(x^2 - 3)(x + 2) = 0$ خذ العامل المشترك $(x^2 - 3)$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3})(x + 2) = 0$ حلّل

$x = \sqrt{3}$ أو $x = -\sqrt{3}$ أو $x = -2$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{\sqrt{3}, -\sqrt{3}, -2\}$

حاول أن تحل

3 أوجد مجموعة حل المعادلة: $x^3 + 2x^2 - 4x = 8$

تطبيقات حياتية «إثرائي»

يمكن كتابة أبعاد قفص على شكل شبه مكعب لنقل قطة سيامية كما يلي:

الطول $(l = x + 7)$ العمق $(h = x)$

العرض $(w = x + 1)$ بالسنتيمتر (cm).

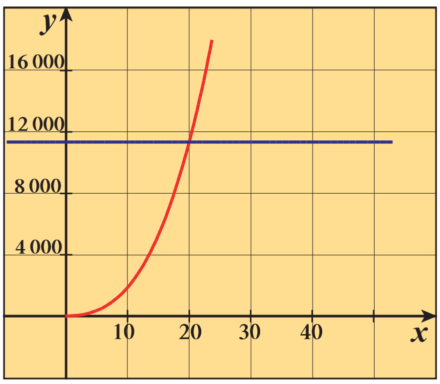
أوجد أبعاد القفص إذا كان حجمه $11340\ \text{cm}^3$

الحل:

اكتب المعادلة $V = l \cdot w \cdot h$

عوّض $11\,340 = (x+7)(x+1)(x)$

ارسم بيانيًّا:



$y_1 = 11\,340\,,\ y_2 = (x+7)(x+1)(x)$

استخدم اختيار التقاطع من الخاصية CALC.

عندما $x = 20\ ,\ y = 11\,340$

$\therefore\ x + 7 = 27\ ,\ x + 1 = 21$

أبعاد القفص هي: $27\ \text{cm}\ ,\ 21\ \text{cm}\ ,\ 20\ \text{cm}$

الأصفار النسبية الممكنة Possible Rational Zeros

نظرية

بفرض أن: $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0\ ;\ a_n \neq 0$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

$\{\frac{a}{b}$: a عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $a_n\}$

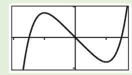
تظهر أهمية هذه النظرية إذا أردنا معرفة أصفار حدودية ولا يمكننا استخدام طريقة التحليل أو التقسيم.

يمكننا تخمين الأصفار النسبية الممكنة باستخدام النظرية ثم نتحقق من هذه الأصفار باستخدام نظرية الباقي.

الربط بالتكنولوجيا:

استخدام الآلة الحاسبة البيانية

• في أعلى الشاشة اضغط على



يظهر على الشاشة:

$y_1 = \square$
$y_2 = \square$
$y_3 = \square$
⋮

لتنشيط y_1 اضغط على المربع إلى يسارها فتظهر في داخله علامة ✓ ثم اكتب في المربع إلى يمين y_1:

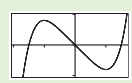
$(x+7)(x)(x+1)$

نشط y_2 بالطريقة نفسها ثم اكتب قرب y_2:

$11\,340$

ثم اضغط على EXE يظهر على الشاشة بيان كل من الدالتين.

اختر من



«Analysis» ثم «G−Solve» ثم «Intercept» فيظهر على الشاشة

$x = 20\ ,\ y = 11\,340$

فمثلًا: لتحديد الأصفار النسبية الممكنة لِـ: $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + x - 6$.

نتبع الخطوات التالية:

أولًا: نحدد عوامل الحد الثابت (6) وهي: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$

ثانيًا: نحدد عوامل المعامل الرئيسي (2) وهي: $\pm 1, \pm 2$

ثالثًا: بتطبيق النظرية تكون الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{3}{2}$

تدريب

الأصفار النسبية الممكنة لِـ:

b $g(x) = x^3 - 27$

هي: ....

a $f(x) = x^3 + 5x - 3$

هي: ....

مثال (4)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

b $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x = 2$

a $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

الحل:

a خطوة 1: $x^3 - 4x^2 + 3 = 0$

عوامل الحد الثابت (3): $\pm 1, \pm 3$

عوامل المعامل الرئيسي (1): ± 1

$\therefore$ الأصفار النسبية الممكنة: $\pm 1, \pm 3$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^3 - 4x^2 + 3$

$P(1) = (1)^3 - 4(1)^2 + 3 = 0$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار الحدودية،

$(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $(x-1)$:

$P(x) = x^3 - 4x^2 + 0x + 3$

$$\begin{array}{r|rrrr} 1 & 1 & -4 & 0 & 3 \\ & & 1 & -3 & -3 \\ \hline & 1 & -3 & -3 & \boxed{0} \end{array}$$

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x - 3$

نحل المعادلة $x^2 - 3x - 3 = 0$ باستخدام القانون

$x_1 = \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}$ ، $x_2 = \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \left\{1, \dfrac{3 - \sqrt{21}}{2}, \dfrac{3 + \sqrt{21}}{2}\right\}$

معلومة:

إذا كان مجموع معاملات حدودية يساوي الصفر فإن 1 هو أحد أصفار الحدودية، $(x-1)$ أحد عواملها.

b خطوة 1: $x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 = 0$

عوامل الحد الثابت (-2) هي: $\pm 1, \pm 2$

عوامل المعامل الرئيسي (1) هي: ± 1

$\therefore$ الأصفار النسبية الممكنة هي: $\pm 1, \pm 2$

خطوة 2: لتكن $P(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$

$P(1) = (1)^4 - 3(1)^3 + (1)^2 + 3(1) - 2 = 0$

$\therefore$ 1 صفر من أصفار $P(x)$ ، $(x-1)$ عامل من عوامل $P(x)$

$P(-1) = (-1)^4 - 3(-1)^3 + (-1)^2 + 3(-1) - 2 = 0$

$\therefore$ -1 صفر من أصفار $P(x)$، $(x+1)$ عامل من عوامل $P(x)$

نقسم: $P(x)$ على $(x-1)(x+1) = x^2 - 1$

نستخدم القسمة المطولة

$$
\begin{array}{r|l}
 & x^2 - 3x + 2 \\
\hline
x^2 - 1 & x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2 \\
 & \underline{-x^4 \qquad\quad \pm x^2} \\
 & \quad -3x^3 + 2x^2 + 3x \\
 & \quad \underline{\pm 3x^3 \qquad\quad \mp 3x} \\
 & \qquad\quad 2x^2 \qquad\quad -2 \\
 & \qquad\quad \underline{-2x^2 \qquad\quad \pm 2} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 0
\end{array}
$$

ناتج القسمة: $q(x) = x^2 - 3x + 2$

نحل المعادلة: $x^2 - 3x + 2 = 0$

$x_1 = 1; \quad x_2 = 2$

مجموعة حل المعادلة $= \{-1, 1, 2\}$

ملاحظة:

لاحظ أن 1 هو صفر مكرر.

حاول أن تحل

4 **a** تفكير ناقد: هل يمكن حل المعادلة في المثال (4) **b** بطرق اخرى؟ وضح ذلك.

b أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

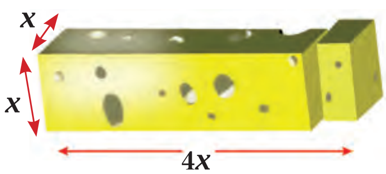
1 $x^3 + x^2 - 4x - 4 = 0$ **2** $x^4 - 3x^3 - 7x^2 + 27x = 18$

المرشد لحل المسائل

اكتب دالة كثيرة الحدود تعبّر عن الحجم. ثم مثّل الدالة بيانيًّا لحل المسألة.

الهندسة: أخذت قطعة من الجبنة بسماكة 2 cm من أحد قوالب الجبنة كما هو مبين في الشكل.

يبلغ حجم القسم الباقي $224\ \text{cm}^3$ أوجد أبعاد قالب الجبنة الأساسي.



كيف تفكّر؟

من الشكل، يبدو أن العمق والارتفاع متساويان في كلتا القطعتين.

أستطيع طرح طول القطعة الصغيرة من طول القالب الأساسي لإيجاد الطول المتبقي.

نستخدم الآلة الحاسبة البيانية في حل المسألة

ماذا تكتب؟

الطول المتبقي $= 4x -$ طول القطعة

$= \quad 4x - 2$

من المعطى، حجم القالب المتبقي $224\ \text{cm}^3$

أستطيع كتابة علاقة، أعوّض ثم أبسّط.

حجم القالب المتبقي = الطول × العرض × الارتفاع

$$V = l \cdot w \cdot h$$
$$224 = (4x-2)(x)(x)$$
$$224 = 4x^3 - 2x^2$$

المعادلة تكعيبية ويطلب إليّ حلّها بيانيًّا.

سأمثل المعادلتين وأجد التقاطع. $y_1 = 4x^3 - 2x^2$, $y_2 = 224$

سأعدل الشاشة لتتناسب مع القيمة $y = 224$

استخدم خاصية التقاطع.

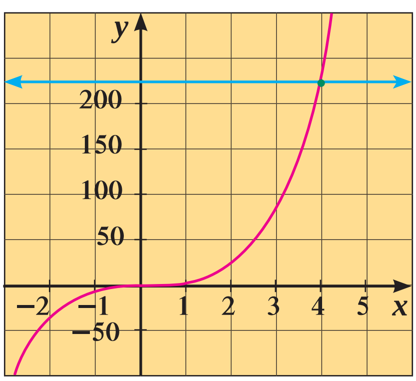
$x = 4$,$y = 224$

استخدم قيمة x لإيجاد أبعاد القالب الأساسي.

العرض = الارتفاع $= x = 4$

الطول $= 4x = 4(4) = 16$

أبعاد قالب الجبنة: 4cm , 4cm , 16cm



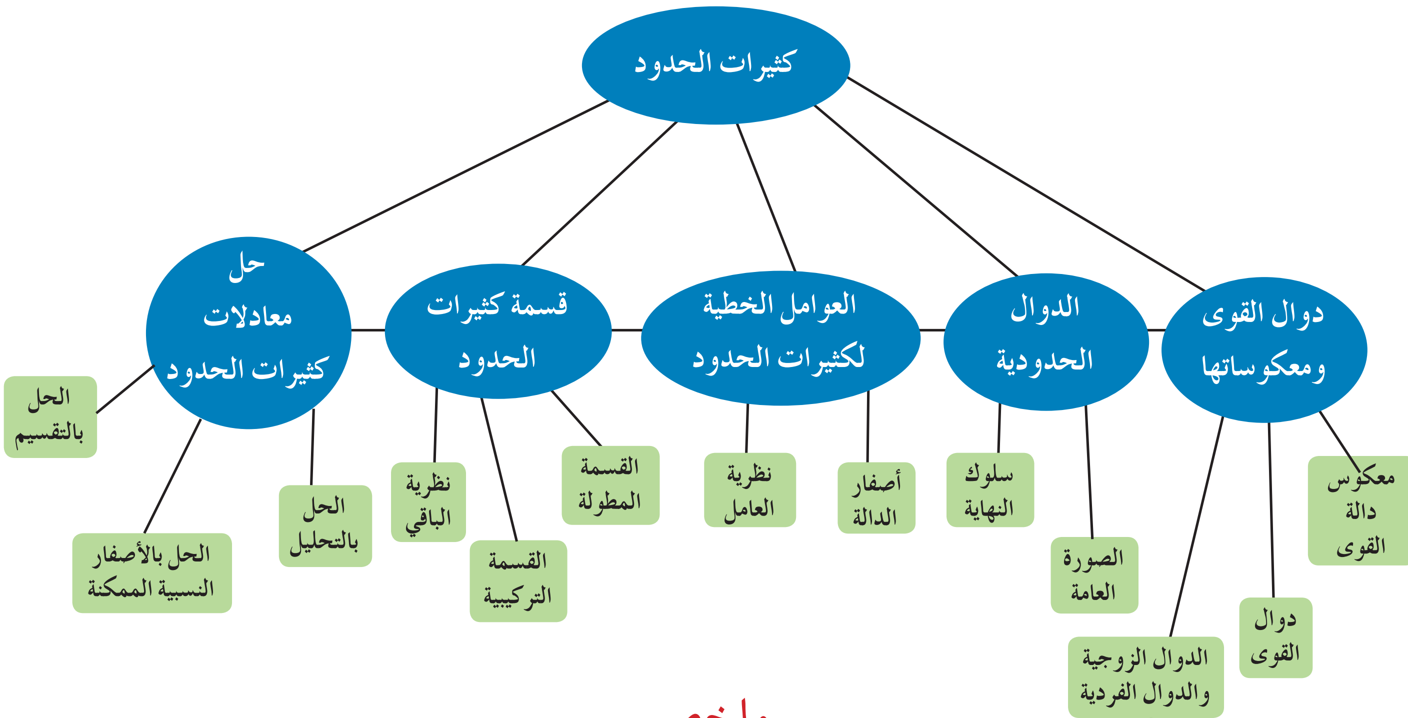
مسألة إضافية

قطعة خشبية مكعبة الشكل (طول ضلعها عدد صحيح)، قصت منها 4 قطع على شكل مكعب بسماكة $\frac{1}{2}$ cm

حجم القطعة المتبقية يساوي $7\,200\ \text{cm}^3$

أوجد طول ضلع قطعة الخشب الأساسية.

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- تكون دالة القوى على الشكل: $y = ax^n$ حيث $n \in \mathbb{Z}^+$, $a \neq 0$
- الدالة الزوجية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $\forall x, -x \in D$, $f(-x) = f(x)$ والعكس صحيح.
- في مستوى إحداثي، المحور الصادي هو محور تماثل لبيان الدوال الزوجية.
- الدالة الفردية هي دالة مجال تعريفها D، تحقق: $\forall x, -x \in D$, $f(-x) = -f(x)$ والعكس صحيح.
- نقطة الأصل هي نقطة تماثل لبيان الدوال الفردية.
- إذا كانت النقطة (a, b) تقع علىبيان دالة ما فإن (b, a) تقع على بيان معكوسها.
- الدالة الحدودية $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ حيث n عدد صحيح غير سالب، $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد حقيقية.
- في الصورة العامة لدالة حدودية ترتب الحدود تنازليًّا وتجمع الحدود المتشابهة.
- يصف سلوك النهاية لرسم بياني امتداد طرفيه الأيمن والأيسر.
- القيمة العظمى هي أكبر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- القيمة الصغرى هي أصغر قيمة لِـ y في فترة محددة.
- المقدار $(x - a)$ هو عامل خطي لكثيرة الحدود إذا وفقط إذا a صفر من أصفار كثيرة حدود.
- إذا قسمت كثيرة الحدود $f(x)$ من الدرجة $n \geq 1$ على $(x - a)$ حيث a ثابت فإن الباقي هو $f(a)$
- بفرض أن $a_n \neq 0$, $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ حيث $a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0$ أعداد صحيحة فتكون مجموعة الأصفار النسبية الممكنة لِـ $f(x)$ هي:

  $\{\frac{a}{b}: a$ عامل من عوامل الحد الثابت a_0، b عامل من عوامل المعامل الرئيسي $a_n\}$

الوحدة الرابعة

الدوال الأسية والدوال اللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Functions

مشروع الوحدة: الآثار المتبقية

1 **مقدمة المشروع:** علماء الآثار هم مجموعة من العلماء يهتمون بدراسة إنجازات الحضارات القديمة من خلال آثارها الباقية. نذكر منها على سبيل المثال المومياوات المصرية الشهيرة التي حفظت منذ حوالى 400 3 سنة ق. م ولا تزال معروضة حتى الآن في المتحف الوطني المصري.

المومياء

2 **الهدف:** في هذه الوحدة، سوف تتحرى طرائق مختلفة لتحديد عمر قطعة أثرية.

3 **اللوازم:** آلة حاسبة علمية.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

إحدى طرائق تأريخ الإبداعات الإنسانية تسمى التأريخ بالكربون المشع.

العناصر التي تمّ سردها في الجدول تمّ اكتشافها داخل المقابر الأثرية.

استخدم العلاقة: $t = 1.904 \times 10^4 \times \log\left(\frac{13.7}{n}\right)$

حيث تمثل "t" عمر العنصر بالسنوات، و"n" عدد انبعاثات أشعة بيتا كل دقيقة لكل جرام من الكربون في العنصر.

العنصر	وزن الكربون بالجرام (g)	انبعاثات أشعة بيتا لكل دقيقة
عظم ماموث	400	1 640 ± 30
شظايا عظمية	15	61.5 ± 1.5
قطعة فخار	25	342 ± 7
فحم نباتي	10	41.0 ± 1.3
قصبة رمح	250	1 020 ± 30

الماموث

a احسب عمر كل عنصر.

b ما الاستثناء في البيانات أعلاه؟ كيف يمكنك تفسيره؟

c التأريخ بالإشعاع الكربوني هي طريقة لاستخدام معلومات عن فترة نصف العمر لنظير ما لتحديد عمر عنصر، للكربون (c − 14) هي 40 ± 730 5 سنة. مقبض فأس فيه 42 g من الكربون (c − 14) يعتقد أنه كان موجودًا منذ حوالى 040 19سنة.
اشرح كيف يمكن لعالم آثار استخدام العلاقة أعلاه لإيجاد معدل انبعاث أشعة بيتا من مقبض الفأس.

5 **التقرير:** ضع تقريرًا مفصلًا حول تنفيذ المشروع مستفيدًا من دروس الوحدة. ضمّن تقريرك صورًا لآثار قديمة وملصقًا ورسومًا بيانية سبق أن استخدمتها.

دروس الوحدة

استكشاف النماذج الأسية	الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا	الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا	خواص اللوغاريتمات	المعادلات الأسية واللوغاريتمية	اللوغاريتم الطبيعي
4−1	4−2	4−3	4−4	4−5	4−6

الوحدة الرابعة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نمذجة الدوال الخطية وحل معادلات خطية.
- تعلمت نمذجة الدوال التربيعية وحل معادلات تربيعية.
- تعلمت نمذجة دوال كثيرات الحدود وحل معادلات كثيرات الحدود.
- تعلمت إيجاد معكوس الدالة وتمثيله بيانيًّا.

ماذا سوف تتعلم؟

- تمثيل النمو الأسي والتضاؤل الأسي.
- تمثيل بيان بعض الدوال الأسية.
- استخدام الرمز e كأساس.
- إيجاد قيمة المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات والأسس لحل معادلات لوغاريتمية.
- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة الأسية.

المصطلحات الأساسية

الدوال الأسية – معامل النمو – معامل التضاؤل – الرمز e – الدوال اللوغاريتمية – اللوغاريتمات المعتادة – المعادلات الأسية – اللوغاريتم الطبيعي.

أضف إلى معلوماتك

تستخدم الدوال الأسية لتمثيل الاضمحلال الإشعاعي في المادة الإشعاعية، ولتمثيل نمو البكتيريا، ولحل المسائل التي تتضمن نموًّا أو تضاؤلًا أسيًّا. فإنك تحتاج إلى معرفة كيفية استخدام الدوال الأسية ومعكوساتها وهي الدوال اللوغاريتمية.

معلومة جغرافية:

جزيرة فيلكا (فيلجا) جزيرة كويتية تبلغ مساحتها $43\ km^2$. تقع في الركن الشمالي الغربي من الخليج العربي وتبعد $20\ km$ عن سواحل مدينة الكويت. تتخذ شكل مثلث قاعدته من الغرب ورأسه في الجنوب الشرقي. يُعتقد أن اسمها مشتق من كلمة إغريقية تعني نقطة تمركز أو موقع بعيد. تُعد أرضها من الأراضي الطينية الصالحة للزراعة.

وفي الجزيرة أيضًا آثار تعود للاسكندر المقدوني ومقام للعبد الصالح الخضر وتلال أثرية تعود إلى الألف الثالث قبل الميلاد. في عام 1973 عثر في الجزيرة على «حجر سويتلس» منقوش عليه باللغة اليونانية وإثر هذا الاكتشاف بدأت عمليات التنقيب عن الآثار مما أظهر ارتباط الجزيرة بحضارة دلمون تلك الحضارة التي كانت تضم البحرين والساحل الشرقي لشبه الجزيرة العربية.

استكشاف النماذج الأسية
Exploring Exponential Models

سوف تتعلم
- تمثيل النمو الأسي.
- تمثيل التضاؤل الأسي.

المفردات والمصطلحات:
- الدوال الأسية Exponential Functions
- عامل النمو Growth Factor
- عامل التضاؤل Decay Factor
- النسبة المئوية للتغير Percent of Change
- نمو أسي Exponential Growth
- تضاؤل أسي Exponential Decay
- عامل التغير Variation Factor
- معدل التغير Rate of Change

عمل تعاوني

تقام في دولة الكويت مسابقات لكرة قدم الصالات ويشترك فيها 64 فريقًا مختلفًا، على أن يستبعد الفريق الخاسر من المنافسة في كل مباراة.

1 اعمل مع زميل لك لتحديد عدد الفرق المتبقية في المسابقة بعد الدور الأول من المسابقة.

2 a أكمل الجدول حتى يتبقى فريق واحد.

بعد الدور (x)	عدد الفرق المتبقية في المسابقة (y)
0	64
1	
2	
⋮	⋮

b كم دورًا يجب لعبه حتى نهاية المسابقة؟

3 عيّن النقاط (x, y) من جدولك على ورقة رسم بياني.

4 هل الرسم البياني يمثل دالة خطية؟ فسّر إجابتك.

5 كيف تقارن عدد الفرق المتبقية في كل دور بعدد الفرق في الدور الذي يسبقه؟

استخدام الدوال الأسية Using Exponential Functions

تعتبر الدالة التي تمثل عدد الفرق المتبقية في مسابقة كرة قدم الصالات بعد كل دورة مثالًا على الدالة الأسية.

الدالة:

$y = ab^x$ $\forall x \in \mathbb{R}$

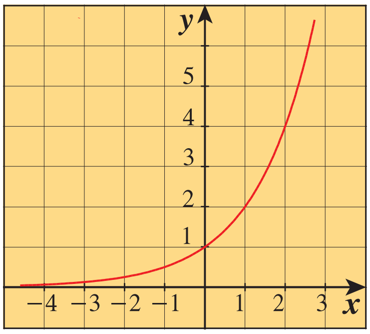
(عدد ثابت) $a \in \mathbb{R}^*$

(الأساس) $b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

تسمى دالة أسية.

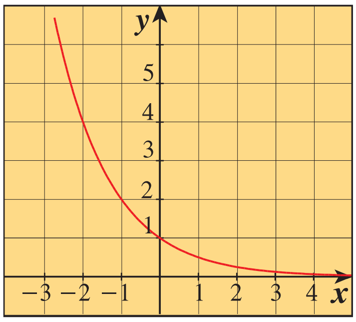
الدالة الأسية التي فيها $a > 0$ يمكن أن تستخدم كنموذج للنمو أو للتضاؤل معتمدًا على قيمة b، كالتالي:

نمو أسي



عندما تكون $b > 1$، فإن الدالة تمثل نموًّا أسيًّا، وتكون b هي عامل النمو.

تضاؤل أسي



عندما تكون $0 < b < 1$، فإن الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا، وتكون b هي عامل التضاؤل.

مثال (1)

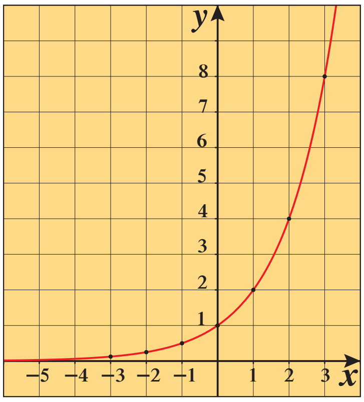
مثّل بيانيًّا الدالة $y = 2^x$. ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	2^x	y
-3	2^{-3}	0.125
-2	2^{-2}	0.25
-1	2^{-1}	0.5
0	2^0	1
1	2^1	2
2	2^2	4
3	2^3	8

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الإحداثيات. صل بين النقاط بمنحنى.



$\because\ b = 2$

$\therefore\ b > 1$

$\therefore$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا

$\therefore$ عامل النمو: $b = 2$

حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًّا كلًّا من الدوال التالية، ثم بيّن ما إذا كانت تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

a $y = 4(2)^x$

b $y = 3^x$

مثال (2)

مثّل بيانيًّا الدالة $y = 4\left(\frac{1}{2}\right)^x$

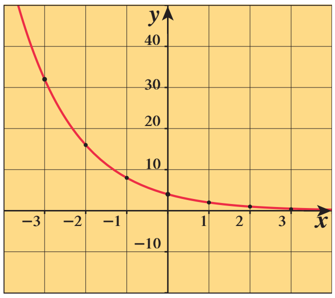
ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	32	16	8	4	2	1	0.5

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الإحداثيات.



صل بين النقاط بمنحنى.

$\because b = \frac{1}{2}$

$\therefore 0 < b < 1$

$\therefore$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا

$\therefore$ عامل التضاؤل: $b = \frac{1}{2}$

حاول أن تحل

2 مثّل بيانيًّا ثم بيّن ما إذا كانت الدالة تمثل نموًّا أسيًّا أو تضاؤلًا أسيًّا وحدّد العامل.

a $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$ **b** $y = 2(0.1)^x$

تدريب

1 اكتب دالة تمثل نموًّا أسيًّا.

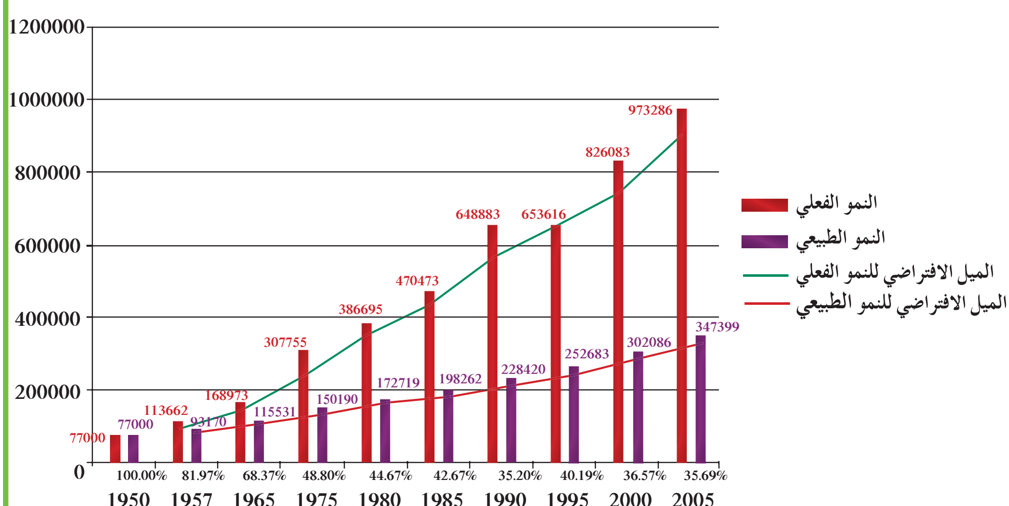
2 اكتب دالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا.

يمكنك استخدام الدوال الأسية $y = ab^x$ لنمذجة التغير السكاني إذا عرفت معدل التغير I.
يمكنك إيجاد عامل النمو b باستخدام المعادلة: $b = 1 + \text{I}$.

معلومة:
معدل التغير I قد يكون معدل تزايد أو معدل تناقص.

مثال (3)

يقدر معدل التزايد السكاني في دولة الكويت من المواطنين بـ 2.44%



تحليل النمو السكاني لدولة الكويت
موقع تاريخ الكويت

a أوجد عامل النمو.

b كوّن الدالة الأسية التي تنمذج التغير السكاني حيث بلغ عدد سكان الكويت من المواطنين 598 038 1 مواطنًا في سنة 2007.
(المصدر: الإدارة المركزية للإحصاء).

c إذا افترضنا أن معدل التزايد ثابت، فكم سيكون عدد سكان الكويت من المواطنين سنة 2013؟

الحل:

a عامل النمو:

$\left(I = 2.44\% = \frac{2.44}{100} = 0.0244\right)$

$$b = 1 + I$$
$$= 1 + 0.0244$$
$$\therefore \; b = 1.0244$$

b يتزايد السكان أسيًّا لذلك نستخدم الدالة الأسية $y = ab^x$،
حيث x عدد السنوات بعد 2007، y عدد السكان بالمليون.

أي أن:

$y = a(1.0244)^x$

(عدد السكان سنة 2007) $y = 1\ 038\ 598$

عندما $x = 0$ (سنة البدء 2007) $1\ 038\ 598 = a(1.0244)^0$

أي عدد غير صفري مرفوع للأس صفر يساوي واحد $1\ 038\ 598 = a \times 1$

$a = 1\ 038\ 598$

$\therefore$ دالة التغير السكاني هي: $y = 1\ 038\ 598(1.0244)^x$

c سنة 2013 هي السنة السادسة $y = 1\ 038\ 598(1.0244)^6$

أي أن $x = 6$ $y \approx 1\ 200\ 231$

من المتوقع أن يصبح عدد مواطني الكويت مليون ومئتي ألف و231 نسمة في سنة 2013.

حاول أن تحل

3 من المعلومات في مثال (3)

a إذا بقي معدل التزايد ثابتًا، فكم تتوقع أن يكون عدد مواطني الكويت سنة 2017؟

b التفكير الناقد: لماذا قد لا يكون التوقع صحيحًا لسنة 2017؟

يمكن كتابة دالة أسية بمعلومية نقطتين على رسمها البياني.

مثال (4)

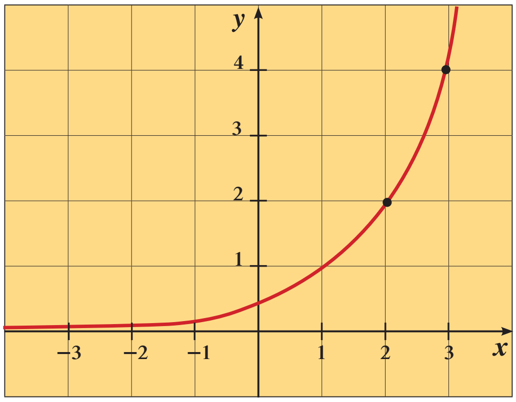
اكتب دالة أسية: $y = ab^x$، يمر بيانها بالنقطتين: $P(2,2)$, $Q(3,4)$

الحل:

استخدم الدالة الأسية $y = ab^x$

عوّض عن (x, y) بـ $(2, 2)$ $ab^2 = 2$

اقسم على b^2	$\frac{2}{b^2} = a$
عوّض عن (x, y) بـ $(3, 4)$	$4 = ab^3$
عوّض عن a بـ $\frac{2}{b^2}$	$4 = \frac{2}{b^2} b^3$
خاصية قسمة الأسس	$4 = 2b^{3-2}$
بسّط	$4 = 2b$
	$b = 2$
	$a = \frac{2}{b^2}$
عوّض عن b بـ 2	$\therefore a = \frac{2}{2^2}$
بسّط	$a = \frac{1}{2}$
	$\therefore y = \frac{1}{2}(2)^x$



الدالة الأسية التي يمر بيانها بالنقطتين $(2, 2)$، $(3, 4)$، هي: $y = \frac{1}{2}(2)^x$.

حاول أن تحل

4 اكتب دالة أسية بالصورة $y = ab^x$ يمر بيانها بالنقطتين: $S(3, 16)$ ، $H(2, 4)$

انخفاض (تضاؤل) القيمة: هو نقص قيمة سلعة ما نتيجة الزمن t أو استهلاكها. عندما تفقد السلعة تقريبًا النسبة المئوية نفسها من قيمتها كل عام، فإنه يمكنك استخدام دالة أسية لتمثيل انخفاض القيمة.

النسبة المئوية للتغير $= \frac{\text{مقدار التغير}}{\text{القيمة الابتدائية}} \times 100\%$

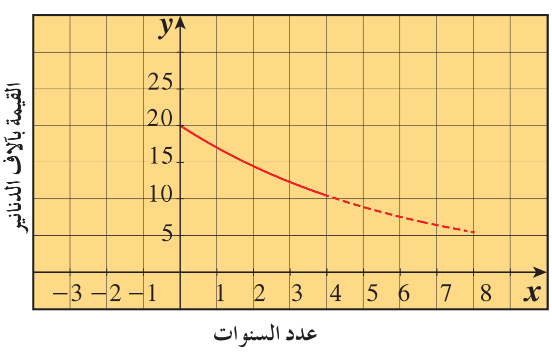
علمًا أن مقدار التغير = القيمة النهائية − القيمة الابتدائية.

مثال (5)

يبيّن التمثيل البياني الأسي المقابل الانخفاض (التناقص) في قيمة سيارة خلال 4 سنوات.

a قدّر النسبة المئوية لانخفاض قيمة السيارة في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان لتقدير قيمة السيارة في نهاية السنة السادسة.



الحل:

a من الشكل القيمة الابتدائية للسيارة 20000 دينار.

بعد سنة واحدة تصبح قيمتها حوالى 17000 دينار.

نسبة التغير $= \dfrac{\text{القيمة النهائية} - \text{القيمة الابتدائية}}{\text{القيمة الابتدائية}}$

$$\text{Decay Ratio} = \frac{17\,000 - 20\,000}{20\,000}$$
$$= -0.15$$

النسبة المئوية للتغير: $-0.15 \times 100\% = -15\%$

تنخفض قيمة السيارة بمقدار 15% في العام الأول.

b نستخدم الدالة الأسية: $y = ab^x$ لتقدير قيمة السيارة بعد 6 سنوات،

حيث (x) عدد السنوات، (y) قيمة السيارة بالدينار، b هو عامل الانخفاض (التضاؤل).

$\therefore$ عامل الانخفاض $b = 1 + \mathrm{I}$، حيث I معدل التغير.

عامل الانخفاض: $b = 1 - 0.15 = 0.85$

عوّض عن y بـ 20 000، عن x بـ 0 — $20\,000 = a(0.85)^0$

$a = 20\,000$

$\therefore y = 20\,000(0.85)^x$

عوّض عن x بـ 6 — $y = 20\,000(0.85)^6$

بسّط — $y \approx 7\,542.99$

تصبح قيمة السيارة بعد 6 سنوات حوالى 7540 دينارًا.

حاول أن تحل

5 يبيّن التمثيل البياني الأسي أدناه الانخفاض (التناقص) في قيمة حاسوب خلال 4 سنوات.

a قدّر النسبة المئوية للانخفاض في نهاية السنة الأولى.

b كوّن دالة أسية $y = ab^x$ يمكن أن يمثلها هذا البيان ثم استخدمها لتقدير قيمة الحاسوب في نهاية السنة الرابعة.

الدوال الأسية وتمثيلها بيانيًّا

Exponential Functions and their Graphs

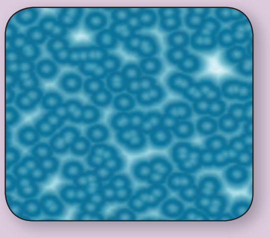
سوف تتعلم

- التمثيل البياني لبعض الدوال الأسية.
- تحديد دور الثوابت في الدوال الأسية.
- استخدام e كأساس.

المفردات والمصطلحات:

- انعكاس Reflexion
- انسحاب Translation

عمل تعاوني نمو البكتيريا



ليكن $f(t)$ عدد البكتيريا (بالآلاف) في اللحظة t (بالساعات) حيث $f(t) = a \cdot b^t$. من خلال الملاحظة توصلنا إلى ما يلي:

- $f(0) = 1$
- يتضاعف عدد البكتيريا كل ساعة.
- على فترات زمنية متساوية، عامل النمو هو نفسه.

a أوجد عامل النمو على فترة نصف ساعة، وعلى فترة ربع ساعة.

b أكمل الجدول التالي: (قرّب الإجابات إلى أقرب جزء من مئة)

t	0	0.25	0.50	0.75	1	1.25	1.50	1.75	2	2.25	2.50	2.75	3	3.25	3.50	3.75	4
$f(t)$	1				2				4				8				16

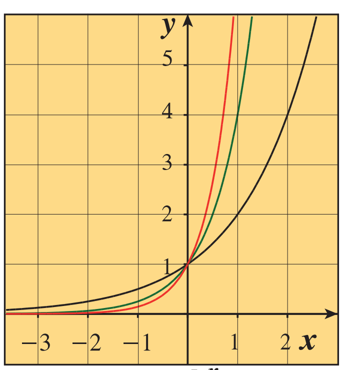
c ضع رسمًا بيانيًّا يمثل نمو البكتيريا خلال الساعات الأربع.

d استخدم آلة حاسبة علمية لمقارنة قيم $f(t)$ في الجدول مع قيم $g(t) = 2^t$ ماذا تلاحظ؟

التمثيل البياني للدوال الأسية Graphing Exponential Functions

يمكن دراسة تأثير القيم المختلفة لكل من a, b على الدالة الأسية $y = ab^x$ حيث $a \neq 0$، $b > 0$, $b \neq 1$ باستخدام الرسوم البيانية كالتالي:

أولًا: عندما a موجب

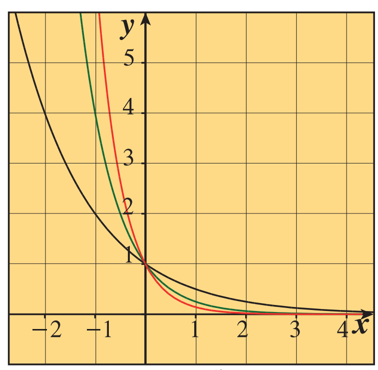


$y = b^x$

(1) $y = 2^x$

(2) $y = 4^x$

(3) $y = 7^x$



$y = b^{-x}$

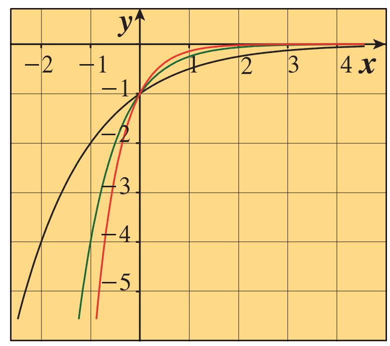
(4) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2)^{-x}$

(5) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x = (4)^{-x}$

(6) $y = \left(\frac{1}{7}\right)^x = (7)^{-x}$

نلاحظ أن بيان الدالة $y = b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور الصادي.

ثانيًا: عندما a سالب

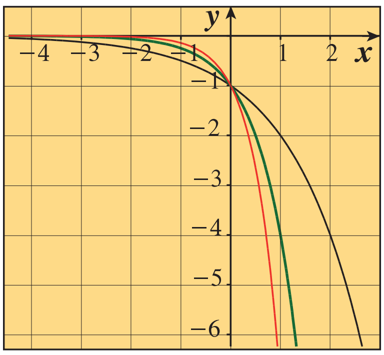


$y = -b^{-x}$

(4) $y = -\left(\frac{1}{2}\right)^x = -(2)^{-x}$

(5) $y = -\left(\frac{1}{4}\right)^x = -(4)^{-x}$

(6) $y = -\left(\frac{1}{7}\right)^x = -(7)^{-x}$



$y = -b^x$

(1) $y = -2^x$

(2) $y = -4^x$

(3) $y = -7^x$

نلاحظ أيضًا أن بيان الدالة $y = -b^{-x}$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = -b^x$ في المحور الصادي.

ملاحظة: من أولًا وثانيًا نلاحظ أن بيان الدالة $y = -b^x$ حيث $b \neq 1$, $b > 0$ ينتج من انعكاس لبيان الدالة $y = b^x$ في المحور السيني.

مثال (1)

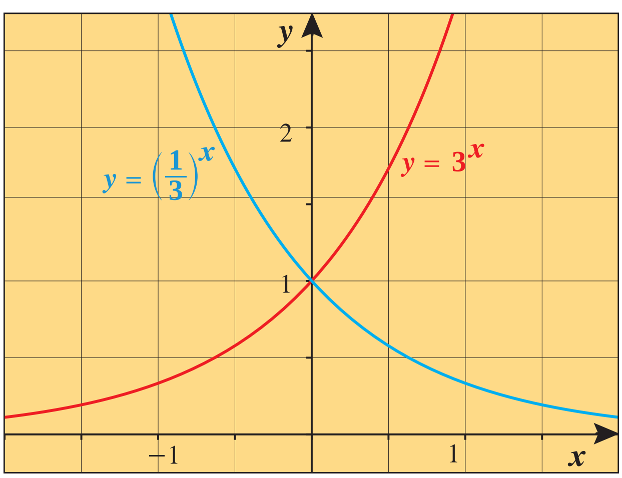
مثّل بيانيًا كل من: $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$, $y = 3^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	$y = 3^x$	$y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$
−2	0.111	9
−1	0.333	3
0	1	1
1	3	0.333
2	9	0.111
3	27	0.037

الخطوة 2: مثّل بيانيًا الدالتين.



حاول أن تحل

1 مثّل بيانيًا كلًّا من: $y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$, $y = 5^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

مثال (2)

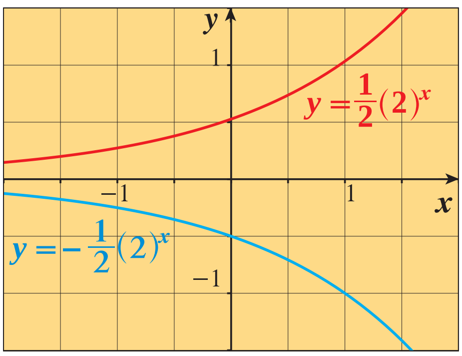
مثّل بيانيًّا كلًّا من: $y=-\frac{1}{2}(2)^x$, $y=\frac{1}{2}(2)^x$ في نفس المستوى الإحداثي.

الحل:

الخطوة 1: اصنع جدول قيم.

x	$y=\frac{1}{2}(2)^x$	$y=-\frac{1}{2}(2)^x$
-2	$\frac{1}{8}$	$-\frac{1}{8}$
-1	$\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$
0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	1	-1
2	2	-2
3	4	-4

الخطوة 2: مثّل بيانيًّا الدالتين.



حاول أن تحل

2 a مثّل بيانيًّا في نفس المستوى الإحداثي.

1 $y=-4(2)^x$

2 $y=4(2)^x$

b ماذا تلاحظ بين بياني كلٍّ من الدالتين في a .

يمكنك تمثيل بيان العديد من الدوال الأسية وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع $y=ab^x$، حيث $b\neq 1$, $b>0$، $a\neq 0$.
التمثيل البياني للدالة: $y=a(b)^{x-h}+k$، هو **انسحاب** لبيان الدالة $y=ab^x$ بمقدار h وحدة أفقيًّا، k وحدة رأسيًّا.

مثال (3)

مثّل بيانيًّا الدالة: $y_1=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$ ومنها مثّل بيانيًّا الدالة: $y_2=8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2}+3$

الحل:

الخطوة 1:

جدول قيم الدالة $y_1=f_1(x)=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

x	0	1	2	3	4	5	6
$f_1(x)$	8	4	2	1	0.5	0.25	0.125

مثّل بيانيًّا: $f_1(x)=8\left(\frac{1}{2}\right)^x$

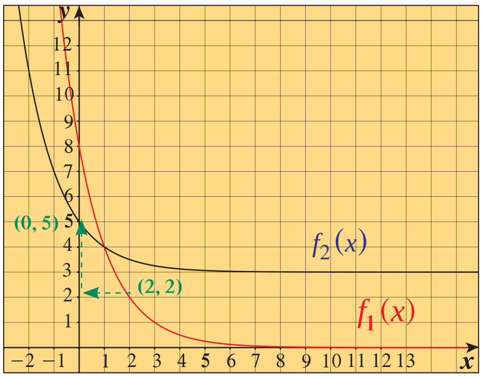
الخطوة 2:

لرسم بيان الدالة: $y_2 = f_2(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x+2} + 3$

حيث $h = -2$, $k = 3$

اسحب بيان دالة المرجع: $f_1(x) = 8\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$

وحدتين إلى جهة اليسار و3 وحدات إلى الأعلى.



حاول أن تحل

3 مثّل كل دالة مما يلي وذلك بانسحاب لبيان دالة المرجع: $y = 2(3)^x$

a $y_1 = 2(3)^{x+1}$

b $y_2 = 2(3)^x - 4$

c $y_3 = 2(3)^{x-3} + 1$

بعض الدوال الأسية هي على الصورة: $y = ab^{rx}$، حيث r ثابت، $r \neq 0$

مثال (4)

مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

الحل:

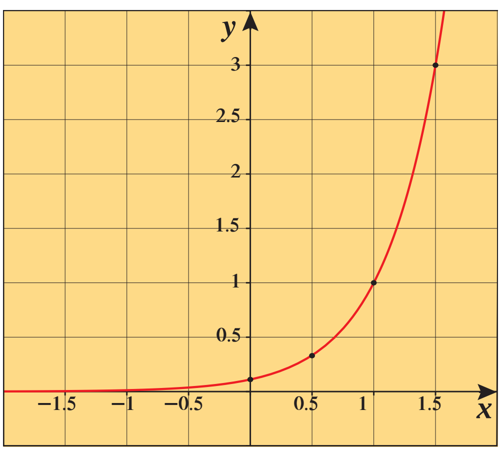
جدول قيم الدالة:

$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$

x	0	0.5	1	1.5	2	2.5
$f(x)$	0.11	0.33	1	3	9	27

مثّل بيانيًا:

$f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x}$



حاول أن تحل

4 مثّل بيانيًا الدالة: $f(x) = \frac{1}{9}(3)^{2x} - 1$

تطبيق إثرائي (الطب)

فترة نصف العمر لمادة مشعة هو الوقت الذي تستغرقه المادة في تضاؤل أو تحلل نصفها. لنفرض أن إحدى المستشفيات تحضر 100 mg مزودة بتكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$، حيث فترة نصف عمره 6 ساعات.

a ضع جدولًا يوضح كمية التكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$ المتبقية في نهاية كل فترة 6 ساعات لمدة 36 ساعة.

b اكتب معادلة لوصف الدالة الأسية.

c استخدم الدالة لإيجاد كمية التكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$ المتبقية بعد 75 ساعة.

الحل:

a كمية التكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$ تقل بمقدار النصف كل 6 ساعات.

عدد مرات نصف العمر $(6\,h)$	عدد الساعات المستغرق	تكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$ الكمية الحالية (mg)
0	0	100
1	6	50
2	12	25
3	18	12.5
4	24	6.25
5	30	3.125
6	36	1.5625

b الكمية الابتدائية للتكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$ هي 100 mg

عامل التضاؤل هو $b = \frac{1}{2}$، نصف العمر 6 h

افرض أن: y تمثل كمية التكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$

(x) عدد الساعات المستغرق ، $\left(\frac{1}{6}\right)x$ عدد أنصاف العمر.

اكتب: $y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$

c

$$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}x}$$

عوّض عن x بـ 75

$$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{6}\times 75}$$

بسّط

$$y = 100\left(\frac{1}{2}\right)^{12.5}$$

$$\approx 0.01726$$

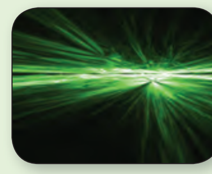
تبلغ كمية التكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$ المتبقية بعد 75 h حوالي 0.017 mg

الكيمياء

التكنيشيوم Technetium $(Tc - 99\,m)$ هو مادة مشعة. كثيرًا ما تستخدم لتشخيص أمراض الغدد الدرقية، والمخ، والكبد، والكلى.

أشعة جاما

عندما يتحلل التكنيشيوم $(Tc - 99\,m)$ تنبعث طاقة منخفضة من أشعة جاما.



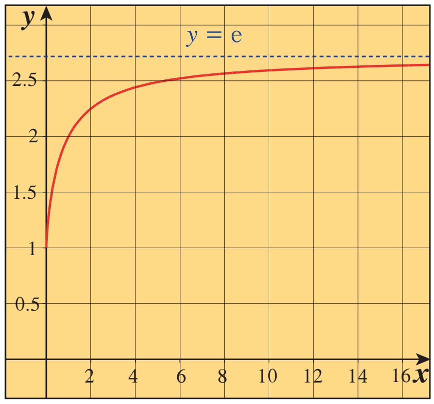
الرمز e — Symbol e

معلومة:
أول من استخدم الرمز e هو الرياضي السويسري أويلر في العام 1748. وقد عرّف الدالة الأسية على أنها معكوس دالة اللوغاريتم الطبيعي.

التمثيل البياني أدناه هو جزء من بيان الدالة: $y = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$.

عندما يأخذ x قيمًا أكبر فأكبر تقترب قيم y من 2.718 هذه القيمة تسمّى e وهو عدد غير نسبي ويساوي تقريبًا 2.71828 تستخدم الدوال الأسية التي أساسها e لوصف النمو (التزايد) أو التضاؤل (التناقص) المستمر. وفي آلتك الحاسبة يوجد مفتاح $\boxed{e}$ أو $\boxed{e^x}$ أو $\boxed{e^{\square}}$.

x	$f(x)$
2	2.25
4	2.4414
6	2.5216
8	2.5658
10	2.5937
12	2.613
14	2.6272
16	2.6379



مثال (5)

a استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد القيم التالية (مقربًا الناتج إلى أقرب جزء من ألف):

$e^2, \quad e^{-1}, \quad e^{\frac{1}{3}}, \quad e^{\frac{3}{4}}, \quad 4e^{-1.5}$

b ارسم بيان: $y = e^x$

الحل:

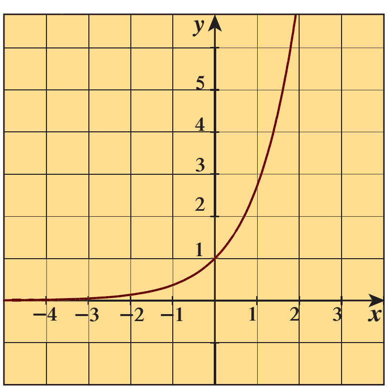
a $e^2 \approx 7.389$ $\quad e^{-1} \approx 0.368$ $\quad e^{\frac{1}{3}} \approx 1.396$

$e^{\frac{3}{4}} \approx 2.117$ $\quad 4e^{-1.5} \approx 0.893$

b جدول قيم $y = e^x$

x	-2	-1	0	1	2	3
$y = e^x$	0.135	0.37	1	2.718	7.39	20

بيان الدالة $y = e^x$



حاول أن تحل

5 استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد قيم كل مما يلي:

(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

a e^4 $\quad$ **b** e^{-3} $\quad$ **c** $e^{\frac{1}{2}}$

4-3

الدوال اللوغاريتمية وتمثيلها بيانيًّا

Logarithmic Functions and their Graphs

سوف تتعلم

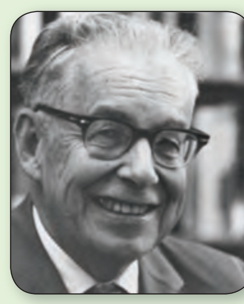
- استخدام رموز اللوغاريتمات.
- إيجاد قيم المقادير اللوغاريتمية.
- تمثيل الدوال اللوغاريتمية بيانيًّا.

المفردات والمصطلحات:

- مقادير لوغاريتمية Logarithmic Expressions
- اللوغاريتمات المعتادة Common Logarithms
- الدوال اللوغاريتمية Logarithmic Functions

معلومة:

لم يكن تشارلز ريختر (Charles F. Richter) (1900–1985) راضيًا عن مقياس روسي (Rossi) الذي يعود للعام 1880 ولم يكن راضيًا أيضًا عن مقياس مركالي (Mercalli) الذي يعود للعام 1902 لذلك اقترح عام 1935 مقياسه الشهير لقياس قوة الزلازل. في العام 1977 اقترح هيروكاناموري مقياسًا جديدًا أكثر تطورًا لقياس قوة الزلازل.
أقوى زلزال سجل على مقياس ريختر هو زلزال التشيلي في 22 مايو 1960.



تشارلز ريختر

عمل تعاوني

1 باستخدام الدالة الأسية $y = 10^x$، أكمل الجدول التالي:

x	0	1	2	3	4	5	6	7
y								

2 لكل زيادة وحدة في x، صف الزيادة المناظرة في y.

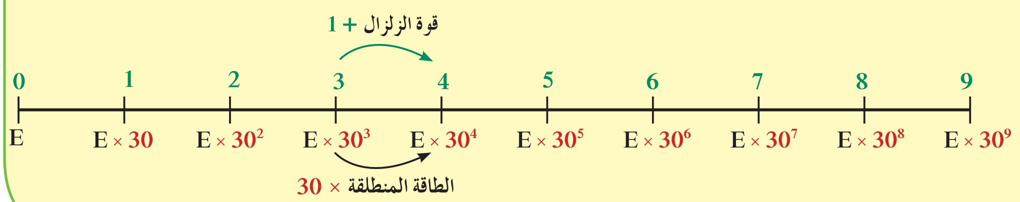
3 صف الزيادة في y إذا كانت x تتزايد بمقدار 1.5؛ بمقدار 0.5

كتابة المقادير اللوغاريتمية وحسابها

Writing and Calculating Logarithmic Expressions

قوة الزلزال هي قياس كمية الطاقة المنطلقة (E). يقيس مقياس ريختر قوة الزلازل باستخدام الصورة الأسية فمثلًا الزلزال الذي تبلغ قوته 5 درجات بمقياس ريختر طاقته المنطلقة (E) تساوي $30 \times$ الطاقة المنطلقة من الزلزال الذي قوته 4 درجات.

مقياس ريختر



مثال (1)

سجل زلزال مكسيكو سنة 1995 بقوة 8.0 درجات على مقياس ريختر.
وقد سجل أيضًا زلزال في واشنطن سنة 2011 بقوة 6.8 درجات.
كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو أكبر من كمية الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن؟
(إرشاد: استعن بمقياس ريختر)

الحل:

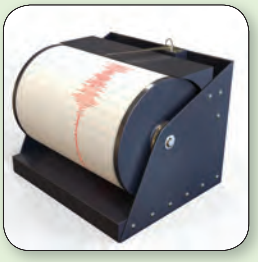
$\because$ قوة زلزال مكسيكو 8 درجات.

$\therefore$ الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو $= E \times 30^8$

$\because$ قوة زلزال واشنطن 6.8 درجات.

$\therefore$ الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن $= E \times 30^{6.8}$

السيزموغراف
Seismograph
السيزموغراف (أو مقياس الزلازل) هو جهاز قياس مزود بلاقط يقوم برصد وتسجيل حركات الأرض.
أثناء الزلزال يهتز الجهاز ويسجل على أسطوانة من الورق تموجات لها شكل الموجات الزلزالية.



الطاقة المنطلقة من زلزال مكسيكو = $x \times$ الطاقة المنطلقة من زلزال واشنطن.

$$(\mathrm{E} \times 30^{6.8}) \times x = \mathrm{E} \times 30^{8}$$

$$x = \frac{\mathrm{E} \times 30^{8}}{\mathrm{E} \times 30^{6.8}}$$

$$x = \frac{30^{8}}{30^{6.8}}$$

$$= 30^{1.2}$$

$$\approx 59.2$$

$\therefore$ أطلق زلزال مكسيكو طاقة تساوي 59.2 مرة تقريبًا من طاقة زلزال واشنطن.

حاول أن تحل

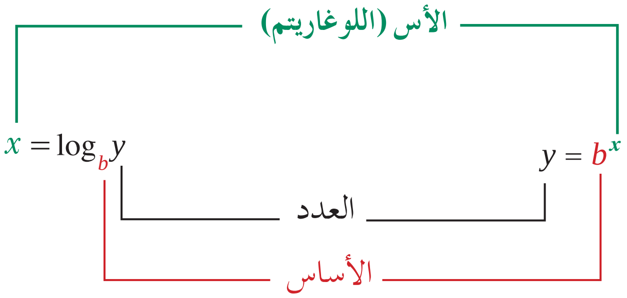
1 كم مرة تكون الطاقة المنطلقة من زلزال قوته 7 درجات أكبر من الطاقة المنطلقة من زلزال آخر قوته 4.9 درجات على مقياس ريختر؟

في الصورة الأسية $y = b^x$، b هو الأساس، x هو الأس، y هو الناتج.
للحصول على قيمة الأس x بمعلومية الأساس b والناتج y نستخدم ما يعرف **بالصورة اللوغاريتمية**.
حيث x تساوي لوغاريتم العدد y للأساس b ويرمز للوغاريتم بالرمز (log) ويكتب على الصورة $x = \log_b y$.

تدريب

أكمل الجدول التالي:

الصورة الأسية	الصورة اللوغاريتمية
$7^2 = 49$	$\log_7 49 = 2$
$10^3 = 1\,000$	$\log_{10} \ldots = \ldots$
$3^5 = 243$	$\log_3 \ldots = \ldots$
$4^{\cdots} = \ldots$	$\log_4 2 = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$	
...	$\log_5 \frac{1}{25} = -2$
$12^0 = 1$	...



ملاحظة: تعلم أن: $1 = 1^1 = 1^2 = 1^3 = 1^4 = \dots = 1^n \ (n \in \mathbb{N})$

وهذا يعني أن: $\log_1 1^1 = 1,\ \log_1 1^2 = 2,\ \log_1 1^3 = 3\ \dots$

ولذلك $\log_1 y$ غير معيّن لأنه ليس وحيدًا.

تعريف

$\forall y \in \mathbb{R}^+ \quad , \ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

يتعين عدد حقيقي x بحيث يكون: $y = b^x \iff \log_b y = x$

تذكر: الرمز ⇔ يقرأ (إذا وفقط إذا)

لإيجاد قيمة اللوغاريتمات، يمكنك كتابتها في صورة أسية.

مثال (2)

أوجد قيمة $\log_8 16$.

الحل:

افرض أن $\log_8 16 = x$

حوّل إلى صورة أسية $16 = 8^x$

اكتب كلًّا من الطرفين بالأساس 2 $2^4 = 2^{3x}$

اكتب الأسس في تساوٍ $4 = 3x$

$x = \frac{4}{3}$

$\therefore \log_8 16 = \frac{4}{3}$

حاول أن تحل

2 أوجد قيمة كل لوغاريتم مما يلي:

a $\log_{10} 100$ b $\log_9 27$ c $\log_{64} \frac{1}{32}$

ملاحظة:

$\log x$ هو اللوغاريتم المعتاد ذو الأساس 10 أي: $\log_{10} x$ تكتب $\log x$

فمثلًا: $\log_{10} 4 = \log 4$

مثال (3) الترابط

يستخدم العلماء اللوغاريتمات لقياس الحموضة pH.

وهي تتزايد مع تزايد تركيز أيون الهيدروجين $[H^+]$ في المادة.

pH لمادة يساوي $(-\log[H^+])$.

يبلغ pH عصير الليمون 2.3، في حين يبلغ pH الحليب 6.6

أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية في كل مادة. أي مادة هي الأكثر حموضة؟

الحل:

تركيز أيونات الهيدروجين في عصير الليمون

$pH = -\log[H^+]$

$2.3 = -\log[H^+]$

$\log[H^+] = -2.3$

$[H^+] = 10^{-2.3}$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\approx 5 \times 10^{-3}$ باستخدام الآلة الحاسبة

تركيز أيونات الهيدروجين في الحليب

$pH = -\log[H^+]$

$6.6 = -\log[H^+]$

$\log[H^+] = -6.6$

$[H^+] = 10^{-6.6}$

$\approx 2.5 \times 10^{-7}$

$\because\ 5 \times 10^{-3} > 2.5 \times 10^{-7}$

$\therefore$ تركيز أيونات الهيدروجين في العصير أكثر منه في الحليب.

$\therefore$ عصير الليمون أكثر حموضة.

حاول أن تحل

3 أوجد تركيز أيونات الهيدروجين بالصورة العلمية لشراب القيقب (Maple Syrup)، حيث $pH = 5.2$.

التمثيل البياني للدوال اللوغاريتمية Graphing Logarithmic Functions

الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.

تعريف: الدالة اللوغاريتمية

$\forall x > 0\ ,\ b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$

فإن الدالة: $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},\ f(x) = \log_b x$

تسمى دالة لوغاريتمية أساسها b

مثال (4)

أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = \log_5(6x)$

b $f(x) = \log(3 - x)$

c $g(x) = \log_2(x^2)$

d $h(x) = 4\log_3(5 - 3x)$

الحل:

a $\because\ 6x > 0 \Rightarrow x > 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (0, +\infty)$

b $\because\ 3 - x > 0 \Rightarrow x < 3$

$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 3)$

معلومة:

شراب القيقب أو الأسفندن (Maple Syrup) هو شراب مصنوع من نسغ (عصارة) أشجار القيقب السكري التي تنبت بكثرة في كندا لذا فورقتها موجودة على العلم الكندي. تخزن الأشجار خلال البرد النشأ في جذوعها وجذورها الذي ما يلبث أن يتحول بعد ذلك إلى سكر يرتفع في النسغ في الربيع فيتم ثقب فتحات في جذوعها لجمع النسغ الناضج الذي تتم معالجته وتصنيعه بالتسخين لإنتاج شراب مركز ذي لون ذهبي. فوائده كثيرة، ويعتبر سكان أميركا الشمالية الأصليون أول من قاموا بجمع هذا الشراب واستخدامه.

شجرة القيقب

شراب القيقب

c $\because x^2 > 0 \Rightarrow |x| > 0$

$\therefore x > 0$ أو $x < 0$

$\therefore$ مجال الدالة $= (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

أو $\mathbb{R} - \{0\}$

d $\because 5 - 3x > 0 \Rightarrow -3x > -5 \Rightarrow x < \frac{5}{3}$

$\therefore$ مجال الدالة $= \left(-\infty, \frac{5}{3}\right)$.

حاول أن تحل

4 أوجد مجال تعريف كل من الدوال التالية:

a $y = 2 + \log_5(x-2)$ **b** $f(x) = \log_4(x^2+1)$ **c** $g(x) = \log_7(1-x)$

الشكل المقابل يبيّن التمثيل البياني للدالتين:

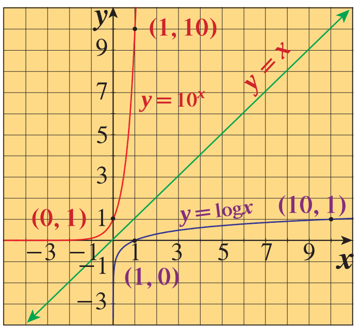
$y = \log x$، $y = 10^x$.

لاحظ النقطتين $(0, 1)$، $(1, 10)$ تنتميان إلى بيان $y = 10^x$

بينما $(1, 0)$، $(10, 1)$ تنتميان إلى بيان $y = \log x$

كل من المنحنيين المرسومين انعكاس للآخر في الخط المستقيم $y = x$.

لاحظ أن كلًّا من الدالتين معكوس للأخرى.



مثال (5)

استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_2 x$ ومعكوسها.

الحل:

الدالة $y = \log_2 x$ هي معكوس الدالة $y = 2^x$

الخطوة 1:

كون الجدول

x	-1	0	1	2
$y = 2^x$	0.5	1	2	4

ارسم بيان الدالة $y = 2^x$

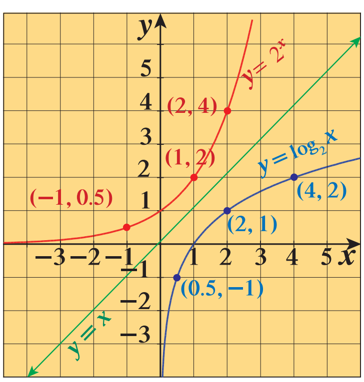
الخطوة 2:

ارسم المستقيم $y = x$

الخطوة 3:

اعكس إحداثيات النقاط المختارة في الجدول السابق

وارسم بيان الدالة $y = \log_2 x$



x	0.5	1	2	4
$y = \log_2 x$	-1	0	1	2

تذكر:

مربع أي عدد حقيقي هو عدد موجب أو يساوي صفر

$\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 \geq 0$.

معلومة:

$\sqrt{x^2} = |x|$

حاول أن تحل

5 استخدم خواص الانعكاس لرسم بيان الدالة: $y = \log_3 x$ ومعكوسها.

انسحاب الدوال اللوغاريتمية Translating Logarithmic Functions

يمكنك تمثيل العديد من الدوال اللوغاريتمية على أنها انسحاب لدالة المرجع: $y = \log_b x$

التمثيل البياني للدالة: $y = \log_b (x-h) + k$ هو انسحاب لبيان دالة المرجع: $y = \log_b x$، h وحدة أفقيًا، k وحدة رأسيًا.

مثال (6)

ارسم بيان الدالة: $y = \log_6 (x+2) - 3$ مستخدمًا دالة المرجع.

الحل:

الخطوة 1:

دالة المرجع هي: $y = \log_6 x$

اصنع جدول قيم دالة المرجع: $y = \log_6 x$

x	$\log_6 x$	y
6	$\log_6 6 = 1$	1
1	$\log_6 1 = 0$	0
$\frac{1}{6}$	$\log_6 \frac{1}{6} = -1$	-1
$\frac{1}{36}$	$\log_6 \frac{1}{36} = -2$	-2

الخطوة 2:

للحصول على بيان الدالة: $y = \log_6 (x+2) - 3$

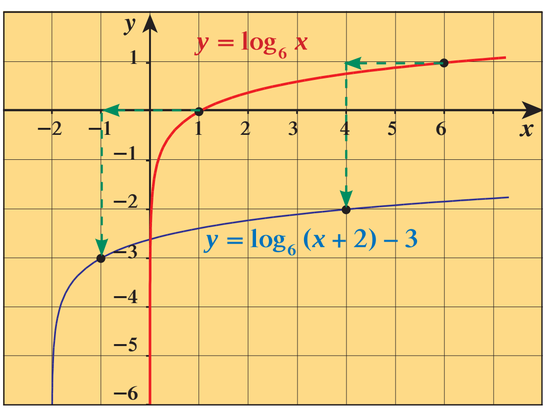
نستخدم بيان دالة المرجع $y = \log_6 x$ كالتالي:

$\because$ $h = -2$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب أفقي جهة اليسار بمقدار وحدتين.

$\because$ $k = -3$ (سالبة)

$\therefore$ انسحاب رأسي للأسفل بمقدار 3 وحدات.



حاول أن تحل

6 ارسم بيان الدالة: $y = \log_3 (x-3) + 1$ مستخدمًا دالة المرجع.

4–4

خواص اللوغاريتمات

Properties of Logarithms

عمل تعاوني

1 أكمل الجدول التالي باستخدام الآلة الحاسبة.

قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من الألف.

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
$\log x$												

2 استخدم جدولك في تكملة كل زوج من الجمل التالية. ماذا تلاحظ؟

a $\log 3 + \log 5 = \ldots$ $\qquad$ $\log(3 \times 5) = \ldots$

b $\log 1 + \log 6 = \ldots$ $\qquad$ $\log(1 \times 6) = \ldots$

c $\log 10 + \log 2 = \ldots$ $\qquad$ $\log(10 \times 2) = \ldots$

3 **عمّم:** أكمل الجملة التالية: $\log(m \times n) = \ldots$

4 a **تفكير ناقد:** وضح كيف يمكنك كتابة المقدار $\log \frac{m}{n}$ باستخدام المقادير $\log m$, $\log n$

b استخدم آلتك الحاسبة لتحقيق ما كتبته مستخدمًا قيمًا مختلفة لكل من m , n

5 مثّل بيانيًّا كل زوج من الدوال التالية في نفس المستوى الإحداثي (يفضل استخدام الآلة الحاسبة البيانية). ماذا تلاحظ؟

a $y = \log x^3$, $y = 3\log x$

b $y = \log x^{-1}$, $y = (-1)\log x$

6 استخدم تمثيلاتك البيانية لمساعدتك في تكملة الجملة $\log m^k = \ldots$

7 وضح كيف يمكنك استخدام هذه النتيجة لإيجاد قيمة $\log 1\,000$

خواص اللوغاريتمات Properties of Logarithms

تمّ تلخيص خواص اللوغاريتمات بما يلي:

خواص اللوغاريتمات

$\forall m,n,b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$

خاصية الضرب $\qquad \log_b mn = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\qquad \log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\qquad \log_b m^k = k \log_b m \;,\; k \in \mathbb{R}$

سوف تتعلم

- خواص اللوغاريتمات.
- اختصار المقادير اللوغاريتمية وفكها.
- تطبيق خواص اللوغاريتمات.

المفردات والمصطلحات:

- خاصية الضرب Multiplication Property
- خاصية القسمة Division Property
- خاصية القوى Power Property
- شدة الصوت Sound Intensity
- مستوى شدة الصوت Level of Sound Intensity

الربط بالتكنولوجيا:

تسمح الآلات الحاسبة البيانية برسم بيانات الدوال. تختلف الخطوات المتبعة من حاسبة إلى أخرى لكن معظمها بسّط كثيرًا هذه العملية:

a اضغط على رمز بيان الدالة GRAPH.

b اكتب معادلة الدالة.

c اضغط على EXE، يظهر بيان الدالة على الشاشة.

انتبه:

$\log_b(m+n) \neq \log_b m + \log_b n$، إلا في حالات خاصة ونادرة حيث $m + n = m \times n$

يمكنك كتابة مجموع أو فرق اللوغاريتمات (التي لها الأساسات نفسها) بشكل لوغاريتم واحد.

مثال (1)

أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد:

a $\log_2 8 - \log_2 4$ b $3\log_b x + \log_b y$ c $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16$

الحل:

a $\log_2 8 - \log_2 4 = \log_2 \frac{8}{4} = \log_2 2$ خاصية القسمة

b $3\log_b x + \log_b y = \log_b x^3 + \log_b y$ خاصية القوى

$= \log_b (x^3 y)$ خاصية الضرب

c $3\log_5 2 + \log_5 4 - \log_5 16 = \log_5 2^3 + \log_5 2^2 - \log_5 2^4$ خاصية القوى

$= \log_5 (2^3 \times 2^2) - \log_5 2^4$ خاصية الضرب

$= \log_5 \frac{2^3 \times 2^2}{2^4}$ خاصية القسمة

$= \log_5 2$

حاول أن تحل

1 a أعد كتابة كل مقدار لوغاريتمي مما يلي بصورة لوغاريتم واحد.

1 $\log_5 2 + \log_5 6$ 2 $3\log_b 4 - 3\log_b 2$ 3 $4\log_3 2 - \log_3 5 + \log_3 10$

b **تفكير ناقد:** هل يمكنك كتابة $3\log_2 9 - \log_6 9$ بشكل لوغاريتم واحد؟

اشرح.

يمكنك أحيانًا كتابة لوغاريتم واحد كمجموع أو فرق بين لوغاريتمين أو أكثر.

مثال (2)

أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث x، y عددان حقيقيان موجبان.

a $\log_5 \frac{x}{y}$ b $\log(3x^4)$ c $\log\sqrt{\frac{25}{x}}$

الحل:

a $\log_5 \frac{x}{y} = \log_5 x - \log_5 y$ خاصية القسمة

b $\log(3x^4) = \log 3 + \log x^4$ خاصية الضرب

$= \log 3 + 4\log x$ خاصية القوى

c $\log\sqrt{\frac{25}{x}} = \log\left(\frac{25}{x}\right)^{\frac{1}{2}}$

خاصية القوى $= \frac{1}{2}\log\frac{25}{x}$

خاصية القسمة $= \frac{1}{2}(\log 25 - \log x)$

$= \frac{1}{2}(\log 5^2 - \log x)$

خاصية القوى $= \frac{1}{2}(2\log 5 - \log x)$

$= \log 5 - \frac{1}{2}\log x$

حاول أن تحل

2 أوجد مفكوك كل لوغاريتم مما يلي حيث a، b، c أعداد حقيقية موجبة.

a $\log_2(7b)$

b $\log\left(\frac{c}{3}\right)^2$

c $\log_7(a^3b^4)$

ملاحظات:

1 $\log_b 1 = 0$

2 $\log_b b = 1$

3 $\log_b b^m = m$

حيث b, m عددان حقيقيان موجبان $b \neq 1$

تذكر:

$\log 3 = \log_{10} 3$

مثال (3)

إذا كان $\log 5 \approx 0.699$, $\log 3 \approx 0.477$, $\log 2 \approx 0.301$

استخدم خواص اللوغاريتمات لإيجاد قيمة كل مما يلي دون استخدام الآلة الحاسبة.

(قرّب إجابتك إلى أقرب جزء من ألف).

a $\log 20$

b $\log 0.5$

c $\log\frac{8}{3}$

d $\log 600$

الحل:

a $\log 20 = \log(4 \times 5)$

خاصية الضرب $= \log 4 + \log 5$

$= \log 2^2 + \log 5$

خاصية القوى $= 2\log 2 + \log 5$

$\approx 2(0.301) + 0.699$

≈ 1.301

b $\log 0.5 = \log \frac{1}{2}$

$= \log (2)^{-1}$

$= -\log 2$ خاصية القوى

≈ -0.301

c $\log \frac{8}{3} = \log 8 - \log 3$ خاصية القسمة

$= \log 2^3 - \log 3$

$= 3\log 2 - \log 3$ خاصية القوى

$\approx 3(0.301) - 0.477 \approx 0.426$

d $\log 600 = \log (2^3 \times 3 \times 5^2)$

$= \log 2^3 + \log 3 + \log 5^2$ خاصية الضرب

$= 3\log 2 + \log 3 + 2\log 5$ خاصية القوى

$\approx 3 \times 0.301 + 0.477 + 2 \times 0.699 \approx 2.778$

حاول أن تحل

3 **باستخدام المعطيات في مثال (3) أوجد:**

a $\log 30$

b $\log 4.5$

c $\log \frac{1}{25}$

d $\log 1200$

تطبيقات على خواص اللوغاريتمات:

شدة الصوت هو قياس الطاقة المحمولة بالموجة الصوتية. والصوت ذو الشدة الكبيرة هو الصوت الذي يبدو عاليًا جدًّا.

تستخدم اللوغاريتمات لقياس **مستوى شدة الصوت** **Sound Intensity Level**.

شدة الصوت هي كثافة طاقة الصوت على مساحة معينة وتحسب بقسمة طاقة الصوت على المساحة.

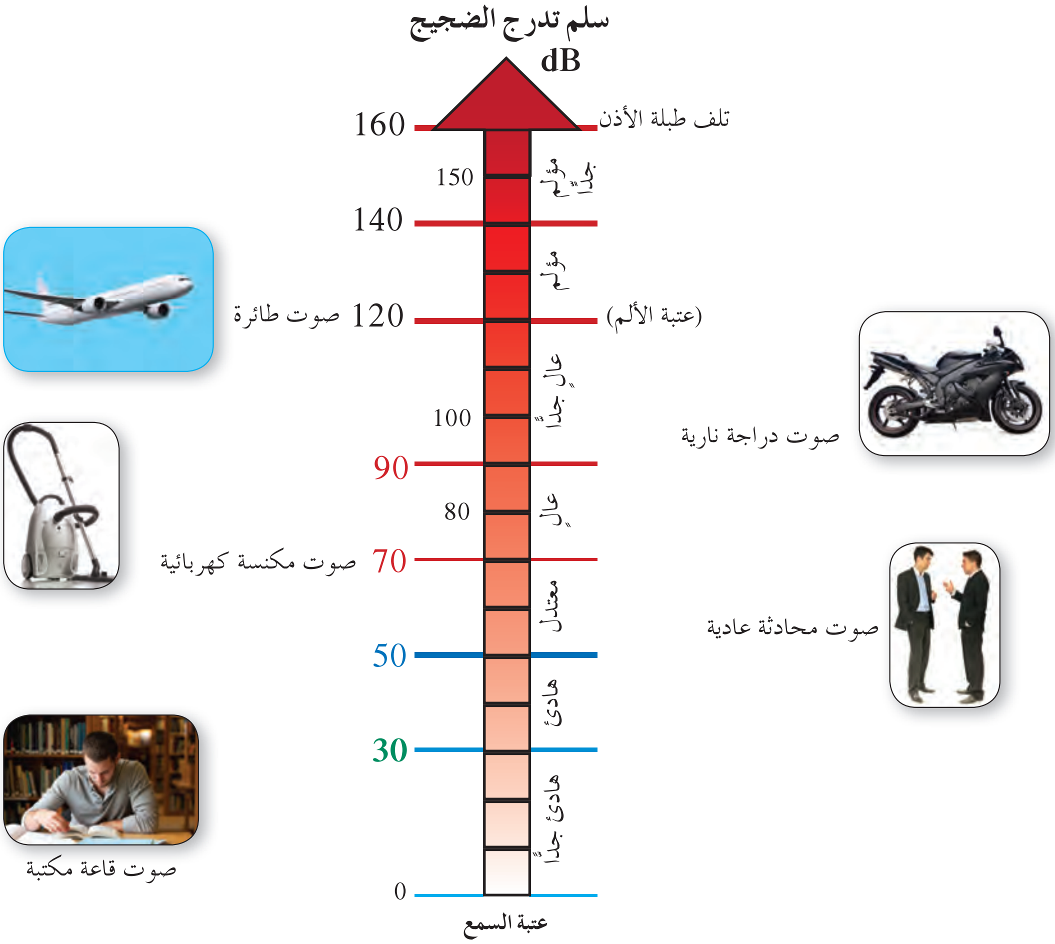
يعطى مستوى شدة الصوت بالعلاقة:

$$L = 10 \times \log\left(\frac{I}{I_0}\right)$$

حيث: L تمثل مستوى شدة الصوت وتقاس بوحدة الديسيبل (dB)

I تمثل شدة الصوت وتقاس بالوات/ متر مربع (w/m^2)

I_0 أقل صوت تستطيع أذن إنسان عادية أن تميزه (عتبة السمع) وتمثل عددًا ثابتًا يساوي 10^{-12}



تدريب

أكمل الجدول التالي، حيث: $L = 10 \times \log \frac{I}{I_0}$

قوة الصوت	مستوى شدة الصوت	الشدة w/m^2	نوع الصوت
مؤلم	140	10^2	صوت صفارة إنذار
...	...	10^{-2}	صوت مصنع
...	...	10^{-5}	صوت منظف غبار
...	...	10^{-8}	صوت دقات الساعة
هادئ جدًّا	...	10^{-10}	صوت تساقط أوراق الشجر

معلومة:
هل تعلم أن عتبة الألم عند 120 dB وتلف طبلة الأذن عند 160 dB.

معلومة:
تخطيط السمع هي عملية تسجيل القدرة السمعية وفق عتبة السمع لترددات صوتية مختلفة.

مثال (4)

تطبيق حياتي

بدأت شركة شحن في نقل حمولات طائرات الشحن خارج مطار المدينة، وقد اشتكى السكان المجاورون لها من صوتها المرتفع جدًّا، إذا افترضنا أن شركة الشحن قد طلبت إليك ابتكار طريقة تعمل على تخفيض شدّة الصوت إلى النصف، باستخدام العلاقة:

$L = (10)\log \frac{I}{I_0}$ حيث I شدة الصوت، I_0 عتبة السمع $(10)^{-12}$

فكم ديسيبل (dB) يجب أن ينخفض هذا الصوت؟

الحل:

لنفرض أن: مستوى شدة الصوت الحالي $= L_1$

مستوى شدة الصوت بعد خفضه $= L_2$

اربط: مقدار انخفاض مستوى شدة الصوت يعطى بـ: $L_1 - L_2$،

$\because$ شدة الصوت المنخفض نصف شدة الصوت الحالي:

$$L_1 = (10)\log \frac{I}{I_0}, \quad L_2 = (10)\log\left(\frac{0.5 \times I}{I_0}\right)$$

$$L_1 - L_2 = (10)\log \frac{I}{I_0} - (10)\log\left(\frac{0.5 \times I}{I_0}\right)$$

$$= (10)\log \frac{I}{I_0} - (10)\log\left(0.5 \times \frac{I}{I_0}\right)$$

خاصية الضرب

$$= (10)\log \frac{I}{I_0} - 10\left(\log 0.5 + \log \frac{I}{I_0}\right)$$

جمع الحدود المتشابهة

$$= (10)\log \frac{I}{I_0} - (10)\log 0.5 - (10)\log \frac{I}{I_0}$$

$$= (-10)\log 0.5$$

$$\approx 3.01$$

يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت حوالى 3dB

حاول أن تحل

4 في مثال (4) السابق لنفرض أن شركة الشحن طلبت إليك تخفيض شدة الصوت 25% من شدة الصوت الحالية، فكم ديسيبل يجب أن ينخفض مستوى شدة الصوت الحالي؟

4–5

المعادلات الأسية واللوغاريتمية

Exponential and Logarithmic Equations

سوف تتعلم

- حل معادلات أسية.
- استخدام اللوغاريتمات لحل المعادلات الأسية.
- استخدام الأسس لحل المعادلات اللوغاريتمية.

المفردات والمصطلحات:

- معادلات أسية Exponential Equations
- معادلات لوغاريتمية Logarithmic Equations
- قاعدة تغيير الأساس Change of Base Formula

مواصفات الحصان العربي

هو من أقدم سلالات الخيول، صغير الحجم، له قدرة عالية على تحمل المشاق، قليل الأمراض، شجاع بالفطرة، وفي لصاحبه، يتكيف مع تقلبات المناخ وهو أيضًا محب للموسيقى.

عمل تعاوني

الأحياء: تصف العلاقة $F = kw^{\frac{2}{3}}$، كمية الطعام F بالكجم (kg) التي يجب أن يتناولها حيوان ثديي يوميًّا (في هذه العلاقة k هي ثابت التغير الذي يعتمد على النوع، w هي وزن الحيوان).

اعمل مع زميل لك:

a لحساب وزن فيل كبير حيث:
$F = 145\,\text{kg}$، $k = 0.421$ باستخدام الآلة الحاسبة:

1 عوّض عن قيم k , F في العلاقة $F = kw^{\frac{2}{3}}$ وأوجد قيمة $w^{\frac{2}{3}}$

2 أوجد قيمة w

3 كيف يمكنك حل المعادلة $F = kw^{\frac{2}{3}}$ لإيجاد $w^{\frac{2}{3}}$؟ صف الناتج إذا ما تم رفع كل من طرفي المعادلة للقوة $\frac{3}{2}$، ثم اكتب العلاقة الناتجة.

b الحصان العربي من الثدييات. إذا اعتبرنا أن وزنه المثالي 400 kg ويأكل يوميًّا 15 kg فما قيمة الثابت k؟

حل معادلات أسيّة Solving Exponential Equations

تعلمت في ما سبق حل معادلة أسية مثل $7^{3x} = 49$ وذلك بتوحيد الأساس ومساواة الأسس.
سوف تتعلم في هذا الدرس حل معادلات أسية على الصورة: $b^{kx} = a$ حيث يتضمن الأس المتغير x وذلك باستخدام اللوغاريتمات:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, m \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$$
$$a = b \Longleftrightarrow \log_m a = \log_m b$$

لحل معادلات أسية يمكننا أخذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة.

مثال (1)

حل المعادلة التالية، ثم تحقق: $7^{3x} = 20$

الحل:

$7^{3x} = 20$

خذ لوغاريتم كل من طرفي المعادلة $\log 7^{3x} = \log 20$

خاصية القوى $3x \log 7 = \log 20$

$$x = \frac{\log 20}{3 \log 7}$$

استخدام الآلة الحاسبة ≈ 0.5132

تحقق:

$$7^{3x} = 20$$

الإجابة صحيحة $7^{3(0.5132)} \approx 20.00382 \approx 20$

حاول أن تحل

1 حل كل معادلة مما يلي مقربًا إجابتك إلى أقرب جزء من ألف:

(a) $3^x = 4$ (b) $6^x = 21$ (c) $3^{x+4} = 101$

تعلمت حل معادلات جذرية باستخدام قوانين الأسس والجذور.
يمكن أيضًا حلها باستخدام اللوغاريتمات.

مثال (2)

حل كلًّا من المعادلات التالية:

(a) $x^{\frac{2}{3}} = 25 \,,\ x > 0$ (b) $\sqrt{m^5} = 32 \,,\ m > 0$

الحل:

(a) $x^{\frac{2}{3}} = 25$

أخذ لوغاريتم الطرفين $\log x^{\frac{2}{3}} = \log 25$

$$\log x^{\frac{2}{3}} = \log 5^2$$

خاصية القوى $\frac{2}{3} \log x = 2 \log 5 \quad , \quad x > 0$

$$\left(\frac{3}{2}\right)\frac{2}{3} \log x = \left(\frac{3}{2}\right) 2 \log 5$$

$$\log x = 3 \log 5$$

خاصية رفع القوى $\log x = \log 5^3$

$$x = 5^3$$

$$x = 125 \in (0, \infty)$$

ⓑ $\sqrt{m^5}=32$

$m^{\frac{5}{2}}=32$

أخذ لوغاريتم الطرفين $\log m^{\frac{5}{2}}=\log 32$

$\log m^{\frac{5}{2}}=\log 2^5$

خاصية القوى $\frac{5}{2}\log m=5\log 2\ ,\quad m>0$

$\log m=5\times\frac{2}{5}\log 2$

بسّط $\log m=2\log 2$

$\log m=\log 2^2$

$m=2^2$

$m=4\ ,\quad 4\in(0,\infty)$

حاول أن تحل

2 حل كل معادلة مما يلي:

ⓐ $t^{\frac{7}{2}}=128\ ,\ \ t>0$

ⓑ $\sqrt[3]{u^4}-5=11\ ,\ \ u>0$

لحساب اللوغاريتم لأي أساس موجب لا يساوي الواحد، يمكنك استخدام خاصية تغيير الأساس.

قاعدة تغيير الأساس

$$\forall m,b,c\in\mathbb{R}^+,\ \ b\neq 1,\ \ c\neq 1$$
$$\log_b m=\frac{\log_c m}{\log_c b}$$

فمثلًا: $\log_3 7=\frac{\log_2 7}{\log_2 3}=\frac{\log_5 7}{\log_5 3}=\frac{\log 7}{\log 3}$

مثال (3)

استخدم قاعدة تغيير الأساس لإيجاد قيمة $\log_3 15$ ثم حوّل $\log_3 15$ إلى لوغاريتم للأساس 2

الحل:

$\log_b m=\frac{\log_c m}{\log_c b}$

استخدم قاعدة تغيير الأساس $\log_3 15=\frac{\log 15}{\log 3}$

استخدم الآلة الحاسبة ≈ 2.4650

للتحويل إلى لوغاريتم للأساس 2:

اكتب معادلة $\log_3 15 = \log_2 x$

عوّض عن $\log_3 15$ بـ 2.4650 $2.4650 \approx \log_2 x$

استخدم قاعدة تغيير الأساس $2.4650 = \dfrac{\log x}{\log 2}$

الضرب التقاطعي $2.4650(\log 2) = \log x$

بسّط $0.7420 \approx \log x$

اكتب في الصيغة الأسية $x = 10^{0.7420}$

استخدم الآلة الحاسبة $x \approx 5.5208$

$\therefore \quad \log_3 15 \approx \log_2 5.5208$

حاول أن تحل

3 **a** أوجد قيمة $\log_3 400$ ثم حوّلها إلى لوغاريتم للأساس 8

b التفكير الناقد: في المثال (3)، $\log_2 x \approx 2.4650$

كيف يمكن حل هذه المعادلة دون استخدام قاعدة تغيير الأساس؟

يمكنك استخدام قاعدة تغيير الأساس لحل معادلات أسية وذلك بأخذ اللوغاريتم لكلا الطرفين مستخدمًا أساس الأس كأساس للوغاريتم، ثم استخدم قاعدة تغيير الأساس.

مثال (4)

حل المعادلة: $2^{3x} = 172$

الحل:

$$2^{3x} = 172$$

خذ اللوغاريتم للأساس 2 لكلا الطرفين $\log_2(2^{3x}) = \log_2(172)$

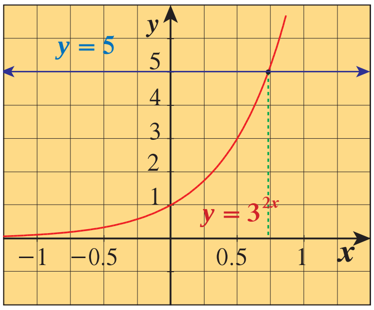
بسّط $3x = \log_2 172$

استخدم قاعدة تغيير الأساس $3x = \dfrac{\log 172}{\log 2}$

استخدم الآلة الحاسبة $x \approx 2.4754$

حاول أن تحل

4 استخدم قاعدة تغيير الأساس لحل المعادلة: $7^{5x} = 3\,000$



يمكنك أيضًا حل معادلات أسية بيانيًّا.

فمثلًا الشكل المقابل يمثل حل المعادلة $3^{2x} = 5$ حيث

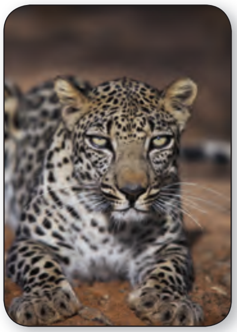
تمّ تمثيل بيان الدالة: $y = 3^{2x}$ والدالة $y = 5$

نقطة التقاطع للمنحنيين $(0.732, 5)$.

$\therefore$ حل المعادلة هو 0.732 تقريبًا.

تطبيق إثرائي

كان النمر العربي من أكثر السنوريات انتشارًا في شبه الجزيرة العربية لكنه الآن موجود على اللائحة الحمراء لأنواع الحيوانات المهددة بالانقراض.



كان عدده 112 سنة 1990 في بعض مناطق شبه الجزيرة العربية وانخفض إلى 65 سنة 2006.

a اكتب معادلة أسية تنمذج تناقص عدد النمور.

b إذا بقي هذا التناقص على حاله، في أية سنة يبقى فقط 5 نمور في شبه الجزيرة العربية؟ وضّح بيانيًّا.

الحل:

a المعادلة الأسية على الشكل $y = ab^x$.

لتكن سنة 1990 ممثلة بالصفر وسنة 2006 بـ 16

عوّض عن x بـ 0، عن y بـ 112

$$112 = ab^0$$

$b^0 = 1$

$$a = 112$$

$$\therefore y = 112b^x$$

عوّض عن x بـ 16، عن y بـ 65

$$65 = 112 \times b^{16}$$

$$b^{16} = \frac{65}{112}$$

خذ اللوغاريتم لكلا الطرفين

$$\log b^{16} = \log \frac{65}{112}$$

$$16 \log b = \log \frac{65}{112}$$

استخدم الآلة الحاسبة

$$\log b \approx -0.01476904$$

$$b \approx 0.96656476$$

$$\therefore y = (112)(0.96656476)^x$$

b

$$y = 5$$

$$y = (112)(0.96656476)^x$$

$$5 = (112)(0.96656476)^x$$

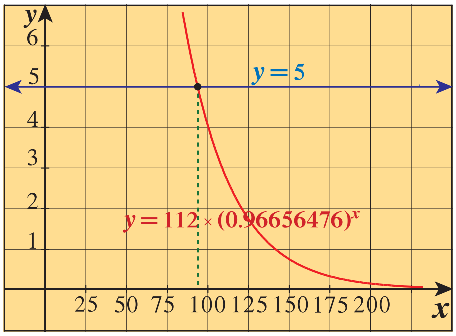
الإجابة

$$x \approx 92$$

$$1990 + 92 = 2082$$

يبقى في شبه الجزيرة العربية 5 نمور فقط سنة 2082.

الشكل المقابل يوضّح الحل بيانيًّا.



نقطة التقاطع $(91.79, 5)$

حل معادلات لوغاريتمية Solving Logarithmic Equations

كل معادلة تتضمن تعبيرًا لوغاريتميًّا تسمى معادلة لوغاريتمية ويمكن وضعها على الصورة:

$$\log_b y = x \qquad \forall\ y, b \in \mathbb{R}^+, b \neq 1$$

ويكون حلها بما يحقق هذه الشروط لذا يتوجب إيجاد مجال التعريف (شرط الحل) أو التحقق من القيم الناتجة.

مثال (5)

حل المعادلة: $\log(3x+1) = 5$

الحل:

نوجد المجال: $3x + 1 > 0 \quad \Rightarrow \quad x > -\frac{1}{3}$

$\therefore$ المجال $= \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$$\log(3x+1) = 5$$

اكتب في الصورة الأسية $\quad 3x + 1 = 10^5$

$$3x + 1 = 100\,000$$

$$x = 33\,333$$

$\because\ 33\,333 \in \left(-\frac{1}{3}, \infty\right)$

$\therefore$ الحل مقبول.

حاول أن تحل

5 حل المعادلة: $\log(7 - 2x) = -1$

في بعض الحالات، عليك استخدام خواص اللوغاريتمات لتبسيط التعابير قبل حل المعادلة.

مثال (6)

حل المعادلة: $2\log x - \log 3 = 2$

الحل:

نوجد المجال: $x > 0$

$\therefore$ المجال $= (0, \infty)$

$$2\log x - \log 3 = 2$$

اكتب لوغاريتم واحدا $\quad \log\left(\frac{x^2}{3}\right) = 2$

اكتب في الصورة الأسية $\quad \frac{x^2}{3} = 10^2$

$$x^2 = 3 \times 100$$

$$x = \pm 10\sqrt{3}$$

$10\sqrt{3} \in (0, \infty), -10\sqrt{3} \notin (0, \infty)$

حل المعادلة هو: $x = 10\sqrt{3}$

حاول أن تحل

6 حل المعادلة: $\log 6 - \log 3x = -2$

مثال (7)

أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية مستخدمًا خواص اللوغاريتمات:

a $\log x(x+1) = \log 2$

b $\log_2(x-1) - \log_2(x+3) = \log_2\left(\frac{1}{x}\right)$, $x \in (1, \infty)$

c $\log_{x+1} 32 = 5$, $x \in (0, \infty)$

الحل:

a

نوجد المجال: $x(x+1) > 0$

المعادلة المناظرة $x(x+1) = 0$

$\therefore x = 0$ أو $x = -1$

لإيجاد قيم x التي تحقق $x(x+1) > 0$

$x+1 < 0 \Rightarrow x < -1$	$x < 0$
$x+1 > 0 \Rightarrow x > -1$	$x > 0$

x	$-\infty$		-1		0		$+\infty$
x		$-$		$-$	0	$+$	
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x(x+1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

المجال $= \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\log x(x+1) = \log 2$

$x(x+1) = 2$ خاصية اللوغاريتم

$x^2 + x - 2 = 0$

$(x-1)(x+2) = 0$

$x = 1$ أو $x = -2$

$1, -2 \in \mathbb{R} - [-1, 0]$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $= \{1, -2\}$

$$\text{b} \quad \log_2(x-1)-\log_2(x+3)=\log_2\left(\frac{1}{x}\right) \quad , \quad x \in (1,\infty)$$

خاصية القسمة
$$\log_2\left(\frac{x-1}{x+3}\right)=\log_2\left(\frac{1}{x}\right)$$

خاصية اللوغاريتم
$$\frac{x-1}{x+3}=\frac{1}{x}$$

الضرب التقاطعي
$$x(x-1)=x+3$$

$$x^2-2x-3=0$$

$$(x-3)(x+1)=0$$

$$x=-1 \ , \ x=+3$$

$-1 \notin (1,\infty)$ مرفوضة

$3 \in (1,\infty)$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $=\{3\}$

$$\text{c} \quad \log_{x+1}32=5 \ , \ x \in (0,\infty)$$

قاعدة تغيير الأساس
$$\frac{\log 32}{\log(x+1)}=5$$

الضرب التقاطعي
$$\log 32=5\log(x+1)$$

خاصية رفع القوى
$$\log 32=\log(x+1)^5$$

$$32=(x+1)^5$$

$$2^5=(x+1)^5$$

$$x+1=2$$

$$x=1$$

$$1 \in (0,\infty)$$

$\therefore$ مجموعة حل المعادلة $=\{1\}$

حاول أن تحل

7 أوجد مجموعة حل كل من المعادلات التالية:

a $\log x^2-\log(x^2-x)=1 \ , \ x \in (1,\infty)$

b $\log_4(x+6)-\log_4 12=\log_4 2-\log_4(x-4) , \quad x \in (4,\infty)$

4–6

سوف تتعلم
- علاقة اللوغاريتم الطبيعي بالدالة $y = e^x$.
- حل المعادلات باستخدام اللوغاريتم الطبيعي.

المفردات والمصطلحات:
- اللوغاريتم الطبيعي

Natural Logarithm

اللوغاريتم الطبيعي
Natural Logarithm

دعنا نفكر ونتناقش

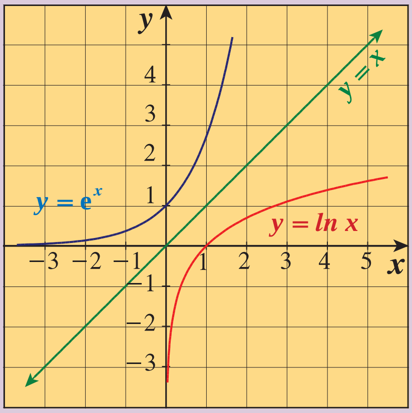
في الدرس (2–4) وجدت أن العدد $e \approx 2.71828$ وقد أمكن استخدامه كأساس.

فالدالة $y = e^x$ لها معكوس هو $y = \log_e x$ ويسمى دالة اللوغاريتم الطبيعي ورمزه:

$y = ln\, x$

وتقرأ y تساوي اللوغاريتم الطبيعي لِـ x

يوضح الرسم البياني المجاور الدالتين:



1. $y = e^x$
2. $y = ln\, x$

الآلة الحاسبة: استخدم المفتاح ln على آلتك الحاسبة لإيجاد قيم:

a. $ln5,\ ln3,\ ln15,\ ln5 + ln3$

b. $ln1,\ ln\, e,\ ln\, e^2$

كيف تربط إجابتك بما سبق دراسته؟

تطبق خواص اللوغاريتمات المعتادة على اللوغاريتم الطبيعي أيضًا.

أعد ذكر خاصية الضرب وخاصية القسمة وخاصية القوى بدلالة اللوغاريتم الطبيعي.

تدريب

أكمل ما يلي حيث $k, m, n \in \mathbb{R}^+$.

1. $ln(mn) = ...$ (خاصية ....)
2. $ln\frac{m}{n} = ...$ (خاصية ....)
3. $ln\, m^k = ...$ (خاصية ....)
4. $ln\ e = ...$
5. $ln\ e^k = ...$
6. $e^{ln\ k} = ...$

مثال (1)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $8e^{2x} = 20$

الحل:

$8e^{2x} = 20$

اقسم كل طرف على 8 $\quad e^{2x} = \frac{20}{8}$

بأخذ اللوغاريتم الطبيعي لكل طرف $\quad ln\, e^{2x} = ln\, 2.5$

خاصية القوى حيث $ln\, e = 1$ $\quad 2x\, ln\, e = ln\, 2.5$

اختصر $\quad 2x = ln\, 2.5$

اقسم كل طرف على 2 $\quad x = \frac{ln\, 2.5}{2}$

استخدم آلتك الحاسبة $\quad x \approx 0.458$

حاول أن تحل

1 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل: $e^{4(x+1)} = 32$.

اللوغاريتم الطبيعي يبسط تعبيرات العديد من العلاقات في المجالات المختلفة ومنها المجال الفيزيائي.

مثال (2) الصلة بالواقع

الفضاء: يمكن أن يبلغ صاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300 km فوق سطح الأرض إذا ما بلغت سرعته 7.7 km/s وتحسب أقصى سرعة (v) له بالعلاقة: $v = -0.0098\, t + c\, ln\, r$

(حيث t هي زمن اشتعال وقود محرك الصاروخ بالثانية (s)، c هي سرعة انطلاق البخار بـ (km/s)، r هي النسبة بين كتلة الصاروخ وهو محمل بالوقود إلى كتلته من دون وقود).

لنفرض أن صاروخًا قد استخدم لدفع سفينة فضاء، وله نسبة كتلة حوالي 25 وسرعة انطلاق البخار 2.8 (km/s)، وزمن الاشتعال 100 s، فهل يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا؟

الحل:

في هذه الحالة: $r \approx 25 \quad , \quad c = 2.8\ \text{km/s} \quad , \quad t = 100\ \text{s}$

لإيجاد v، استخدم العلاقة: $v = -0.0098\, t + c\, ln\, r$

$$v = -0.0098\,(100) + 2.8\, ln\, 25$$

$$\approx -0.98 + 2.8(3.219)$$

$$\therefore v \approx 8\ \text{km/s}$$

وهذه السرعة أكبر من السرعة 7.7km/s، والتي تلزم لبلوغ المدار الثابت.

لذلك فإن هذا الصاروخ يمكنه أن يبلغ المدار الثابت.

حاول أن تحل

2 من مثال (2) أوجد سرعة صاروخ، نسبة كتلته حوالى 15، وسرعة انطلاق البخار قدرها 1.2km/s، وزمن اشتعال المحرك 30s هل يمكن أن يبلغ هذا الصاروخ مدارًا ثابتًا على بعد 300km فوق سطح الأرض؟

يمكنك حل معادلات لوغاريتمية طبيعية باستخدام معادلات أسية والعكس صحيح.

مثال (3)

حل المعادلة: $ln(3x+5)=4$

الحل:

نوجد المجال: $3x+5>0 \Rightarrow x>-\frac{5}{3}$

$\therefore$ المجال $=\left(-\frac{5}{3},\infty\right)$

$ln(3x+5)=4$

أعد الكتابة في الصورة الأسية $3x+5=e^4$

اطرح 5 من كل طرف $3x=e^4-5$

اقسم كل طرف على 3 $x=\left(\frac{e^4-5}{3}\right)$

استخدم الآلة الحاسبة $x\approx 16.53$

حاول أن تحل

3 حل كلًّا من المعادلات التالية:

a $e^{\frac{2x}{5}}+7.2=9.1$

b $5+ln\left(\frac{x+2}{3}\right)=7$

مثال (4)

استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل $7e^{2x}+2.5=13$

الحل:

$7e^{2x}+2.5=13$

اطرح 2.5 من طرفي المعادلة $7e^{2x}=10.5$

اقسم طرفي المعادلة على 7 $e^{2x}=1.5$

تذكر:
$\log_e x=ln\,x$

خذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة	$\ln(e)^{2x} = \ln 1.5$
خاصية القوى حيث $\ln e = 1$	$2x \ln e = \ln 1.5$
اقسم طرفي المعادلة على 2	$x = \dfrac{\ln 1.5}{2}$
استخدم الآلة الحاسبة	$x \approx 0.2027$

حاول أن تحل

4 استخدم اللوغاريتم الطبيعي لحل المعادلتين التاليتين:

a $e^{x+1} = 30$

b $2^{2x-3} + 4 = 7$

المرشد لحل المسائل

في نهاية العام 2000 وصل عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم إلى 360 مليونًا وتزايد هذا العدد ليصل في نهاية العام 2011 إلى 2 260 مليون مشترك.

a x تمثّل العدد بالسنين، m معدل الزيادة السنوية، P عدد المشتركين في عام 2000، y عدد المشتركين مع مرور الوقت.

اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$ تمثل القيمة المتوقعة لزيادة عدد مشتركي شبكة الإنترنت ابتداءً من العام 2000.

y: عدد المشتركين بعد مرور x عام.

m: معدل التزايد السنوي، P: عدد المشتركين عام 2000.

b في أي عام يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار؟

c متى يصبح هذا العدد أكثر من 3 مليارات مشترك؟

d أوجد قيمة x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من إجابات **b**، **c**؟

الحل:

a الشكل العام للمعادلة هو كالتالي: $y = Pe^{mx}$

إيجاد المعدل العام لتزايد عدد مشتركي شبكة الإنترنت في العالم بين عام 2000 و2011.

تعويض y بـ 2 260 وPبـ 360 وx بـ 11
$$2\,260 = 360\,e^{11m}$$

قسمة طرفي المعادلة على 360
$$\frac{2\,260}{360} = e^{11m}$$

تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة
$$ln\frac{2\,260}{360} = ln\,e^{11m}$$

تبسيط
$$ln\frac{2\,260}{360} = 11m$$

قسمة طرفي المعادلة على 11
$$m = \frac{ln\left(\frac{2\,260}{360}\right)}{11}$$

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد معدل التزايد السنوي
$$m = 0.167$$

إذًا معدل التزايد السنوي لمشتركي شبكة الإنترنت هو 16.7%.

وبالتالي الدالة هي: $y = 360\,e^{0.167x}$

b
$$y = 360\,e^{0.167x}$$
$$360\,e^{0.167x} > 1\,000$$
$$e^{0.167x} > \frac{1\,000}{360}$$
$$0.167x > ln\frac{1\,000}{360}$$
$$x > \frac{ln\frac{1\,000}{360}}{0.167} \approx 6.11767$$

في العام 2007 يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت المليار، ويصبح العدد حوالى 1.159 مليار مشترك.

c

$y = 360\,e^{0.167x}$

$360\,e^{0.167x} > 3\,000$

وبالمثل $x > \dfrac{ln\dfrac{3\,000}{360}}{0.167} \approx 12.6961888$

يتخطى عدد مشتركي شبكة الإنترنت 3 مليارات في العام 2013، ويصبح العدد حوالى 3.156 مليارات مشترك.

d

$y = 360\,e^{0.167x}$

قسمة طرفي المعادلة على 360 $\dfrac{y}{360} = e^{0.167x}$

تطبيق اللوغاريتم الطبيعي على طرفي المعادلة $ln\left(\dfrac{y}{360}\right) = ln\left(e^{0.167x}\right)$

تبسيط $ln\left(\dfrac{y}{360}\right) = 0.167x$

قسمة طرفي المعادلة على 0.167 $x = \dfrac{ln\left(\dfrac{y}{360}\right)}{0.167}$

e نعوض عدد y في **b**، **c** لنتحقق من الإجابات التي توصلنا إليها من حيث عدد السنوات المطلوبة للوصول إلى هذه الأعداد.

b $\dfrac{ln\left(\dfrac{1\,000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow x \approx 6.12$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 6 سنوات، إذًا في 2007.

c $\dfrac{ln\left(\dfrac{3\,000}{360}\right)}{0.167} \Rightarrow x \approx 12.7$، إذًا نحتاج إلى أكثر من 12 سنة، إذًا في 2013.

مسألة إضافية

في نهاية العام 2000، وصل عدد مشتركي الهاتف المحمول حوالى 750 مليونًا في العالم أمّا في نهاية العام 2011 فقد تزايد هذا العدد ليصل إلى حوالى 5.6 مليارات مشترك.

a x تمثّل عدد السنوات منذ العام 2000.

اكتب دالة على الشكل: $y = Pe^{mx}$، تمثل القيمة المتوقعة لزيادة مستخدمي الهاتف المحمول ابتداءً من العام 2000.

y: عدد المستخدمين بعد مرور x سنة.

m: معدل التزايد السنوي.

P: عدد المستخدمين في العام 2000.

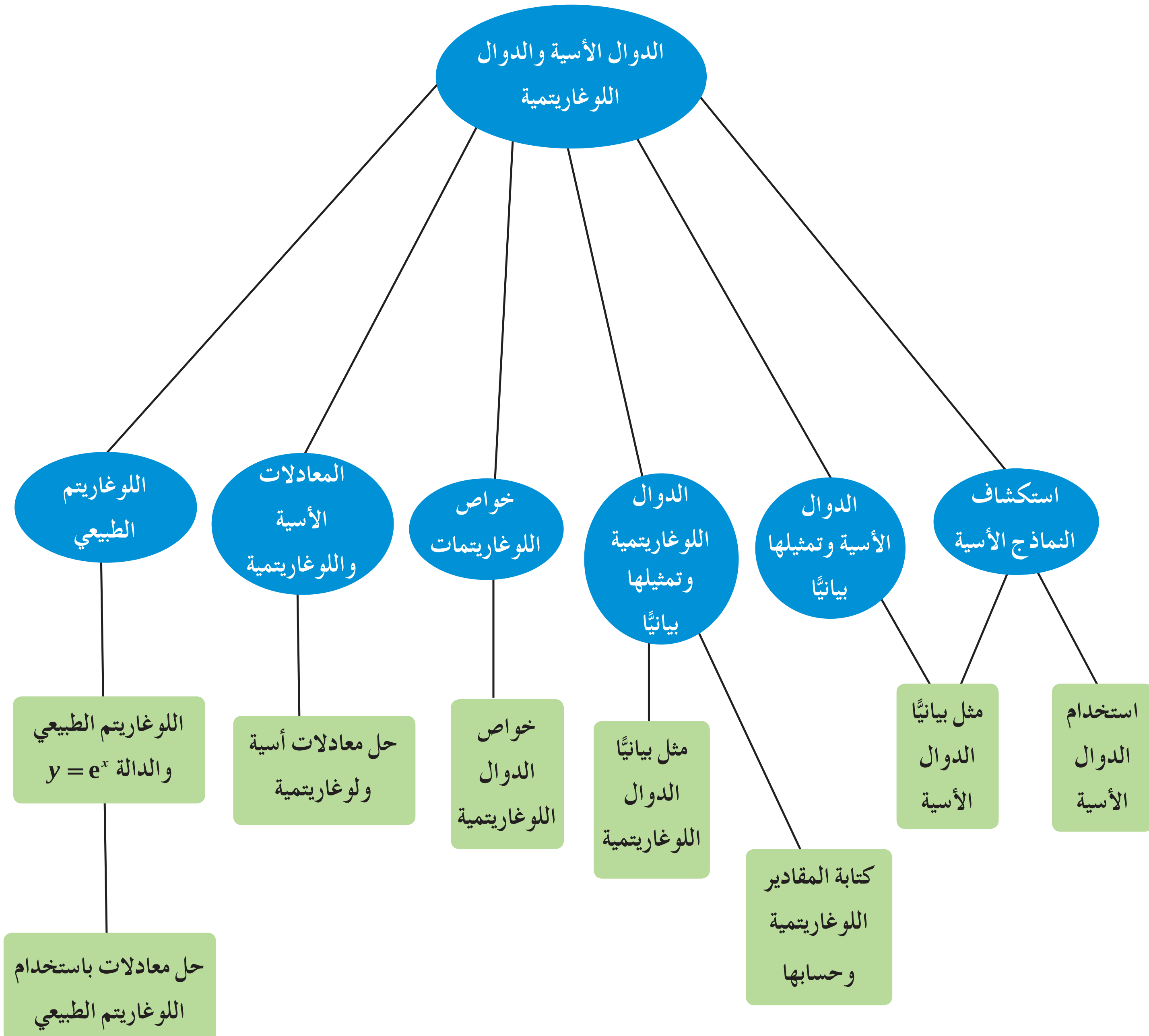
b في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 2 مليار؟

c في أي عام يتخطى عدد مستخدمي الهاتف المحمول الـ 9 مليارات؟

d أوجد x بدلالة y.

e كيف يمكن استخدام المعادلة في **d** للتحقق من الإجابات في **b**، **c**؟

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- صورة الدالة الأسية هي: $y = ab^x$
- $b > 1$ الدالة تمثل نموًّا أسيًّا عامله b
- $0 < b < 1$ الدالة تمثل تضاؤلًا أسيًّا عامله b
- $y = ab^{cx}$، تتغير الرسوم البيانية للدالة الأسيّة بتغير قيم إحدى الثوابت التالية: c , b , a
- $y = b^x \Leftrightarrow \log_b y = x$
- اقرأ $\log_b y$ لوغاريتم y للأساس b
- الأساس b في المقدار الأس b^x هو نفسه الأساس في اللوغاريتم وفي كلتا الحالتين $b \neq 1$ و $b > 0$ وكذلك الأس.
- x في b^x هو اللوغاريتم في المعادلة $\log_b y = x$
- اللوغاريتمات المعتادة هي اللوغاريتمات للأساس 10 يمكن أن نكتب $\log_{10} y$ أو $\log y$
- الدوال اللوغاريتمية هي معكوسات الدوال الأسية.
- خواص اللوغاريتمات
- لأي أعداد حقيقية موجبة b, n, m، $b \neq 1$

خاصية الضرب $\log_b m\,n = \log_b m + \log_b n$

خاصية القسمة $\log_b \frac{m}{n} = \log_b m - \log_b n$

خاصية القوى $\log_b m^k = k \log_b m \ , \ k \in \mathbb{R}$

- المعادلة الأسية هي على الشكل $a = b^{cx}$، حيث الأس يتغير.
- $\forall a \ , \ b \in \mathbb{R}^+ \ , m \in \mathbb{R}^+ - \{1\} \ , \ a = b \Leftrightarrow \log_m a = \log_m b$
- بحساب اللوغاريتمات بأي أساس يمكنك استخدام خاصيّة تغيير الأساس لأي أعداد حقيقية موجبة c , b , m

حيث $b \neq 1 \ , c \neq 1$

$$\log_b m = \frac{\log_c m}{\log_c b}$$

$$e \approx 2.71828$$

$$e^{\ln x} = x$$

$$\ln e^x = x$$

$$\ln e = 1$$

الوحدة الخامسة

المتجهات

Vectors

مشروع الوحدة:

1 **مقدمة المشروع:** استخدم الفيزيائيون والمهندسون المتجهات خاصة في النصف الثاني من القرن التاسع عشر وفي بداية القرن العشرين. بالنسبة إليهم، المتجهات هي قوى وانتقالات وسرعات وحقول كهربائية وحقول مغناطيسية.

2 **الأهداف:** عند إقلاع الطائرات تتعرض لتيارات هوائية قد تغير في اتجاهها.

سوف ندرس في هذا المشروع تأثير هذه التيارات على مسار الطائرة.

3 **اللوازم:** أوراق رسم، آلة حاسبة، جهاز إسقاط (Data Show)، حاسوب.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

تبلغ سرعة طيران إحدى الطائرات في الهواء الساكن 850 km/h. عند انطلاقها باتجاه الشرق واجهت هواء بسرعة 50 km/h اتجاهه 40° من الجنوب إلى الغرب.

a عبّر عن كلّ من المتجهين بزوج مرتّب لكي تنطلق الطائرة باتجاه الشرق.

b أوجد مجموع المتجهين وطول المتجه الناتج.

c قم بزيارة لإحدى شركات الطيران واسأل أحد الطيارين عن كيفية حساب الاتجاه المناسب للطائرة أثناء الإقلاع وتأثير الهواء على ذلك ثم اسأله عن السرعة الأرضية للطائرة.

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا يبيّن كيف استفدت من دروس هذه الوحدة ومن لقاءك مع قائد الطائرة لتنفيذ المشروع. ادعم تقريرك بعرض على الحاسوب أو بواسطة جهاز الإسقاط (Data show) لتبيّن عملك بشكل أوضح.

دروس الوحدة

الضرب الداخلي	جمع المتجهات وطرحها	المتجه في المستوى
5−3	5−2	5−1

الوحدة الخامسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت الهندسة الإحداثية وقوانينها.
- تعلمت إحداثيات النقطة في المستوي.
- تعلمت الجذور التربيعية.
- تعلمت النسب المثلثية ومقلوباتها.

ماذا سوف تتعلم؟

- المتجهات.
- ضرب المتجه في عدد حقيقي.
- جمع المتجهات وطرحها.
- إيجاد مركبات (إحداثيات) المتجهات.
- الضرب الداخلي.
- استخدام الضرب الداخلي ومركبات (إحداثيات) المتجهات لحل مسائل هندسية.

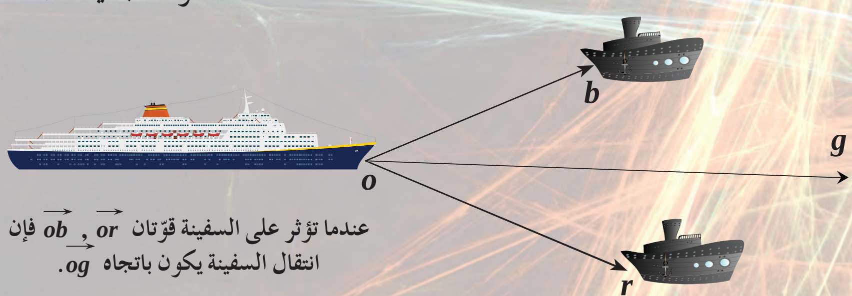
أضف إلى معلوماتك

ساهم الفلكي وليم هاملتون William Hamilton في تطوير حساب المتجهات. وهو أول من استخدم سنة 1843 تعبير متجه «Vector» وهو كلمة مشتقة من اللاتينية وتعني «الذي ينقل».

كذلك استخدم الرسام شفروي (1786 – 1899) «Chevreuil» معادلة تسمح بتركيب أكثر من ألف لون انطلاقًا من الألوان: الأزرق b، الأحمر r، الأخضر g:

$$b<\overrightarrow{mb}>+r<\overrightarrow{mr}>+g<\overrightarrow{mg}>=\vec{0}$$

حيث b, r, g نسب الألوان الثلاث للحصول على اللون الجديد m.



عندما تؤثر على السفينة قوتان $\overrightarrow{ob}$, $\overrightarrow{or}$ فإن انتقال السفينة يكون باتجاه $\overrightarrow{og}$.

المصطلحات الأساسية

المتجه – تساوي متجهين – متجه الوحدة – المتجه المعاكس – الزاوية المحددة بمتجهين – المتجه الصفري – مركِبات المتجه – جمع متجهين – متجها الوحدة الأساسيان – المتجهان المتوازيان – الضرب الداخلي – الزاوية الموجهة – القطعة الموجهة – نقطة بداية – نقطة نهاية – متجه الموضع – تكافؤ قطعتين موجهتين.

المتجه في المستوى

The Vector in the Plane

5-1

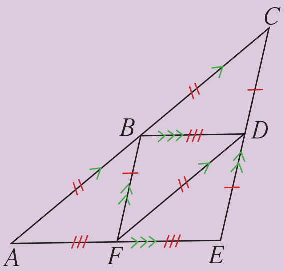
سوف تتعلم

- القطعة الموجهة.
- متجه الموضع.
- تكافؤ القطع الموجهة.
- المتجه.
- تساوي متجهين.
- متجهين متعاكسين.
- الزاوية المحددة بمتجهين وقياسها.

المفردات والمصطلحات:

- محور سيني $x-$axis
- محور صادي $y-$axis
- عدد قياسي Scalar Number
- القطعة الموجهة Oriented Segment
- متجه الموضع Position Vector
- قطعتان موجهتان متكافئتان Two Equivalent Oriented Segments
- متجه Vector
- طول المتجه Length of the Vector
- متجه معاكس Opposite Vector

فلنعمل معًا



في الشكل المقابل، القطع المستقيمة المتساوية الطول مبيّنة.

1. حدّد ثلاثة متوازيي أضلاع في الشكل.
2. أكمل:
   - a في الانسحاب الذي يحوّل A إلى B، يحوّل... إلى...، ويحوّل... إلى... .
   - b في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل... إلى...، ويحوّل F إلى B
   - c في الانسحاب الذي يحوّل... إلى...، يحوّل F إلى E ويحوّل... إلى... .
3. في السؤال 2 a أكمل النص بعد تبديل A , B
4. ما العلاقة بين الانسحاب الذي يحوّل E إلى B ثم B إلى F والانسحاب الذي يحول E إلى F؟

الكميات القياسية والكميات المتجهة

Scalar Quantities and Oriented Quantities

تقسم الكميات إلى نوعين:

كميات قياسية (عددية): هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي** و**وحدة قياس**.

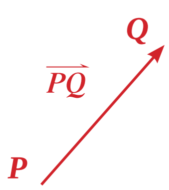
مثل: الحرارة – المسافة – العمر – الحجم – الزمن – الكتلة.

فمثلًا: طول مسطرة يساوي 30 cm

كميات متجهة: هي كميات يلزم لتعريفها **مقدار عددي واتجاه**.

مثل: السرعة – العجلة – الإزاحة – القوة – الوزن.

فمثلًا: إذا قلنا أن سيارة تحركت بسرعة 60 km/h فقط فهذا لا يتمم المعنى لأن تحركها قد يكون شمالًا أو في أي اتجاه آخر وتمثّل مثل هذه الكميات **بقطعة موجهة**.



القطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ لها **نقطة بداية** P و**نقطة نهاية** Q.

يمثّل الرمز $\|\overrightarrow{PQ}\|$ **طول القطعة الموجهة** $\overrightarrow{PQ}$

أي المسافة بين نقطة البداية P ونقطة النهاية Q.

اتجاه $\overrightarrow{PQ}$ هو من P إلى Q.

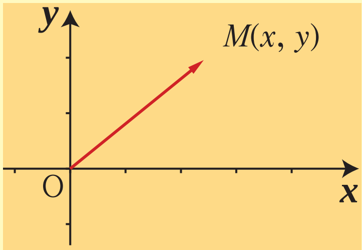
القطعة الموجهة $\overrightarrow{QP}$ لها طول $\overrightarrow{PQ}$ نفسه

ولكن في **الاتجاه المعاكس** أي من Q إلى P.

تعريف

القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها

$M(x, y)$ تسمى «متجه الموضع» ويمثّلها الزوج المرتب (x, y)



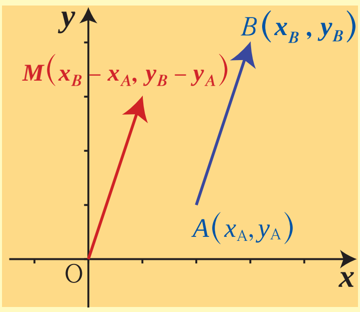
تعريف

$\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة في المستوى الإحداثي

حيث $A(x_A, y_A)$, $B(x_B, y_B)$

متجه الموضع لهذه القطعة هو القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$

حيث $M(x_B - x_A, y_B - y_A)$



مثال (1)

ليكن: $A(2, -1), B(7, 3), C(4, 2), M(3, -2)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{CA}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{AB}$

b إذا كان متجه الموضع $\overrightarrow{OM}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$، فأوجد إحداثيات E

الحل:

a متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{AB}$ يمثّله:

$$(x_B - x_A, y_B - y_A) = (7-2, 3-(-1)) = (5, 4)$$

متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{BC}$ يمثّله:

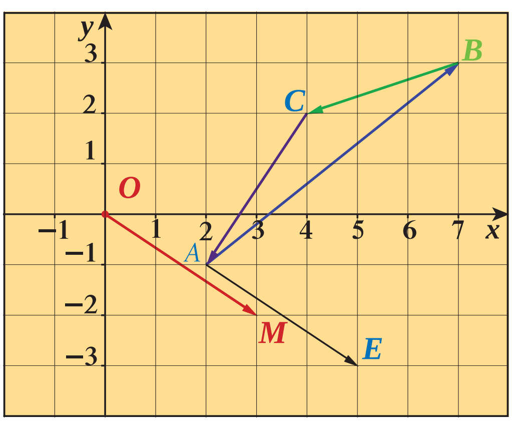
$$(x_C - x_B, y_C - y_B) = (4-7, 2-3) = (-3, -1)$$

متجه الموضع للقطعة $\overrightarrow{CA}$ يمثّله:

$$(x_A - x_C, y_A - y_C) = (2-4, -1-2) = (-2, -3)$$

b الزوج المرتب $(3, -2)$ يمثّل $\overrightarrow{AE}$ وبفرض أن $E(x, y)$

يكون متجه الموضع للقطعة الموجهة $\overrightarrow{AE}$ يمثّله: $(x-2, y+1)$



من تساوي الأزواج المرتبة:

$$(x-2, y+1) = (3, -2)$$

$$\begin{cases} x-2 = 3 \implies x = 5 \\ y+1 = -2 \implies y = -3 \end{cases}$$

$$\therefore\ E(5, -3)$$

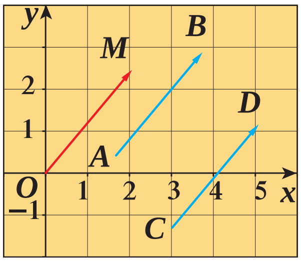
حاول أن تحل

1 ليكن: $A(1,-3),\ B(2,2),\ C(2,3),\ D(-2,-1)$

a عيّن الزوج المرتب الذي يمثّل متجه الموضع لكل من: $\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BD}$

b متجه الموضع $\overrightarrow{DC}$ يمثّل القطعة الموجهة $\overrightarrow{KD}$. أوجد إحداثيات K

تكافؤ قطعتين موجهتين Two Equivalent Oriented Segments



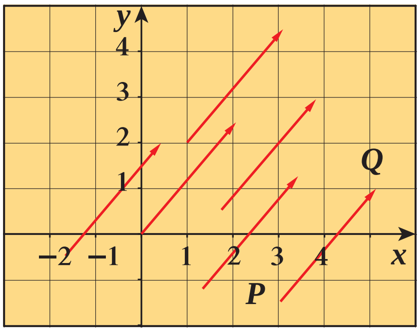
تكون قطعتان موجهتان متكافئتين إذا كان لهما الطول نفسه والاتجاه نفسه

ولكل قطعتين موجهتين متكافئتين متجه الموضع نفسه.

فمثلًا من الشكل المرسوم $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ قطعتين موجهتين متكافئتين و $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع لهما.

خاصية

إذا كانت القطعتان الموجهتان $\overrightarrow{CD}$ ، $\overrightarrow{AB}$ متكافئتين، فإن الشكل $ABDC$ هو متوازي أضلاع حيث النقاط A, B, C, D ليست على استقامة واحدة.



مجموعة كل القطع الموجهة المكافئة للقطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ تكوّن **المتجه** $\overrightarrow{PQ}$ ويرمز له بالرمز $<\overrightarrow{PQ}>$ حيث طوله واتجاهه هما طول القطعة الموجهة $\overrightarrow{PQ}$ واتجاهها.

ويوجد عدد لا نهائي من القطع الموجهة لها الطول والاتجاه نفسه.

تعريف المتجه

المتجه هو مجموعة غير منتهية من القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.

إذا كان $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع حيث $M(x_M, y_M)$، فيرمز لهذا المتجه بالرمز $\overrightarrow{M}$

ويكتب على الصورة $\overrightarrow{M} = < x_M\,,\ y_M >$

وتسمى y_M ، x_M **مركبتي** المتجه $\overrightarrow{M}$

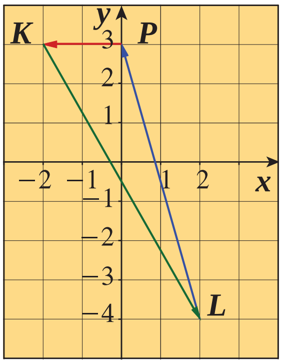
x_M المركبة الأفقية (السينية)، y_M المركبة الرأسية(الصادية) للمتجه $\overrightarrow{M}$

مثال (2)

إذا كانت $K(-2, 3), L(2, -4), P(0, 3)$. فأوجد

مركبات كلّ من المتجهات التالية: $<\overrightarrow{KL}> , <\overrightarrow{PK}> , <\overrightarrow{LP}>$

الحل:



$$<\overrightarrow{KL}> = <x_L - x_K, y_L - y_K> = <2-(-2), -4-3> = <4, -7>$$

∴ المركبة السينية = 4، المركبة الصادية = -7

$$<\overrightarrow{PK}> = <x_K - x_P, y_K - y_P> = <-2-0, 3-3> = <-2, 0>$$

∴ المركبة السينية = -2، المركبة الصادية = 0

$$<\overrightarrow{LP}> = <x_P - x_L, y_P - y_L> = <0-2, 3-(-4)> = <-2, 7>$$

∴ المركبة السينية = -2، المركبة الصادية = 7

حاول أن تحل

2 إذا كانت $F(5, 13), E(3, 11), D(-2, -7)$

فأوجد مركبات كل من المتجهات التالية: $<\overrightarrow{EF}> , <\overrightarrow{ED}> , <\overrightarrow{DE}>$

طول (معيار) متجه واتجاهه Length (Magnitude) of a Vector and its Direction

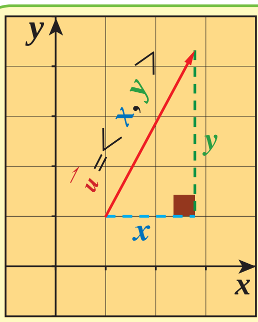
تعريف

لكل متجه $\overrightarrow{U} = <x, y>$ معيار (طول) يرمز له بالرمز $\|\overrightarrow{U}\|$

ويعطى بالعلاقة: $\|\overrightarrow{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

يحدد اتجاه المتجه $\overrightarrow{U}$ بالزاوية الموجهة θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

حيث $0^\circ \le \theta < 360^\circ$

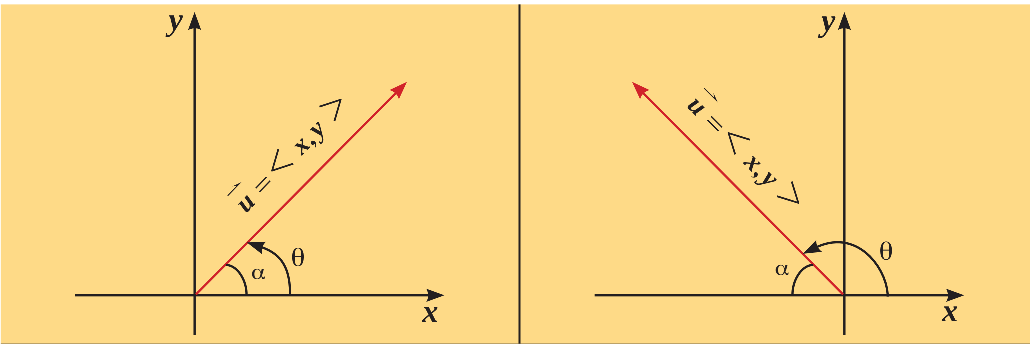


$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$

إذا كانت α زاوية الإسناد للزاوية θ فإن:

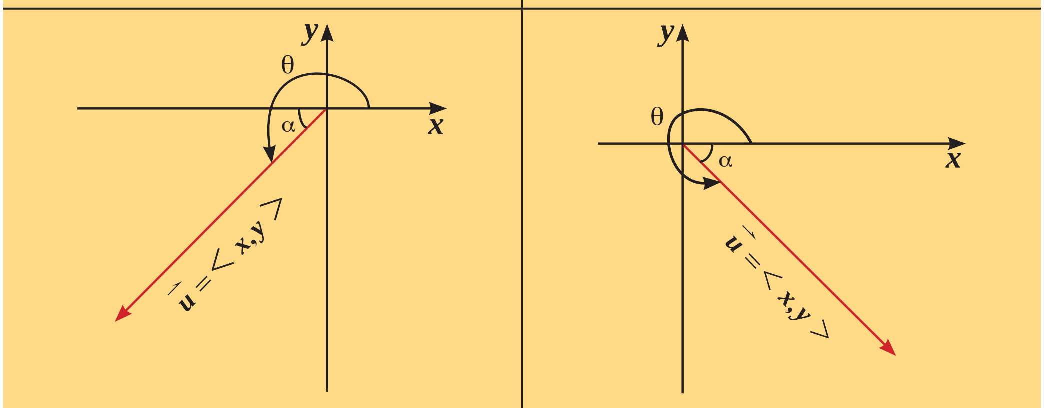
$$\theta = \begin{cases} \alpha & \text{عندما } x > 0 , y > 0 \\ 180^\circ - \alpha & \text{عندما } x < 0 , y > 0 \\ 180^\circ + \alpha & \text{عندما } x < 0 , y < 0 \\ 360^\circ - \alpha & \text{عندما } x > 0 , y < 0 \end{cases}$$

وتحدد زاوية الإسناد α بالعلاقة: $\tan\alpha = \left|\dfrac{y}{x}\right|$



$\because x < 0,\ y > 0 \ \therefore \theta = 180^\circ - \alpha$

$\because x > 0,\ y > 0 \ \therefore \theta = \alpha$



$\because x > 0,\ y < 0 \ \therefore \theta = 360^\circ - \alpha$

$\because x < 0,\ y < 0 \ \therefore \theta = 180^\circ + \alpha$

ملاحظة:

يمكن أن تكون قياسات الزوايا بالتقدير الستيني أو التقدير الدائري.

للتحويل بين القياسين الستيني والدائري نستخدم المعادلة $\frac{\alpha}{180} = \frac{\beta}{\pi}$ حيث α بالدرجات، β بالراديان.

مثال (3)

لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجدطول (معيار) المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات. (استخدم آلتك الحاسبة).

a $\vec{u} = \langle 2, 3 \rangle$

b $\vec{v} = \langle -\sqrt{2}, 2 \rangle$

c $\vec{w} = \langle 1, -3 \rangle$

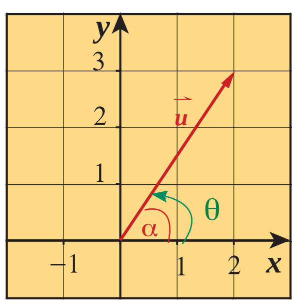
d $\vec{t} = \langle -3, -1 \rangle$

الحل:

a $\vec{u} = \langle 2, 3 \rangle$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(2)^2 + (3)^2}$

$= \sqrt{13}$ units



نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{u}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات وزاوية الاسناد α.

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{3}{2}\right| = \frac{3}{2}$

$\alpha \approx 56^\circ\, 18'\, 35.76''$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\because x > 0 \,,\ y > 0 \ \therefore\ \theta = \alpha$

$\therefore \theta \approx 56^\circ\, 18'\, 35.76''$

استخدام الآلة الحاسبة:

مثال: لإيجاد قياس الزاوية θ إذا كانت $\tan\theta = \frac{3}{2}$

اضغط على:

shift tan

يظهر على الشاشة $\tan^{-1}$

ثم أدخل: $\frac{3}{2}$ =

يظهر على الشاشة

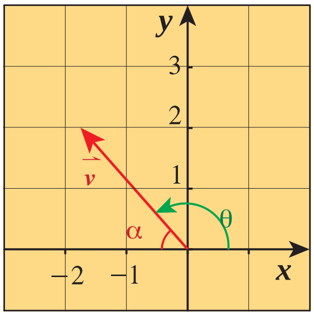
56.30993247

اضغط على: ° ' " يظهر على الشاشة

56°18'35.76"

b $\vec{v} = < -\sqrt{2}, 2 >$

$\| \vec{v} \| = \sqrt{(-\sqrt{2})^2 + (2)^2} = \sqrt{6}$ units



نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{v}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{2}{-\sqrt{2}}\right| = +\sqrt{2}$

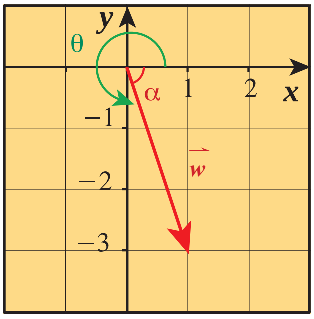
$\therefore \ \alpha \approx 54^\circ\, 44'\, 8.2''$ باستخدام الآلة الحاسبة

$\because \ x < 0 \ , \ y > 0 \ \therefore \ \theta = 180^\circ - \alpha$

$\therefore \ \theta \approx 125^\circ\, 15'\, 51.8''$

c $\vec{w} = < 1, -3 >$

$\| \vec{w} \| = \sqrt{1 + (-3)^2} = \sqrt{10}$ units



نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{w}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-3}{1}\right| = 3$

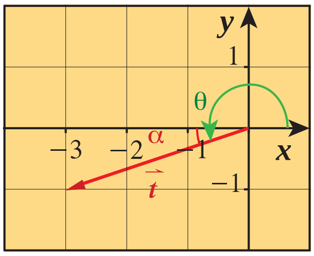
$\therefore \ \alpha \approx 71^\circ\, 33'\, 54.18''$

$\because \ x > 0 \ , \ y < 0 \ \therefore \ \theta = 360^\circ - \alpha$

$\therefore \ \theta \approx 288^\circ\, 26'\, 5.32''$ باستخدام الآلة الحاسبة

d $\vec{t} = < -3, -1 >$

$\| \vec{t} \| = \sqrt{(-3)^2 + (-1)^2} = \sqrt{10}$ units



نفرض أن θ هو قياس الزاوية التي يصنعها $\vec{t}$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات

وأن زاوية الإسناد α

$\tan\alpha = \left|\frac{y}{x}\right| = \left|\frac{-1}{-3}\right| = \frac{1}{3}$

$\therefore \ \alpha \approx 18^\circ\, 26'\, 5.82''$

$\because \ x < 0 \ , \ y < 0 \ \therefore \ \theta = 180^\circ + \alpha$

$\therefore \ \theta \approx 198^\circ\, 26'\, 5.82''$

حاول أن تحل

3 لكل من المتجهات التالية ارسم متجه الموضع ثم أوجد معيار المتجه وقياس الزاوية θ التي يصنعها المتجه مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

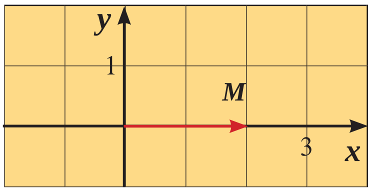
a $\vec{m} = < 2, 2 >$

b $\vec{n} = < -1, -2 >$

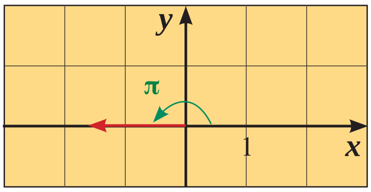
c $\vec{p} = < -2, 3 >$

d $\vec{q} = < 1, -4 >$

ملاحظة:



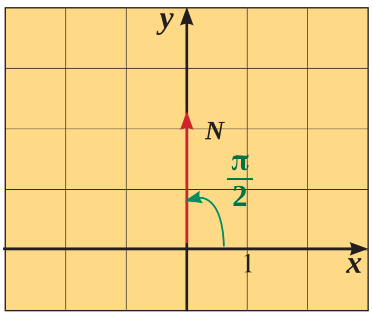
1 المتجه $\vec{u} = < x, 0 >$ هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل $O(0, 0)$ ونهايته $M(x, 0)$ ومعياره $|x|$ وحدة طول.

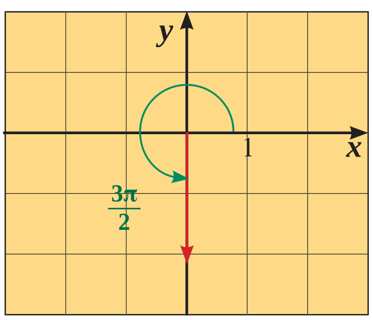


إذا كانت $x > 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = 0$ أما إذا كانت $x < 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \pi$.

2 المتجه $\vec{v} = < 0, y >$ هو متجه موضع بدايته نقطة الأصل ونهايته $N(0, y)$ ومعياره $|y|$ وحدة طول.

فإذا كانت $y > 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \frac{\pi}{2}$. أما إذا كانت $y < 0$، فإن قياس الزاوية التي يصنعها مع الاتجاه الموجب لمحور السينات هو $\theta = \frac{3\pi}{2}$





معلومة:

المتجه $\vec{i} = < 1, 0 >$ هو متجه الوحدة الأساسي في اتجاه محور السينات.

المتجه $\vec{j} = < 0, 1 >$ هو متجه الوحدة الأساسي في اتجاه محور الصادات.

3 المتجه $< 0, 0 >$ هو متجه معياره صفر وليس له اتجاه معلوم ويرمز له بالرمز $\vec{0}$.

متجه الوحدة The Unit Vector

معلومة:

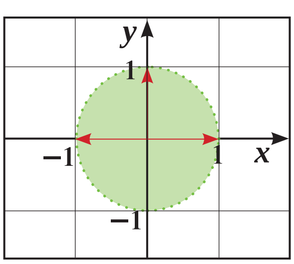
لكل نقطة A في المستوى يكون $\overrightarrow{AA}$ متجهًا صفريًا.

تعريف

المتجه $\vec{U} = < x, y >$ هو متجه وحدة إذا كان معياره يساوي الوحدة أي أن:

$$\|\vec{U}\| = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$$

فمثلًا $< 1, 0 >$ ، $< 0, 1 >$ ، $< -1, 0 >$ ، $< \frac{4}{5}, \frac{3}{5} >$ هي متجهات وحدة.



مثال (4)

إذا كان $\vec{u} = < \frac{2}{\sqrt{5}}, y >$ فأوجد قيمة y بحيث يصبح $\vec{u}$ متجه وحدة.

الحل:

يكون $\vec{u}$ متجه وحدة عندما:

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2+y^2} = 1$$

$$\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2 + y^2} = 1$$

بتربيع طرفي المعادلة

$$\frac{4}{5} + y^2 = 1$$

$$y^2 = 1 - \frac{4}{5}$$

$$y^2 = \frac{1}{5}$$

$$\therefore \; y = \frac{1}{\sqrt{5}} \text{ أو } y = \frac{-1}{\sqrt{5}}$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{v} = < x , \frac{12}{13} >$. فأوجد قيمة x بحيث يصبح $\vec{v}$ متجه وحدة.

تساوي متجهين Two Equal Vectors

ليكن: $\vec{A} = < x_A , y_A > , B = < x_B , y_B >$

$$\vec{A} = \vec{B} \Longleftrightarrow x_A = x_B \; , \; y_A = y_B$$

ونلاحظ أن المتجهات المتساوية لها نفس الطول ونفس الاتجاه.

مثال (5)

إذا كانت $S(-1, 6)$, $R(-4, 2)$, $P(3, 4)$, $O(0, 0)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{RS} > = < \overrightarrow{OP} >$.

الحل:

نوجد المركبات السينية والمركبات الصادية لكل من المتجهين:

$$< \overrightarrow{RS} > = < x_S - x_R , y_S - y_R > = < -1-(-4) , 6-2 > = < 3,4 >$$

$$< \overrightarrow{OP} > = < x_P - x_O \; , \; y_P - y_O > = < 3-0 \; , \; 4-0 > = < 3,4 >$$

$\because$ للمتجهين المركبات نفسها

$\therefore$ المتجهان متساويان: $< \overrightarrow{RS} > = < \overrightarrow{OP} >$

حاول أن تحل

5 إذا كانت $A(0,1), B(1,3), C(3,6), D(4,8)$ في المستوى الإحداثي فأثبت أن: $< \overrightarrow{AB} > = < \overrightarrow{CD} >$

مثال (6)

ليكن المتجهان $\overrightarrow{A} = < 2x+1,\ 3y-1 >,\ \overrightarrow{B} = < 3,2 >$ ، حيث x , y عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا x , y اللتين تحققان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$.

الحل:

$$\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B} \Longrightarrow 2x+1=3 \quad , \quad 3y-1=2$$

$$2x+1=3 \Longrightarrow 2x=2 \Longrightarrow x=1$$

$$3y-1=2 \Longrightarrow 3y=3 \Longrightarrow y=1$$

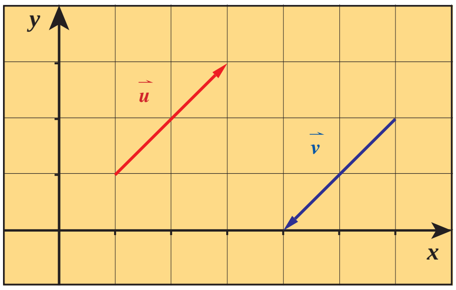
$$\therefore \ x=1 \ , \ y=1$$

حاول أن تحل

6 ليكن المتجهان $\overrightarrow{A} = < -2x+3, 4y-1 >,\ \overrightarrow{B} = < -1,3 >$ ، حيث x , y عددان حقيقيان.

أوجد قيمتا x , y اللتين تحققان $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$.

المتجه المعاكس The Opposite Vector



- إذا كان $\overline{u} = < a,b >$ فإن المتجه $\overline{v} = < -a, -b >$ هو المتجه المعاكس لِـ $\overline{u}$
- مركبات المتجه المعاكس هي المعكوس الجمعي لمركبات المتجه.
- المتجه $< \overline{BA} >$ هو متجه معاكس للمتجه $< \overline{AB} >$
- $< \overline{AB} > = - < \overline{BA} >$

مثال (7)

في الشكل المقابل أوجد:

a متجهين متساويين.

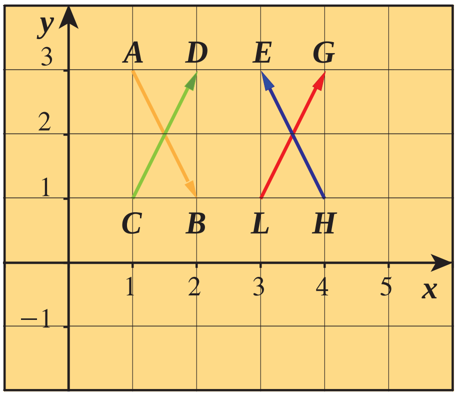
b متجهين متعاكسين.

الحل:

a من الرسم المقابل يبدو أن $\overline{CD}$, $\overline{LG}$ متساويان.

للتحقق نبدأ أولاً بقراءة إحداثيات كل من النقاط G, L, D, C

ثم نوجد مركبات كل من المتجهين $< \overline{CD} >$, $< \overline{LG} >$



$$\because \ C(1,1), D(2,3)$$

$$\therefore \ < \overline{CD} > = < x_D - x_C , y_D - y_C > = < 1,2 >$$

$$\because \ L(3,1), G(4,3)$$

$$\therefore \ < \overline{LG} > = < x_G - x_L , y_G - y_L > = < 1,2 >$$

$$\therefore \ < \overline{CD} > = < \overline{LG} >$$

b من الشكل يبدو أن $<\overrightarrow{AB}>$, $<\overrightarrow{HE}>$ متعاكسان.

نكرر الخطوات التي اتبعت في **a** .

$\because\ A(1,3)\ ,\ B(2,1)$

$<\overrightarrow{AB}> = <x_B - x_A, y_B - y_A> = <1, -2>$

$\because\ E(3,3)\ ,\ H(4,1)$

$\therefore <\overrightarrow{HE}> = <x_E - x_H, y_E - y_H> = <-1, 2>$

$\therefore$ مركبات $<\overrightarrow{AB}>$ هي المعكوس الجمعي لمركبات $<\overrightarrow{HE}>$

$\therefore$ نستنتج أن المتجهين $<\overrightarrow{AB}>$, $<\overrightarrow{HE}>$ متعاكسان.

حاول أن تحل

7 ارسم متجه الموضع للمتجه $\vec{u}$ حيث مركباته $<1, 2>$.

من النقطة $A(2, -1)$ ارسم متجهًا مساويًا للمتجه $\vec{u}$ ومتجهًا معاكسًا للمتجه $\vec{u}$ واكتب مركباتهما.

ضرب متجه في عدد حقيقي Multiplying a Vector by a Real Number

$\vec{u}$ متجه غير صفري، k عدد حقيقي غير صفري $(k \in \mathbb{R}^*)$

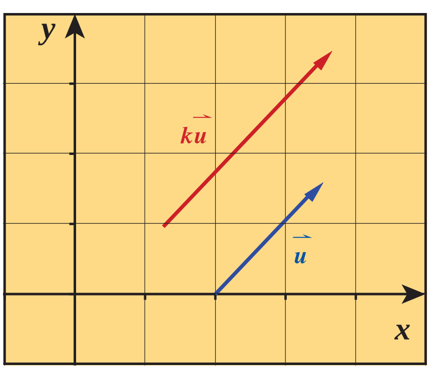
إن ناتج ضرب المتجه $\vec{u}$ بالعدد k هو متجه ونرمز إليه بـ $k\vec{u}$

$\because\ \vec{u} = <x, y> \quad \therefore\ k\vec{u} = <kx, ky>$

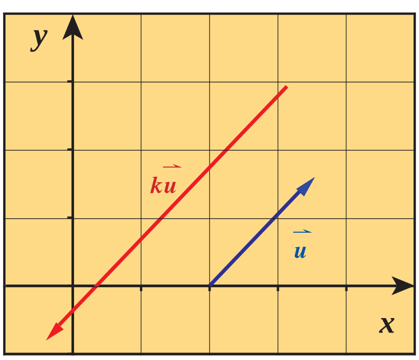
ملاحظة:

- إذا كان $\vec{u} = \vec{0}$ أو $k = 0$، فإن $k\vec{u} = \vec{0}$ والعكس صحيح.
- يكون للمتجهين $\vec{u}$, $k\vec{u}$ **الاتجاه نفسه** إذا كان $k > 0$

  ويكون $k\vec{u}$ **في الاتجاه المعاكس للمتجه** $\vec{u}$ إذا كان $k < 0$
- تعطى العلاقة بين طولي المتجهين $\vec{u}$, $k\vec{u}$ كالتالي: $\|k\vec{u}\| = |k|\,\|\vec{u}\|$.



$k > 0$



$k < 0$

تذكر:

تمثل $|k|$ القيمة المطلقة للعدد الحقيقي k.

وتعرّف كما يلي:

$$|k| = \begin{cases} k : & k > 0 \\ 0 : & k = 0 \\ -k : & k < 0 \end{cases}$$

خواص

1 يكون للمتجهين غير الصفريين $<\overrightarrow{CD}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ الاتجاه نفسه إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي موجب k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{CD}>$

2 يكون للمتجهين غير الصفريين $<\overrightarrow{CD}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ اتجاهين متعاكسين إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي سالب k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{CD}>$

3 تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي غير صفري k يحقق $<\overrightarrow{AB}>=k<\overrightarrow{AC}>$

مثال (8)

إذا كان $\overrightarrow{A}=<-1,2>$ فأوجد:

a $2\overrightarrow{A}$ b $-\overrightarrow{A}$ c $0.5\overrightarrow{A}$

الحل:

a $2\overrightarrow{A}=<2(-1),2(2)>=<-2,4>$

b $-\overrightarrow{A}=<-(-1),-(2)>=<1,-2>$

c $0.5\overrightarrow{A}=<0.5(-1),0.5(2)>=<-0.5,1>$

حاول أن تحل

8 إذا كان $\overrightarrow{B}=<3,-2>$ فأوجد:

a $3\overrightarrow{B}$ b $-5\overrightarrow{B}$ c $\frac{3}{2}\overrightarrow{B}$

مثال (9)

باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $A(2,3)$, $B(-2,5)$, $C(10,-1)$ على استقامة واحدة.

الحل:

لكي نثبت أن النقاط A, B, C على استقامة واحدة نحدد أحد المتجهات وليكن $\overrightarrow{AB}$ ثم نبحث عن متجه آخر يساوي $k<\overrightarrow{AB}>$ حيث k عدد حقيقي غير صفري.

$$<\overrightarrow{AB}>=<x_B-x_A, y_B-y_A>=<-2-2, 5-3>$$
$$=<-4,2>$$

نختبر المتجه $<\overrightarrow{AC}>$

$$<\overrightarrow{AC}>=<x_C-x_A, y_C-y_A>=<10-2, -1-3>$$

$= < 8, -4 >$

$\because \; < \overrightarrow{AC} > = -2 < \overrightarrow{AB} >$

أي أن $< \overrightarrow{AC} > = k < \overrightarrow{AB} >$

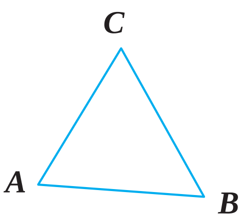
$\therefore$ النقاط A, B, C على استقامة واحدة.

حاول أن تحل

9 باستخدام خواص المتجهات أثبت أن النقاط $K(0,-1)$, $L(2,3)$, $M(-2,-5)$ على استقامة واحدة.

مثال (10)

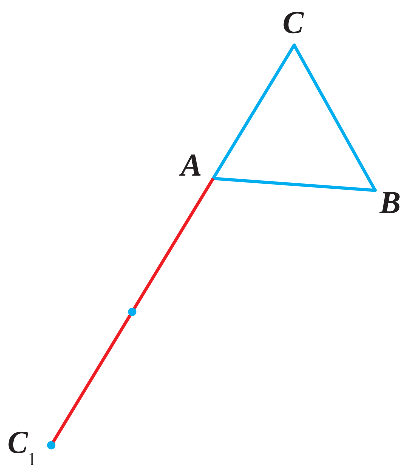
ABC مثلث



a ارسم $< \overrightarrow{CC_1} >$ بحيث $< \overrightarrow{CC_1} > = 3 < \overrightarrow{CA} >$

b ارسم $< \overrightarrow{AB_1} >$ بحيث $< \overrightarrow{AB_1} > = -2 < \overrightarrow{AB} >$

الحل:



a $< \overrightarrow{CC_1} > = 3 < \overrightarrow{CA} >$

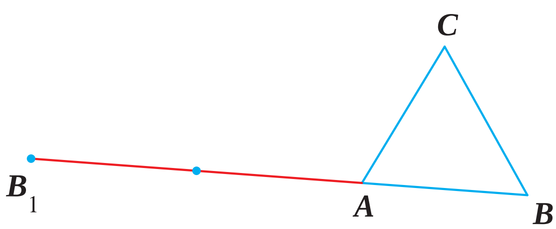
$\because$ $k = 3$ عدد موجب

$\therefore$ $< \overrightarrow{CC_1} >$ ، $< \overrightarrow{CA} >$ لهما الاتجاه نفسه.

C نقطة مشتركة $\therefore$ $C_1 \in \overrightarrow{CA} \Longleftarrow C_1, A, C$ على استقامة واحدة

نرسم على $\overrightarrow{CA}$ النقطة C_1 بحيث إن $\|\overrightarrow{CC_1}\| = 3\|\overrightarrow{CA}\|$

فيكون $< \overrightarrow{CC_1} >$ في نفس اتجاه $< \overrightarrow{CA} >$



b $< \overrightarrow{AB_1} > = -2 < \overrightarrow{AB} >$

$\because$ $k = -2$ عدد سالب

$\therefore$ $< \overrightarrow{AB_1} >$, $< \overrightarrow{AB} >$ لهما اتجاهان متعاكسان

$\because$ A نقطة مشتركة

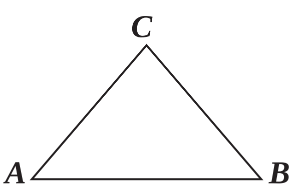
$\therefore$ $B_1 \in \overrightarrow{BA}$

$|k| = 2$

نرسم على $\overrightarrow{BA}$ النقطة B_1 بحيث إن $\|\overrightarrow{AB_1}\| = 2\|\overrightarrow{AB}\|$

فيكون $< \overrightarrow{AB_1} >$ في اتجاه معاكس للمتجه $< \overrightarrow{AB} >$

حاول أن تحل



10 ABC مثلث، ارسم $< \overrightarrow{AD} >$ بحيث $< \overrightarrow{AD} > = 3 < \overrightarrow{AB} >$،

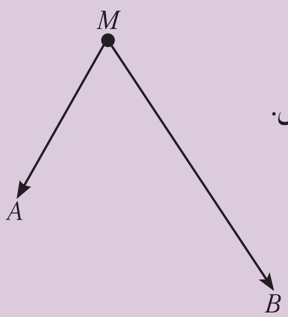
ثم ارسم $< \overrightarrow{BH} >$ بحيث $< \overrightarrow{BH} > = -\frac{3}{2} < \overrightarrow{BC} >$

5-2

جمع المتجهات وطرحها

Addition and Subtraction of Vectors

دعنا نفكر ونتناقش



M جسيم نقطي يتعرّض إلى قوتين $\overrightarrow{MA}$، $\overrightarrow{MB}$ كما في الشكل.

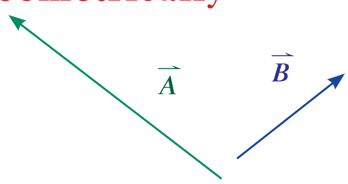
ما هو مسار الجسيم M المتأثر بهاتين القوتين؟

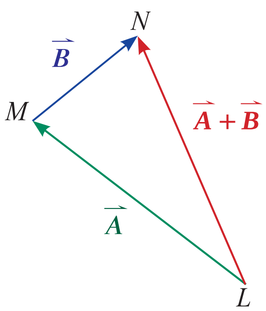
1. أكمل رسم متوازي الأضلاع $AMBC$، ثم ارسم $\overrightarrow{MC}$.
2. هل يتغير مسار الجسيم M إذا تغيّر قياس الزاوية AMB؟
أعد رسم الشكل أعلاه مع قياس $A\hat{M}B$ أصغر من القياس أعلاه.
ارسم متوازي الأضلاع $AMBC$، ثم $\overrightarrow{MC}$. ماذا تستنتج؟
3. هل يتغير مسار الجسيم M إذا تغير $\|\overrightarrow{MB}\|$؟
أعد رسم الشكل أعلاه مع $\|\overrightarrow{MB}\|$ أصغر مما هو معطى.
ارسم متوازي الأضلاع $AMBC$، ثم $\overrightarrow{MC}$. ماذا تستنتج؟

جمع المتجهات هندسيًّا Adding of Vectors Geometrically

$\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ متجهان.

أوجد: $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}$.





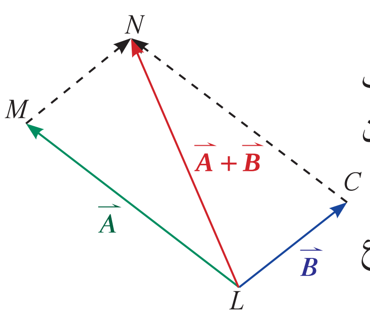
- **علاقة شال**

إذا كانت L نقطة من المستوي، فإننا نرسم $<\overrightarrow{LM}>$ بحيث يكون $\overrightarrow{A}=<\overrightarrow{LM}>$، ثم نرسم $<\overrightarrow{MN}>$ بحيث يكون $\overrightarrow{B}=<\overrightarrow{MN}>$

فيكون $\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B}=<\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{MN}>=<\overrightarrow{LN}>$

لأي ثلاث نقاط في المستوى تسمى العلاقة: $<\overrightarrow{LN}>=<\overrightarrow{MN}>+<\overrightarrow{LM}>$ علاقة شال.

- **إكمال متوازي الأضلاع**



إذا كانت L نقطة من المستوي، فإننا نرسم $<\overrightarrow{LM}>$ بحيث يكون $\overrightarrow{A}=<\overrightarrow{LM}>$، ونرسم $<\overrightarrow{LC}>$ بحيث يكون $\overrightarrow{B}=<\overrightarrow{LC}>$

N هي النقطة من المستوي التي تكمل متوازي الأضلاع $MLCN$.

$$\begin{aligned}\overrightarrow{A}+\overrightarrow{B} &= <\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{LC}> \\ &= <\overrightarrow{LM}>+<\overrightarrow{MN}> \qquad <\overrightarrow{LC}>=<\overrightarrow{MN}> \\ &= <\overrightarrow{LN}> \qquad \text{علاقة شال}\end{aligned}$$

سوف تتعلم

- جمع المتجهات.
- طرح المتجهات.
- خصائص جمع المتجهات.
- كتابة متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين.
- مركّبات المتجهات.
- إحداثيات منتصف قطعة مستقيمة.

المفردات والمصطلحات:

- جمع المتجهات Adding Vectors
- علاقة شال Chasle's Relation
- قانون متوازي الأضلاع Parallelogram Law
- مركبات المتجهة Vector Components

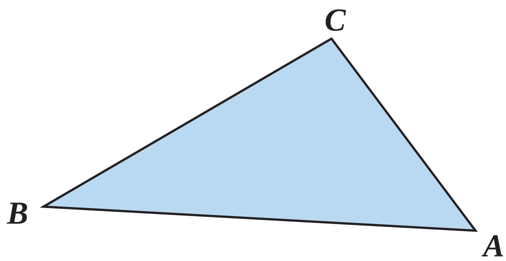
معلومة:

ميشال شال
Michel Chasles
عالم رياضيات فرنسي اشتهر بالمعادلة التي تحمل اسمه:
$<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>=<\overrightarrow{AC}>$

مثال (1)

ABC مثلث. عيّن: **a** M حيث $<\overrightarrow{AM}> = <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{AC}>$

b L حيث $<\overrightarrow{AL}> = <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BC}>$

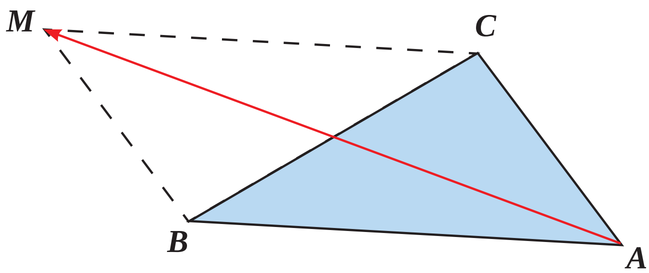


الحل:

a $<\overrightarrow{AM}> = <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{AC}>$

للمتجهين $<\overrightarrow{AC}>$, $<\overrightarrow{AB}>$ نقطة بداية مشتركة

$\therefore$ M هي النقطة التي تكمل متوازي الأضلاع $BACM$



b علاقة شال

$<\overrightarrow{AL}> = <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{BC}> = <\overrightarrow{AC}>$

$\because <\overrightarrow{AL}> = <\overrightarrow{AC}>$

$\therefore L = C$

حاول أن تحل

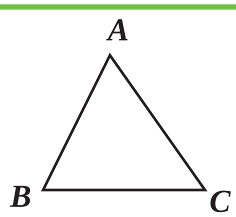
1 ABC مثلث. عيّن: **a** M حيث $<\overrightarrow{BM}> = <\overrightarrow{BA}> + <\overrightarrow{BC}>$

b N حيث $<\overrightarrow{BN}> = <\overrightarrow{BC}> + <\overrightarrow{CA}>$

مثال (2)

في المثلث ABC عيّن L بحيث $<\overrightarrow{BL}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{BC}>$

مع توضيح خطوات الحل.

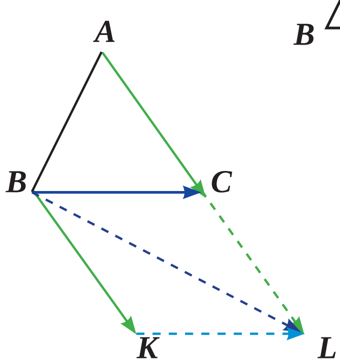


الحل:

نرسم $<\overrightarrow{BK}>$ حيث $<\overrightarrow{BK}> = <\overrightarrow{AC}>$

بالتعويض في المعادلة $<\overrightarrow{BL}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{BC}>$

تصبح $<\overrightarrow{BL}> = <\overrightarrow{BK}> + <\overrightarrow{BC}>$



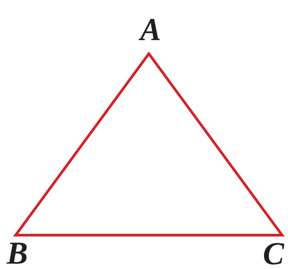
$\because$ للمتجهين $<\overrightarrow{BK}>$, $<\overrightarrow{BC}>$ نقطة بداية مشتركة

$\therefore$ نستخدم الحالة العامة لجمع متجهين

ونكمل متوازي الأضلاع $CBKL$

فيكون $<\overrightarrow{BL}> = <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{BC}>$

لاحظ أن $L \in \overrightarrow{AC}$



حاول أن تحل

2 في المثلث ABC، عيّن N بحيث $<\overrightarrow{BN}> = <\overrightarrow{BA}> + <\overrightarrow{CA}>$

لأي ثلاثة متجهات $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ في المستوي

- خاصية الإبدال في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}=\vec{B}+\vec{A}$
- خاصية العنصر المحايد $\vec{0}$ $\vec{A}+\vec{0}=\vec{0}+\vec{A}=\vec{A}$
- خاصية التجميع في جمع المتجهات $\vec{A}+\vec{B}+\vec{C}=(\vec{A}+\vec{B})+\vec{C}=\vec{A}+(\vec{B}+\vec{C})$
- خاصية المعكوس الجمعي $\vec{A}+(-\vec{A})=(-\vec{A})+\vec{A}=\vec{0}$
- خاصية الحذف $\vec{A}+\vec{C}=\vec{B}+\vec{C} \Rightarrow \vec{A}=\vec{B}$
- خاصية التوزيع مع عدد حقيقي غير الصفر $K(\vec{A}+\vec{B})=K\vec{A}+K\vec{B}$

مثال (3)

ABC مثلث. أوجد:

b $\vec{K}=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>$

a $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>$

الحل:

a $\vec{L}=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{CB}>$

خاصية التجميع $=(<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{BA}>)+<\overrightarrow{CB}>$

خاصية الإبدال $=(<\overrightarrow{BA}>+<\overrightarrow{AC}>)+<\overrightarrow{CB}>$

علاقة شال $=<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{CB}>$

علاقة شال $=<\overrightarrow{BB}>$

$\overrightarrow{BB}$ المتجه الصفري $=\vec{0}$

b $\vec{K}=<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>$

خاصية التجميع $=(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CA}>)+(<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{AB}>)$

خاصية الإبدال $=(<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{AB}>)+(<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{BC}>)$

علاقة شال $=<\overrightarrow{CB}>+<\overrightarrow{AC}>$

خاصية الإبدال $=<\overrightarrow{AC}>+<\overrightarrow{CB}>$

علاقة شال $=<\overrightarrow{AB}>$

حاول أن تحل

3 $ABCD$ مضلع. أوجد:

b $<\overrightarrow{AD}>+<\overrightarrow{CA}>+<\overrightarrow{BC}>+<\overrightarrow{DB}>$

a $<\overrightarrow{AB}>+<\overrightarrow{CD}>+<\overrightarrow{BC}>$

مجموع متجهين جبريًّا Adding Two Vectors Algebraically

تعريف

إذا كان $\overrightarrow{A} = < x_A, y_A >, \ \overrightarrow{B} = < x_B, y_B >$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن مجموع هذين المتجهين هو المتجه $< x_A + x_B, y_A + y_B >$ ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

أي أن: $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = < x_A + x_B, y_A + y_B >$

مثال (4)

إذا كان $\overrightarrow{A} = < 2,3 >$, $\overrightarrow{B} = < -1,5 >$ فأوجد:

a) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

b) $2\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B}$

الحل:

a)
$$\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = < x_A + x_B, y_A + y_B >$$
$$= < 2 + (-1), 3 + 5 >$$
$$= < 1,8 >$$

b)
$$2\overrightarrow{A} + 3\overrightarrow{B} = < 2x_A, 2y_A > + < 3x_B, 3y_B >$$
$$= < 2(2), 2(3) > + < 3(-1), 3(5) >$$
$$= < 4, 6 > + < -3, 15 >$$
$$= < 4 - 3, 6 + 15 >$$
$$= < 1, 21 >$$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\overrightarrow{A} = < 4, -2 >, \overrightarrow{B} = < -7, 5 >$ فأوجد.

a) $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}$

b) $3\overrightarrow{A} + 5\overrightarrow{B}$

طرح المتجهات Subtracting Vectors

نحصل على ناتج طرح المتجه $\overrightarrow{B}$ من المتجه $\overrightarrow{A}$ بجمع المتجه $\overrightarrow{A}$ إلى المتجه المعاكس للمتجه $\overrightarrow{B}$

أي: $\overrightarrow{A} - \overrightarrow{B} = \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{B})$

مثال (5)

ABC مثلث. أثبت أن: $<\overrightarrow{AB}> - <\overrightarrow{AC}> = <\overrightarrow{CB}>$

الحل:

طرح المتجهات
$$<\overrightarrow{AB}> - <\overrightarrow{AC}> = <\overrightarrow{AB}> + <(-\overrightarrow{AC})>$$

$<\overrightarrow{CA}> = -<\overrightarrow{AC}>$
$$= <\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{CA}>$$

خاصية الإبدال
$$= <\overrightarrow{CA}> + <\overrightarrow{AB}>$$

علاقة شال
$$= <\overrightarrow{CB}>$$

حاول أن تحل

5 $ABCD$ مضلع في المستوي. أوجد:

a $<\overrightarrow{AB}> + <\overrightarrow{CD}> - <\overrightarrow{AD}> - <\overrightarrow{CB}>$

b $<\overrightarrow{AB}> - <\overrightarrow{AC}> + <\overrightarrow{BC}> + <\overrightarrow{AD}>$

الفرق بين متجهين جبريًا Difference of Two Vectors Algebraically

تعريف

إذا كان $\vec{A} = <x_A, y_A>, \vec{B} = <x_B, y_B>$ متجهين في المستوى الإحداثي فإن:

$$\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B}) = <x_A - x_B \ , y_A - y_B>$$

مثال (6)

إذا كان $\vec{A} = <5,12> \ , \vec{B} = <11,7>$ فأوجد:

a $\vec{A} - \vec{B}$

b $4\vec{A} - 6\vec{B}$

الحل:

a
$$\vec{A} - \vec{B} = <x_A - x_B \, , y_A - y_B>$$
$$= <5 - 11, 12 - 7>$$
$$= <-6, 5>$$

b
$$4\vec{A} - 6\vec{B} = <4x_A, 4y_A> - <6x_B, 6y_B>$$
$$= <4(5), 4(12)> - <6(11), 6(7)>$$
$$= <20, 48> - <66, 42>$$
$$= <20 - 66, 48 - 42>$$
$$= <-46, 6>$$

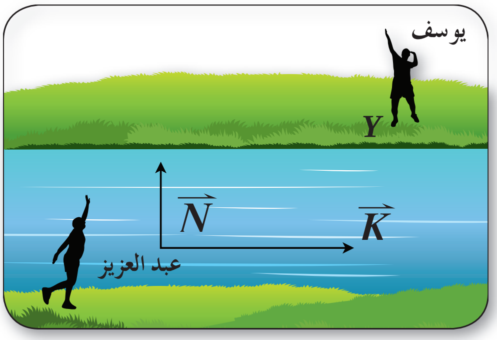
حاول أن تحل

6 إذا كان $\vec{A} = <-3, 0>, \vec{B} = <5, -9>$. فأوجد:

a $\vec{A} - \vec{B}$

b $-3\vec{A} + 4\vec{B}$

مثال (7) تطبيق حياتي (الفيزياء)

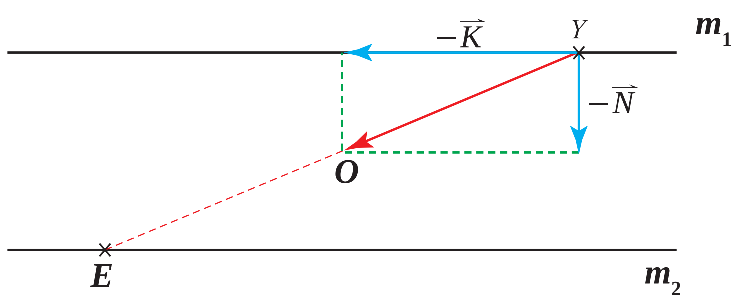


يريد عبد العزيز عبور النهر سباحة للوصول إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف على الضفة الثانية. في كل لحظة، تمثل قوّة التيار بالمتجه $\overrightarrow{K}$ ويمثل الجهد الذي يبذله عبد العزيز بالمتجه $\overrightarrow{N}$

عند أي موقع على الضفة الأولى يجب أن ينطلق عبد العزيز للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف؟

الحل:

يمثّل المستقيمان المتوازيان m_2 , m_1 ضفتي النهر وتمثّل النقطة Y موقع يوسف.



من Y، نرسم المتجه $-\overrightarrow{K}$ والمتجه $-\overrightarrow{N}$ وليكن $\overrightarrow{YO}$ ناتج جمع هذين المتجهين.

يقطع $\overrightarrow{YO}$ الضفة الأولى في E

$\therefore$ يجب أن ينطلق عبد العزيز من الموقع الممثل بالنقطة E للوصول بدقة إلى الموقع (Y) حيث يقف يوسف.

حاول أن تحل

7 تفكير ناقد: وضح لماذا بدأ الحل من موقع يوسف.

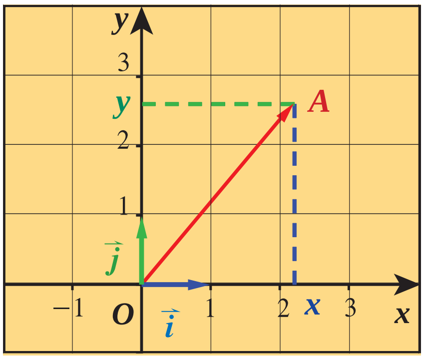
التعبير عن متجه بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين

Expressing a Vector in Terms of the Two Basic Unit Vectors

تعريف

- المتجه $\overrightarrow{i} = <1,0>$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(1, 0)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور السيني $(x-\text{axis})$»
- المتجه $\overrightarrow{j} = <0,1>$ الذي إحدى قطعه الموجهة متجه الموضع الذي نهايته النقطة $(0, 1)$ يسمى «متجه الوحدة الأساسي في اتجاه المحور الصادي $(y-\text{axis})$»

يمكن التعبير عن أي متجه $\overrightarrow{OA} = < x_A , y_A >$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}$, $\vec{j}$ كما يلي:



$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

$$x_A \vec{i} + y_A \vec{j} = x_A < 1,0 > + y_A < 0,1 >$$

$$= < x_A , 0 > + < 0 , y_A >$$

$$= < x_A , y_A >$$

$$= \overrightarrow{OA}$$

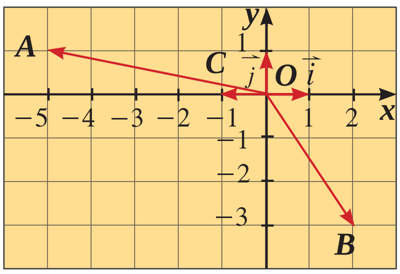
$\therefore$ $\overrightarrow{OA} = < x_A, y_A >$ يكتب بدلالة $\vec{i}, \vec{j}$ على الصورة:

$$\overrightarrow{OA} = x_A \vec{i} + y_A \vec{j}$$

كذلك $\vec{u} = < x,y >$ يكتب بدلالة $\vec{i}, \vec{j}$ على الصورة $\vec{u} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j}$

فمثلًا: $\overrightarrow{OM} = < 5 , 6 >$ يكتب بدلالة $\vec{i}, \vec{j}$ على الصورة $\overrightarrow{OM} = 5\,\vec{i} + 6\,\vec{j}$

مثال (8)



لتكن النقاط: $A(-5, 1),\ B(2, -3),\ C(-1, 0)$ على المستوى الإحداثي حيث مركزه النقطة O.

اكتب كلًّا من المتجهات $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}$, $\vec{j}$

الحل:

$\because\ A(-5,1) \quad \therefore\ < \overrightarrow{OA} > = -5\,\vec{i} + \vec{j}$ تعريف مركّبات المتجه

$\because\ B(2,-3) \quad \therefore\ < \overrightarrow{OB} > = 2\,\vec{i} + (-3\,\vec{j})$ تعريف مركّبات المتجه

$= 2\vec{i} - 3\vec{j}$

$\because\ C(-1,0) \quad \therefore\ < \overrightarrow{OC} > = (-1)\vec{i} + 0\,\vec{j}$ تعريف مركّبات المتجه

$= -\vec{i} + \vec{0}$

$= -\vec{i}$ $\qquad \vec{A} + \vec{O} = \vec{A}$

حاول أن تحل

8 لتكن النقاط: $A(3, 4),\ B(-2, 5),\ C(-4, -1)$

اكتب كلًّا من المتجهات: $< \overrightarrow{OC} >, < \overrightarrow{OB} >, < \overrightarrow{OA} >$، بدلالة متجهي الوحدة الأساسيين $\vec{i}$, $\vec{j}$.

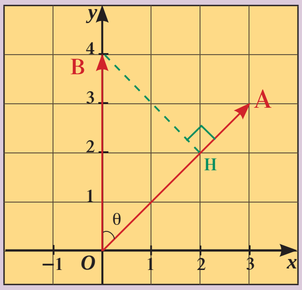
5-3

الضرب الداخلي
Scalar Product

سوف تتعلم
- الضرب الداخلي.
- إيجاد قياس الزاوية بين متجهين.
- متجه الوحدة.
- المتجهات المتوازية.

المفردات والمصطلحات:
- الضرب الداخلي
Scalar Product
- قياس الزاوية بين متجهين
Measure of Angle Between Two Vectors
- متجه الوحدة
Unit Vector

دعنا نفكر ونتناقش



في الشكل المقابل:

a أوجد $\|\overrightarrow{OA}\|$, $\|\overrightarrow{OB}\|$

b باستخدام المنقلة أوجد قياس الزاوية θ بين المتجهين $<\overrightarrow{OA}>, <\overrightarrow{OB}>$

c باستخدام الآلة الحاسبة أوجد قيمة $\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OB}\| \times \cos\theta$

d نسقط العمود $\overline{BH}$ على $\overrightarrow{OA}$ ويسمى $\overrightarrow{OH}$ مسقط $\overrightarrow{OB}$ على $\overrightarrow{OA}$

أوجد قيمة $\|\overrightarrow{OA}\| \times \|\overrightarrow{OH}\|$ وقارنها بما حصلت عليه في **c** .

نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$ بالرمز $(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ وكذلك نرمز للزاوية المحددة بالمتجهين $<\overrightarrow{AC}>, <\overrightarrow{BD}>$ بالرمز $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{BD})$

الضرب الداخلي لمتجهين Scalar Product

في المستوى الإحداثي لأي متجهين غير صفريين $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$

ناتج الضرب الداخلي لهما ويرمز له بالرمز $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}$ يساوي ناتج ضرب طولي المتجهين في جيب تمام قياس الزاوية المحددة بهما.

أي أن: $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \times \|\overrightarrow{B}\| \times \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$, $0° \leq m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \leq 180°$

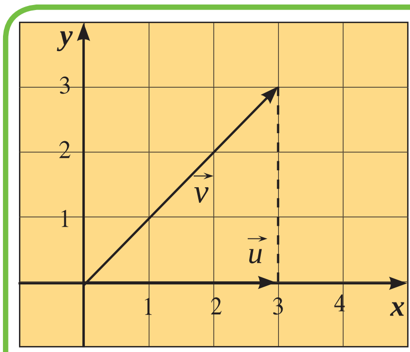
ملاحظة:
$m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B})$ تعني قياس الزاوية المحددة بالمتجهين $\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}$

مثال (1)

إذا كان $\overrightarrow{u} = <3,0>$, $\overrightarrow{v} = <3,3>$

فأوجد $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$.

الحل:



$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \times \|\overrightarrow{v}\| \times \cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

حيث

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{(3)^2 + (0)^2} = 3 \text{ units}$$

$$\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{(3)^2 + (3)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \text{ units}$$

$$\cos(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}) = \frac{3}{3\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

قياس الزاوية التي يصنعها المتجهان تساوي $45°$

ومنه

$$\therefore \ \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = 3(3\sqrt{2})\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 9$$

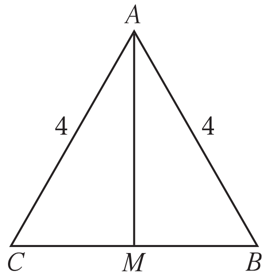
تذكر:
$\cos\theta = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$

حاول أن تحل

1 إذا كان $\overrightarrow{u} = <0,2>$, $\overrightarrow{v} = <2,2>$ فأوجد $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}$

مثال (2)

ABC مثلث متطابق الأضلاع. M منتصف $\overline{BC}$ أوجد:



a $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}$ **b** $\overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC}$ **c** $\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB}$

الحل:

a تعريف الضرب الداخلي

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = \|\overrightarrow{AC}\| \times \|\overrightarrow{AB}\| \cos(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AB})$$

عوّض

$$= 4 \times 4 \times \cos 60^\circ$$

$$= 4 \times 4 \times \frac{1}{2}$$

$$= 8$$

b $\because$ M منتصف $\overline{BC}$

$\therefore MB = MC = 2$

تعريف الضرب الداخلي

$$\therefore \overrightarrow{MB} \cdot \overrightarrow{MC} = \|\overrightarrow{MB}\| \times \|\overrightarrow{MC}\| \cos(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MC})$$

عوّض

$$= 2 \times 2 \times \cos(180^\circ)$$

$$= -4$$

c تعريف الضرب الداخلي

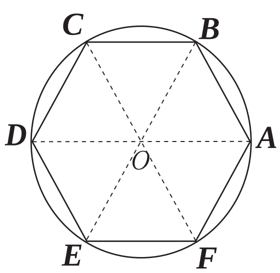
$$\overrightarrow{CM} \cdot \overrightarrow{CB} = \|\overrightarrow{CM}\| \times \|\overrightarrow{CB}\| \cos(\overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CB})$$

عوّض

$$= 2 \times 4 \times \cos(0^\circ)$$

$$= 8$$

حاول أن تحل



2 $ABCDEF$ مضلع سداسي منتظم محاط بدائرة مركزها O، حيث طول نصف قطرها 1 cm أوجد:

a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OD}$ **b** $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB}$ **c** $\overrightarrow{CB} \cdot \overrightarrow{EF}$

d $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{DE}$ **e** $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OF}$

قانون

إذا كان $\overrightarrow{A} = \langle x_A, y_A \rangle, \overrightarrow{B} = \langle x_B, y_B \rangle$ متجهين في المستوي الإحداثي

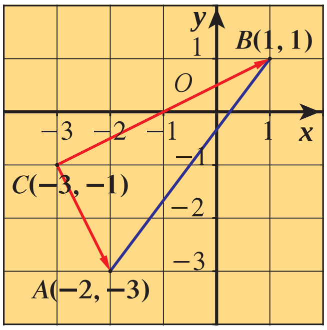
فإن $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = x_A \cdot x_B + y_A \cdot y_B$

فإذا كان: $\overrightarrow{A} = \langle x_A, y_A \rangle$ فإن $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{A} = x_A^2 + y_A^2 = \|\overrightarrow{A}\|^2$

نتيجة (1)

$\overrightarrow{A} \perp \overrightarrow{B} \Leftrightarrow \overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = 0$ حيث $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}\ ,\ \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}$

مثال (3)



إذا كانت $A(-2,-3),\ B(1,1),\ C(-3,-1)$ هي رؤوس المثلث ABC .

a اكتب كلًّا من المتجهين $<\overrightarrow{CB}>$, $<\overrightarrow{CA}>$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{j}$, $\vec{i}$.

b أوجد قيمة $<\overrightarrow{CA}>\bullet<\overrightarrow{CB}>$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\hat{C}$

الحل:

a $<\overrightarrow{CA}>=<-2-(-3),-3-(-1)>=<1,-2>$

إحداثيات المتجه $<\overrightarrow{CA}>=\vec{i}-2\vec{j}$

$<\overrightarrow{CB}>=<1-(-3),1-(-1)>=<4,2>$

إحداثيات المتجه $<\overrightarrow{CB}>=4\vec{i}+2\vec{j}$

قانون الضرب الداخلي b $<\overrightarrow{CA}>\bullet<\overrightarrow{CB}>=1\times 4+(-2)\times 2=0$

c $\because\ <\overrightarrow{CA}>\bullet<\overrightarrow{CB}>=0$

$\therefore\ <\overrightarrow{CA}>\perp<\overrightarrow{CB}>$

ومنه قياس الزاوية $(\overrightarrow{CB}$ ،$\overrightarrow{CA})$ يساوي $90°$ وبالتالي المثلث ABC قائم في $\widehat{C}$

حاول أن تحل

3 إذا كانت النقاط $A(6,-1),\ B(3,2),\ C(2,1)$

a اكتب كلًّا من المتجهين $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ بدلالة متجهي الوحدة $\vec{j}$, $\vec{i}$

b أوجد قيمة $\overrightarrow{BA}\bullet\overrightarrow{BC}$

c أثبت أن المثلث ABC قائم في $\widehat{B}$

مثال (4)

إذا كان $\vec{A}=<-2,3>,\ \vec{B}=<1,y>$ وكان $\vec{A}\perp\vec{B}$ فأوجد قيمة y

الحل:

$\because\ \vec{A}\perp\vec{B}$

$\therefore\ \vec{A}\bullet\vec{B}=0$

$x_A\bullet x_B+y_A\bullet y_B=0$

$(-2)(1)+(3)(y)=0$

$-2+3y=0$

$y=\frac{2}{3}$

حاول أن تحل

4 إذا كان $\vec{A}=<3,-1>,\ \vec{B}=<x,-2>$ وكان $\vec{A}\perp\vec{B}$ فأوجد قيمة x

نتيجة (2)

$$\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}\ ,\ \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0} \quad \text{حيث} \quad \overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} \Longleftrightarrow \overrightarrow{A} = k\,\overrightarrow{B}$$

ملاحظة: $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B} \Longleftrightarrow x_A \cdot y_B - x_B\, y_A$

حيث: $\overrightarrow{A} \neq \overrightarrow{0}\ ,\ \overrightarrow{B} \neq \overrightarrow{0}\ ,\ \overrightarrow{A} = < x_A , y_A >, \overrightarrow{B} = < x_B , y_B >$

مثال (5)

a أثبت أن: $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A} = <-7, 5>\ ,\ \overrightarrow{B} = <14, -10>$

b إذا كان $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A} = <6, -8>\ ,\ \overrightarrow{B} = <2, y>$ فأوجد قيمة y

الحل:

a طريقة أولى:

$$\frac{x_A}{x_B} = \frac{-7}{14} = \frac{-1}{2}\ ,\ \frac{y_A}{y_B} = \frac{5}{-10} = \frac{-1}{2}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{A} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{B} \Longrightarrow \overrightarrow{A} = k\,\overrightarrow{B}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$$

طريقة ثانية:

$$x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = (-7)(-10) - 14 \times 5 = 70 - 70 = 0$$

$$\therefore\ \overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$$

b طريقة أولى:

$$\because\ \overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$$

$$\therefore\ \overrightarrow{A} = k\,\overrightarrow{B}$$

$$<6, -8> = k < 2, y >$$

$$= < 2k, ky >$$

$$\therefore\ 6 = 2k \Longrightarrow k = 3$$

$$-8 = ky \Longrightarrow -8 = 3y \Longrightarrow y = -\frac{8}{3}$$

طريقة ثانية:

$$x_A \cdot y_B - x_B \cdot y_A = 0$$

$$6y - 2(-8) = 0$$

$$6y - 16 = 0$$

$$y = \frac{-16}{6} = \frac{-8}{3}$$

حاول أن تحل

5 a أثبت أن: $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ حيث $\overrightarrow{A} = <3, -2>\ ,\ \overrightarrow{B} = <6, -4>$

b إذا كان $\overrightarrow{A} \parallel \overrightarrow{B}$ ، $\overrightarrow{A} = <\frac{7}{3}, \frac{2}{3}>\ ,\ \overrightarrow{B} = <x, \frac{4}{5}>$ فأوجد x

$\overrightarrow{A}\,,\,\overrightarrow{B}\,,\,\overrightarrow{C}$ ثلاثة متجهات غير صفرية في المستوى، k عدد حقيقي.

- خاصية الإبدال $\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}$
- خاصية التجميع مع عدد حقيقي غير صفري $\overrightarrow{A}\cdot(k\overrightarrow{B})=(k\overrightarrow{A})\cdot\overrightarrow{B}=k(\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B})$
- خاصية توزيع الضرب الداخلي على جمع المتجهات أو طرحها $\overrightarrow{A}\cdot(\overrightarrow{B}\pm\overrightarrow{C})=\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}\pm\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{C}$

مثال (6)

$\overrightarrow{A}\,,\,\overrightarrow{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\overrightarrow{A}\|=3,\ \|\overrightarrow{B}\|=2,\ \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=-3$

أوجد قيمة $(4\overrightarrow{A}-3\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{A}+2\overrightarrow{B})$

الحل:

$(4\overrightarrow{A}-3\overrightarrow{B})\cdot(\overrightarrow{A}+2\overrightarrow{B})$

خاصية التوزيع $=4\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}+4\overrightarrow{A}\cdot2\overrightarrow{B}-3\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}-3\overrightarrow{B}\cdot2\overrightarrow{B}$

خاصية التجميع $=4\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}+8\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}-3\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{A}-6\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}$

خاصية الإبدال $=4\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}+8\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}-3\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}-6\overrightarrow{B}\cdot\overrightarrow{B}$

$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{A}=\|\overrightarrow{A}\|^2$ $\quad =4\|\overrightarrow{A}\|^2+5\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}-6\|\overrightarrow{B}\|^2$

عوّض $=4\times3^2+5\times(-3)-6\times2^2$

$=36-15-24$

$=-3$

حاول أن تحل

6 $\overrightarrow{A}\,,\,\overrightarrow{B}$ متجهان في المستوي، حيث $\|\overrightarrow{A}\|=3,\|\overrightarrow{B}\|=4,\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B}=5$

أوجد قيمة $(3\overrightarrow{A}-2\overrightarrow{B})\cdot(-\overrightarrow{A}+3\overrightarrow{B})$

قياس الزاوية بين متجهين

Measure of Angle between Two Vectors

لإيجاد قياس الزاوية بين متجهين غير صفريين $\vec{A}$ ، $\vec{B}$

حيث $\vec{A} = < x_A , y_A >$ ، $\vec{B} = < x_B , y_B >$

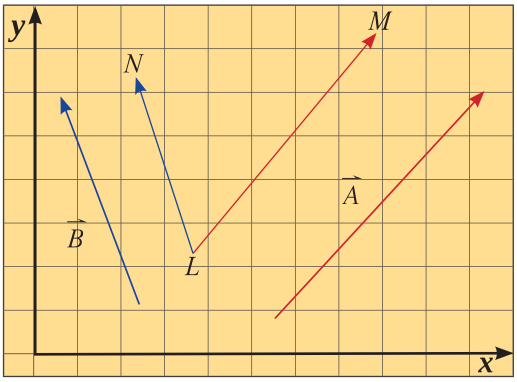
اكتب صيغتي الضرب الداخلي $\vec{A} \cdot \vec{B}$:

(1) $\vec{A} \cdot \vec{B} = x_A x_B + y_A y_B$

(2) $\vec{A} \cdot \vec{B} = \| \vec{A} \| \cdot \| \vec{B} \| \cos(\vec{A}, \vec{B})$

$$\therefore \ \| \vec{A} \| \cdot \| \vec{B} \| \cdot \cos(\vec{A}, \vec{B}) = x_A x_B + y_A y_B$$

$$\therefore \ \cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{x_A x_B + y_A y_B}{\| \vec{A} \| \cdot \| \vec{B} \|}$$



قانون

إذا كان $\vec{A}, \vec{B}$ ، متجهين وكان $\vec{A} \neq \vec{0}$ ، $\vec{B} \neq \vec{0}$ فإن:

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{A} \| \cdot \| \vec{B} \|} \quad , 0^\circ \leq m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$$

مثال (7)

إذا كان $\| \vec{A} \| = 5, \| \vec{B} \| = 6, \vec{A} \cdot \vec{B} = 15$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A}, \vec{B})$

الحل:

قانون

$$\cos(\vec{A}, \vec{B}) = \frac{\vec{A} \cdot \vec{B}}{\| \vec{A} \| \cdot \| \vec{B} \|} \quad , \quad 0^\circ \leq m(\vec{A}, \vec{B}) \leq 180^\circ$$

عوّض

$$= \frac{15}{5 \times 6} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \ m(\vec{A}, \vec{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

حاول أن تحل

7 إذا كان $\| \vec{A} \| = 3, \| \vec{B} \| = 2, \vec{A} \cdot \vec{B} = -3\sqrt{3}$

فأوجد قياس الزاوية $(\vec{A}, \vec{B})$

مثال (8)

أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\overrightarrow{A} = < 2, 2\sqrt{3} >, \overrightarrow{B} = < -4, 4\sqrt{3} >$

الحل:

$$\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \frac{\overrightarrow{A} \bullet \overrightarrow{B}}{\| \overrightarrow{A} \| \bullet \| \overrightarrow{B} \|} \quad , \qquad 0^\circ \le m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) \le 180^\circ$$

$$= \frac{x_A \bullet x_B + y_A \bullet y_B}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$

$$= \frac{2(-4) + 2\sqrt{3}(4\sqrt{3})}{\sqrt{(2)^2 + (2\sqrt{3})^2}\sqrt{(-4)^2 + (4\sqrt{3})^2}}$$

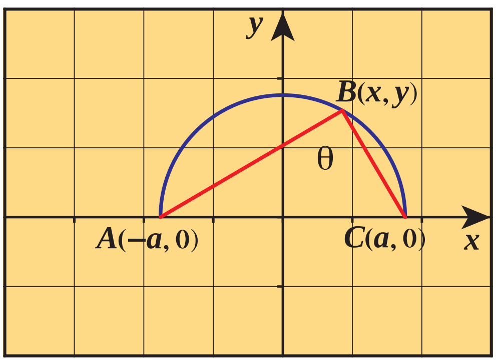
$$= \frac{-8 + 24}{(4)(8)} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}$$

$$\therefore \; m(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = 60^\circ$$

حاول أن تحل

8 أوجد قياس الزاوية المحددة بالمتجهين: $\overrightarrow{A} = < 6, 3 >, \overrightarrow{B} = < 3, -1 >$

مثال (9)



في الشكل المقابل، المثلث ABC محاط بنصف دائرة حيث معادلة الدائرة :

$x^2 + y^2 = a^2$

a أوجد مركبات كل من المتجهين $\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}$

b أوجد $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC}$. ما الذي يمكنك استنتاجه حول قياس الزاوية θ؟

الحل:

a

$$\overrightarrow{BA} = < x_A - x_B, y_A - y_B >$$

$$= < -a - x, 0 - y > = < -a - x, -y >$$

$$\overrightarrow{BC} = < x_C - x_B, y_C - y_B >$$

$$= < a - x, 0 - y > = < a - x, -y >$$

b

$$\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = (-a - x)(a - x) + (-y)(-y)$$

$$= -a^2 + ax - ax + x^2 + y^2$$

$$= x^2 + y^2 - a^2$$

معادلة الدائرة

$$\because \; x^2 + y^2 = a^2$$

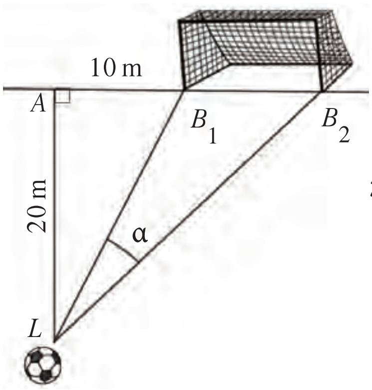
$$\therefore \; x^2 + y^2 - a^2 = 0$$

أي $\overrightarrow{BA} \bullet \overrightarrow{BC} = 0$

$$\therefore \; \overrightarrow{BA} \perp \overrightarrow{BC}$$

∴ قياس الزاوية θ يساوي 90°

المرشد لحل المسائل



مستخدمًا معطيات المخطط المقابل،

أوجد قياس زاوية ركل الكرة α. (طول المرمى: $B_1 B_2 = 7.32$ m).

كيف فكّر عبد العزيز

سأستخدم الضرب الداخلي. بما أنه لا توجد خاصية واحدة تسمح بمعرفة قياس الزاوية لذلك سأستخدم خاصيتين معًا.

أولًا: التحضير

بعد متطابقة فيثاغورث

$$(LB_1)^2 = 20^2 + 10^2 = 500$$
$$LB_1 \approx 22.36 \text{ m}$$
$$(LB_2)^2 = 20^2 + (10 + 7.32)^2 \simeq 700$$
$$LB_2 \approx 26.46 \text{ m}$$

ثانيًا: الضرب الداخلي — طريقة أولى

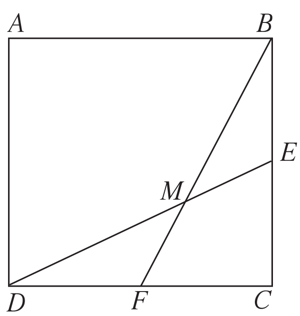
$$\overrightarrow{LB_1} \cdot \overrightarrow{LB_2} = (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB_1}) \cdot (\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{AB_2})$$
$$= (LA)^2 + \vec{O} + \overrightarrow{AB_1} \cdot \overrightarrow{AB_2}$$
$$= (LA)^2 + AB_1 \times AB_2$$
$$= 400 + 10 \times 17.32$$
$$= 573.2$$

ثالثًا: الضرب الداخلي — طريقة ثانية

$$\overrightarrow{LB_1} \cdot \overrightarrow{LB_2} = LB_1 \cdot LB_2 \cdot \cos(\alpha)$$
$$573.2 = 22.36 \times 26.46 \cdot \cos(\alpha)$$
$$\therefore \cos\alpha = \frac{573.2}{22.36 \times 26.46} = 0.9688$$
$$\alpha \approx 14^\circ 21'$$

يبلغ قياس زاوية ركل الكرة حوالى $14^\circ 21'$

مسألة إضافية

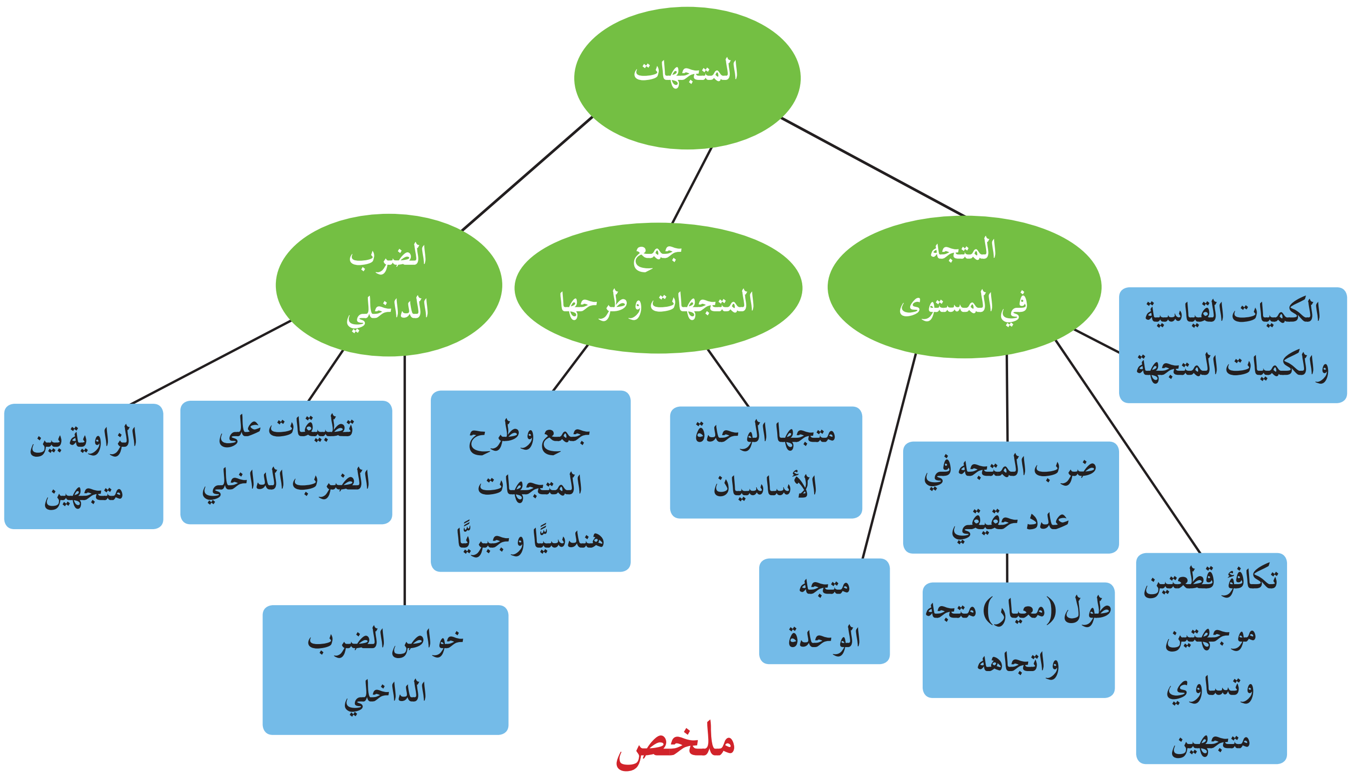


في المربع $ABCD$، F منتصف $\overline{CD}$، E منتصف $\overline{BC}$

تتقاطع $\overline{DE}$، $\overline{BF}$ في M

أوجد $m(\widehat{DMF})$

مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- للقطعة الموجهة اتجاه وقياس.
- القطعة الموجهة $\overrightarrow{OM}$ التي بدايتها نقطة الأصل ونهايتها $M(x, y)$ تسمى متجه الموضع ويمثلها الزوج المرتب (x, y)
- إذا كانت $\overrightarrow{AB}$ قطعة موجهة و $\overrightarrow{OM}$ متجه الموضع لهذه القطعة فإن $M(x_B - x_A, y_B - y_A)$
- المتجه هو مجموعة كل القطع الموجهة المتكافئة والتي أحدها متجه الموضع.
- يكون متجهان متساويين إذا كانت القطعتان الموجهتان المناظرتان لهما متكافئتين.
- المتجهان $\langle c, d\rangle$, $\langle a, b\rangle$ متساويان إذا وفقط إذا $b = d$، $a = c$
- $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ متجهان متوازيان إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ يحقق $\overrightarrow{A} = k\overrightarrow{B}$
- تكون النقاط A, B, C على استقامة واحدة إذا وفقط إذا وجد عدد حقيقي $k \neq 0$ يحقق $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$
- جمع متجهين:

  $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AD}$، حيث $ABCD$ هو متوازي الأضلاع.

  $\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{A}$ $\qquad (\overrightarrow{A} + \overrightarrow{B}) + \overrightarrow{C} = \overrightarrow{A} + (\overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}) = \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} + \overrightarrow{C}$ $\qquad \overrightarrow{A} + (-\overrightarrow{A}) = \overrightarrow{0}, \overrightarrow{A} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{A}$
- $\overrightarrow{B} = \langle x_B, y_B\rangle$, $\overrightarrow{A} = \langle x_A, y_A\rangle$، k عدد حقيقي.

  $k\overrightarrow{A} = \langle kx_A, ky_B\rangle$، $\qquad \overrightarrow{A} + \overrightarrow{B} = \langle x_A + x_B, y_A + y_B\rangle$

  $\overrightarrow{A} = \overrightarrow{B}$ إذا وفقط إذا $y_A = y_B$, $x_A = x_B$
- $\overrightarrow{A}$, $\overrightarrow{B}$ متوازيان إذا وفقط إذا $x_A \cdot y_B - x_A \cdot y_B = 0$
- $\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\| \cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = x_A x_B + y_A y_B$
- إذا $\overrightarrow{A}(x, y)$، فإن $\|\overrightarrow{A}\|^2 = x^2 + y^2$، $\|\overrightarrow{A}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$
- $\cos(\overrightarrow{A}, \overrightarrow{B}) = \dfrac{\overrightarrow{A} \cdot \overrightarrow{B}}{\|\overrightarrow{A}\| \cdot \|\overrightarrow{B}\|}$
- إذا كان $B(x_B, y_B)$,$A(x_A, y_A)$، فإن $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$

الوحدة السادسة

الجبر المتقطع (الإحصاء)

Discrete Algebra (Statistics)

مشروع الوحدة: زحمة السير

1 **مقدمة المشروع:** أظهرت الإحصاءات أن أكثر المشاكل التي تواجه الأشخاص في تنقلاتهم يوميًّا هي زحمة السير الخانقة على الطرقات. لذلك كانت الدراسات ولا زالت حتى اليوم تتركز على كيفية إيجاد وسائل نقل أسرع وأكثر أمانًا وأقل تكلفة ومناسبة لبيئة سليمة وصحية.

2 **الهدف:** في هذا المشروع سوف تحدد مشاكل النقل والسفر، ثم تقدم تصميمًا لوسيلة نقل جديدة أو عرضًا لخدمة تستطيع من خلالها حل المشكلة، وتقوم باستطلاع لتقرر ما إذا كان تصميمك أو خدمتك قابلين للتسويق.

3 **اللوازم:** ورق رسم بياني — آلة حاسبة علمية.

4 **أسئلة حول التطبيق:**

a ما أسباب زحمة السير؟

b كيف ستختار عينة الاستطلاع؟

c ما نوع الأسئلة التي ستطرحها على الأشخاص؟

d ما هي وسائل النقل المستخدمة؟

e ما نوع الخدمة التي يفضلونها؟

f نظم المعلومات التي حصلت عليها ومثلها بيانيًّا، ثم قم بتحليلها. ما أكبر مشكلة ظهرت في الإجابات؟ اقترح منتجًا أو خدمة تعتقد أنهما يساهمان في حل المشكلة. تأكد من أن الأفكار التي عرضتها قابلة للتطبيق. نفذ نموذجًا أو اكتب وصفًا لوسيلة النقل أو الخدمة المقترحة متضمنين التكلفة التي تراها مناسبة.

استطلع آراء عدد من الأشخاص في سوق العمل حول منتجك أو خدمتك الجديدة. مثل البيانات التي حصلت عليها وقم بتحليلها. هل منتجك أو خدمتك المقترحة قابلان للتسويق؟

5 **التقرير:** اكتب تقريرًا مفصلًا عن منتجك أو خدمتك المقترحة. اعرض ما توصلت إليه على زملائك في غرفة الصف. أعد النظر ببعض الاقتراحات إذا كان ذلك ضروريًّا. ناقش معهم قرارك في إمكانية التسويق للمنتج أو للخدمة مستندًا إلى نتائج استطلاعك.

دروس الوحدة

المجتمع الإحصائي والمعاينة	العينات	أساليب عرض البيانات	الانحراف المعياري	القاعدة التجريبية	القيمة المعيارية
6–1	6–2	6–3	6–4	6–5	6–6

الوحدة السادسة

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- التمثيلات البيانية.
- قيم النزعة المركزية (المتوسط الحسابي – الوسيط – المنوال).
- مقاييس تشتت البيانات (المدى – الأرباعيات).
- التباين – الانحراف المعياري.
- استخدام مخطط الصندوق ذي العارضتين في عرض البيانات وتحليلها.

ماذا سوف تتعلم؟

- دراسة المجتمع الإحصائي والمعاينة.
- استخدام العينة البسيطة والطبقية والمنتظمة.
- عرض البيانات في جداول تكرارية وكتابة التكرار النسبي والمئوي.
- تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- تمثيل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري.
- إيجاد التباين والانحراف المعياري واستخدامها لاتخاذ قرارات.
- تطبيقات على مقاييس التشتت (الانحراف المعياري – القاعدة التجريبية – القيمة المعيارية).

المصطلحات الأساسية

مجتمع إحصائي – الحصر الشامل – المعاينة – المتغير – عيّنة بسيطة – عينة طبقية – عينة منتظمة – جدول تكراري – تكرار نسبي – تكرار مئوي – قطاعات دائرية – مدرج تكراري – منحنى تكراري – التباين – الانحراف المعياري – مقاييس التشتت – القاعدة التجريبية – القيمة المعيارية.

أضف إلى معلوماتك

تفيد المعطيات التاريخية أن المصريين القدامى قاموا بتعداد اليد العاملة والثروات الموجودة لمعرفة إمكانية بناء الأهرامات. كما أن أفلاطون عالج قضايا السكان في كتابه «الجمهورية» وأرسطو في كتابه «السياسة» وابن خلدون في كتابه «مقدمة ابن خلدون». وفي عهد الخليفة العباسي «المأمون» جرى تعداد للسكان والثروات لتحديد الإمكانيات المادية والفكرية. أما في العصور المتقدمة فقد جمع العالم «كاسبرنيومان» (1601 م) بيانات عن بعض الوفيات وأعمارهم، وأعد «إدموند هيلس» أول جدول حياة.

ولكن لم يأخذ الإحصاء منحاه العلمي إلّا في القرن الثامن عشر، وذلك على يد العالم الألماني «فريدريك جاوس» والفرنسي «لابلاس» والإنجليزيان «كارل بيرسون»، و «رونالد فيشر».

6-1

المجتمع الإحصائي والمعاينة

Statistical Population and Sampling

سوف تتعلم
- المجتمع الإحصائي.
- المجتمعات المنتهية وغير المنتهية.
- المتغير.
- الحصر الشامل.
- المعاينة.
- أنواع البيانات.

المفردات والمصطلحات:
- إحصاء Statistic
- مجتمع إحصائي Statistical Population
- متغير Variable
- الحصر الشامل Comprehensive Inventory
- المعاينة Sampling
- متغير Variable
- بيانات كيفية Qualitative Data
- بيانات كمية Quantitative Data

عمل تعاوني

تجرى في كلّ سنة عملية استطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم في دولة الكويت. تريد أنت وزملاؤك القيام بهذه المهمة.

1. حدّد مع زملائك عدد الأشخاص الذين سوف تستطلعون آراءهم.
2. ما هي المعايير التي يجب اتباعها في هذا الاستطلاع لتحديد أفضل لاعب كرة قدم؟
3. ما الطرائق التي يجب اتباعها في إجراء هذا الاستطلاع؟

علم الإحصاء Statistical Science

الإحصاء هو علم أساسي في مجال الرياضيات التطبيقية حيث إنه يهتم بجمع البيانات وفرزها وتنظيمها وتصنيفها وعرضها جدوليًا أو بيانيًّا وتحليلها واستقراء النتائج بهدف اتخاذ قرارات مناسبة مبنية على استنتاجات.

مراحل البحث الإحصائي هي:

1. جمع البيانات.
2. عرض البيانات (جدوليًّا وبيانيًّا).
3. وصف البيانات وتحليلها.
4. تفسير النتائج واتخاذ قرارات.

المجتمع الإحصائي Statistic Population

هو مجموعة كل المفردات (الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة، ويمكن أن تكون مفردات المجتمع الإحصائي بشرية أو غير بشرية.

كما أن المجتمع الإحصائي يمكن أن يكون منتهيًا (عدد وحداته محدود) أو غير منته (عدد وحداته غير محدود). ويشترط أن يعرّف مجتمع الدراسة تعريفًا محددًا وواضحًا ولا يحمل أي تأويل.

مثال (1)

في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

a. طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت.

b. الطيور على سطح الأرض.

الحل:

a مجتمع طلاب الصف الحادي عشر في مدارس دولة الكويت:

نوعه: مجتمع منته.

وحدة الدراسة: طالب

b مجتمع الطيور على سطح الأرض:

نوعه: غير منته.

وحدة الدراسة: طير.

حاول أن تحل

1 في كل من المجتمعات الإحصائية التالية حدد نوع المجتمع (منته أو غير منته) ووحدة الدراسة.

a لاعبو فرق كرة السلة في دولة الكويت.

b مجتمع الأسماك في مياه الخليج العربي.

المتغير Variable

هو **الصفة (أو الصفات) محور الدراسة** في مجتمع إحصائي معيّن. فمثلًا في دراسة عن طلاب الصف الحادي عشر في دولة الكويت، قد يختلف الطلاب من حيث الفرع: أدبي أو علمي، الجنس: أنثى أو ذكر، الجنسية: كويتي أو غير كويتي، الطول، الوزن، لون العيون، ... وهذه الصفة **تتغير** من وحدة إلى أخرى في مجتمع الدراسة.

أساليب جمع البيانات Ways to Collect Data

عند القيام بدراسة إحصائية يقوم الباحث بتحديد المجتمع محل الدراسة ثم يبدأ بجمع البيانات.

هناك أساليب مختلفة لجمع البيانات تعتمد على نوع الدراسة وخصائص المجتمع ومن هذه الأساليب:

1 – الحصر الشامل Comprehensive Inventory

هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة. يتميز الحصر الشامل بدقة نتائجه وخلوه من الأخطاء.

(مثل: نتائج الطلاب في الصف الحادي عشر علمي نهاية العام الدراسي). ومن عيوب الحصر الشامل أنه يتطلب وقت وجهد كبيرين وفرق عمل ونفقات وتكاليف مرتفعة. كما أن الحصر الشامل لا يمكن إجراؤه في المجتمعات غير المنتهية (مثل مجتمع الطيور) وأكثر من ذلك لا يمكن استخدامه في حالة تدمير جميع وحدات الدراسة (مثل: عملية سحب الدم لمعرفة كمية السكر الموجودة فيه).

مثال (2)

هل يمكن استخدام الحصر الشامل في دراسة المجتمعات الإحصائية التالية أم لا؟ اذكر السبب.

a دراسة كمية الدهون الموجودة في الدم.

b دراسة نسبة عدد الطلاب الذين لون عيونهم أزرق إلى عدد طلاب صفك.

الحل:

a لا يمكن استخدام الحصر الشامل، لأنه لا يمكن استخدام كافة كمية الدم الموجودة في جسم الشخص فذلك سوف يؤدي إلى نهاية حياته.

b يمكن استخدام الحصر الشامل لأن عدد الطلاب في الصف محدد ويمكن إيجاد النسبة المطلوبة.

حاول أن تحل

2 اكتب مثالًا يبين:

a دراسة في مجتمع إحصائي يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

b دراسة في مجتمع إحصائي لا يمكن استخدام الحصر الشامل فيها.

2 – المعاينة Sampling

هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.

أنواع البيانات Types of Data

يمكن تصنيف البيانات إلى نوعين: كمية وكيفية كما يبيّن الجدول التالي:

أنواع البيانات	الصفات	أمثلة
بيانات كيفية	اسمية	لون العيون – لون الشعر
	مرتبة	المستوى العلمي – الدرجات التقديرية
بيانات كمية	متقطعة	عدد طلاب الفصل – نقاط مباراة كرة السلة
	مستمرة	أطوال القامات – الأوزان – درجات الحرارة

مثال (3)

حدّد نوع البيانات لكل مما يلي:

a عدد أهداف الدوري العام لكرة القدم في أحد المواسم.

b ترتيب الدول بحسب الميداليات التي حصلت عليها في دورة من دورات الألعاب الأولمبية.

c درجات الحرارة في شهر سبتمبر في مطار الكويت.

d لون سيارات معلمي مدرسة ما.

الحل:

a كمية متقطعة.

b كيفية مرتبة.

c كمية مستمرة.

d كيفية اسمية.

حاول أن تحل

3 حدد نوع البيانات في كل مما يأتي:

a عدد أعضاء فريق كرة القدم.

b الوظيفة (ضابط، محاسب، محام، تاجر، مدرس، ...)

c أطوال قامات طلاب الصف الحادي عشر.

d تقديرات الطلاب في مادة اللغة الإنجليزية في جامعة الكويت.

طرق جمع البيانات Ways To Collect Data

عند جمع البيانات يمكن استخدام طرائق متنوعة وذلك بحسب ما هو متوفر وما هو أسهل وهي:

- المشاهدة والملاحظة
- الاستبانة
- البريد العادي أو البريد الإلكتروني
- الهاتف المنزلي أو الهاتف النقال
- المقابلة الشخصية
- الوثائق والسجلات
- الأبحاث التاريخية والأرشيف
- قواعد البيانات
- مواقع التواصل الإجتماعي

6–2

العينات

Samples

دعنا نفكر ونناقش

تتكون أسرة إحدى المستشفيات من 100 إداريًا، 150 طبيبًا، 250 ممرضًا.

1. أراد مدير المستشفى اختيار 25 ممرضًا للالتحاق ببرنامج تدريبي، وضّح كيفية اختيار الممرضين دون تحيز.
2. يساعد مدير المستشفى فريق عمل مكون من 10 أعضاء من مختلف فئات العاملين. وضّح كيفية اختيارهم بشكل عادل يتناسب مع أعداد كل فئة من العاملين.

العينة العشوائية Random Sample

هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًّا بطريقة علمية دون تحيز كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل تكلفة ممكنة. تختلف العينة بحسب طبيعة المجتمع الإحصائي محل الدراسة. في ما يلي بعض من العينات العشوائية:

1 – العينة العشوائية البسيطة Simple Random Sample

إذا تضمن المجتمع الإحصائي عددًا n من المفردات المتجانسة وأردنا دراسته انطلاقًا من عينة عشوائية عدد مفرداتها (حجمها) m، يكون لدينا عينة عشوائية بسيطة والشيء الأساس في العينة العشوائية البسيطة هو أن لكل مفردة من مفردات المجتمع الإحصائي الفرصة نفسها لتكون ضمن العيّنة.

توجد طرائق متعددة لاختيار عينة عشوائية بسيطة مثل: جدول الأعداد العشوائية، آلات حاسبة متخصصة، برامج إحصائية في الحاسوب مثل (IRT, SPSS, Microsoft Excel).

مثال توضيحي

في إحدى المؤسسات التعليمية يوجد 80 طالبًا مرقمين من 1 إلى 80.

المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة حجمها 7 طلاب لدراسة بعض الأمور في المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الأول والعمود الثاني.

الحل:

بما أن حجم المجتمع 80 فإننا نأخذ أول رقمين لجهة اليسار من الصف الأول والعمود الثاني ثم نتحرك رأسيًّا إلى الأسفل نجد الأعداد التالية: 41 , 86 , 37 , 96 , 31 , 53 , 28.

ولكن يوجد عددان 96 , 86 لا يوجد مقابل لهما في ترقيم الطلاب لذا يبقى لدينا:

41 , 37 , 31 , 53 , 28

فنكمل لنجد العددين الآخرين على ألا يكون تكرارًا لما سبق فنجد: 35 , 02.

وبذلك يصبح لدينا الطلاب بحسب الترقيم التالي: 35 , 02 , 41 , 37 , 31 , 53 , 28

سوف تتعلم

- العينة العشوائية البسيطة.
- العينة العشوائية الطبقية.
- العينة العشوائية المنتظمة.

المفردات والمصطلحات:

- عينة Sample
- عينة عشوائية Random Sample
- عينة عشوائية بسيطة Simple Random Sample
- عينة عشوائية طبقية Stratified Random Sample
- عينة عشوائية منتظمة Systematic Random Sample
- كسر المعاينة Sampling Fraction

معلومة:

يتم اختيار الصف الأول والعمود الأول من جدول الأعداد العشوائية إذا لم يتم التحديد.

مثال (1)

عدد العاملين في مؤسسة هو 90 موظفًا مرقمين من 1 إلى 90. يراد اختيار 7 موظفين لأداء فريضة الحج على نفقة المؤسسة ويتم اختيارهم بطريقة عشوائية. المطلوب سحب عينة عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود الرابع.

الحل:

بما أن حجم المجتمع = 90

فإننا نأخذ أوّل رقمين لجهة اليسار من الصف السادس والعمود الرابع ثم نتحرك رأسيًّا إلى الأسفل ونختار الأرقام بحيث لا يتجاوز العدد 90 ولا يتكرر.

وبذلك يصبح لدينا الموظفين الذين أرقامهم: 10 , 70 , 77 , 24 , 3 , 61 , 59

حاول أن تحل

1 في مثال (1) إذا كان المطلوب سحب العينة من جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف العاشر والعمود الخامس فما هي الأعداد التي سوف يحصل عليها؟

2 – العينة العشوائية الطبقية Stratified Random Sample

يوجد مجتمعات إحصائية تتكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضًا لذا نأخذ عينة عشوائية بسيطة من كل مجموعة فنحصل على عينة عشوائية طبقية تمثل المجتمع الإحصائي محل الدراسة.

لسحب عينة عشوائية طبقية حجمها m من مجتمع إحصائي حجمه n، حيث $m \leq n$ يكون:

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{m}{n}$$

حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

مثال (2)

لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة عند الموظفين في إحدى المؤسسات، تم سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 80 فردًا من أصل 1 600 موظف موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	عمال ومستخدمون	تقنيون وفنيون	إداريون
1 600	1 200	300	100

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

الحل:

$$\text{كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{80}{1\,600} = 0.05$$

لإيجاد حجم العينة الطبقية نأخذ القاعدة:

حجم العينة الطبقية = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة.

نوجد إذًا حجم العينة لكل طبقة في المؤسسة:

حجم عينة الإداريين: $100 \times 0.05 = 5$

حجم عينة التقنيين والفنيين: $300 \times 0.05 = 15$

حجم عينة العمال والمستخدمين: $1\,200 \times 0.05 = 60$

وبالتالي تكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من: 5 (إداريين)، 15 (تقنيًّا وفنيًّا)، 60 (عاملًا ومستخدمًا).

حاول أن تحل

2 لدراسة الأداء الوظيفي والكفاءة لدى الموظفين في أحد المصارف، تم سحب عينة طبقية مكونة من 7 أفراد من 35 موظفًا موزعين كما يبين الجدول التالي:

المجموع	مستخدمون	محاسبون ومدققون	مدراء أقسام
35	5	20	10

ما حجم كل عينة عشوائية بسيطة مسحوبة من كل طبقة؟

ملاحظة:
يمكن استخدام جدول الأعداد العشوائية لسحب عينة عشوائية طبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة.

مثال (3)

في إحدى المؤسسات يوجد 100 إداري مرقمين من 100 إلى 199، 200 مهندس وتقني مرقمين من 200 إلى 399، 600 عامل ومستخدم مرقمين من 400 إلى 999. المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 18 فردًا لدراسة كفاءة العاملين في هذه المؤسسة باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الرابع والعمود الرابع.

الحل:

$$\text{أولًا: نوجد كسر المعاينة} = \frac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \frac{18}{900} = 0.02$$

ثانيًا: نوجد حجم كل عينة بسيطة.

حجم عينة الإداريين: $100 \times 0.02 = 2$

حجم عينة المهندسين والتقنيين: $200 \times 0.02 = 4$

حجم عينة العمال والمستخدمين: $600 \times 0.02 = 12$

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة كما يلي:

2 (إداريين)، 4 (مهندسين وتقنيين)، 12 (عاملًا ومستخدمًا).

ثالثًا: نستخدم جدول الأعداد العشوائية لإيجاد أرقام:

2 إداريين من بين الأعداد 100 إلى 199

4 مهندسين وتقنيين من بين الأعداد 200 إلى 399

12 عاملًا ومستخدمًا من بين الأعداد 400 إلى 999

الإداريين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع، والعمود الرابع ثم نتحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 159 , 103

المهندسين والتقنيين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع ثم نتحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 246 , 383 , 349 , 341

العمال والمستخدمين: نأخذ الأرقام الثلاثة لجهة اليسار من الصف الرابع والعمود الرابع، ثم نتحرك نزولًا.

فنجد الأعداد: 780 , 595 , 617 , 770 , 926 , 709 , 447 , 690 , 652 , 803 , 465 , 531

فتكون العينة العشوائية الطبقية مكونة من عينات عشوائية بسيطة بحسب الترقيم التالي:

للإداريين: 159 , 103

للمهندسين والتقنيين: 246 , 383 , 349 , 341

للعمال والمستخدمين: 780 , 595 , 617 , 770 , 926 , 709 , 447 , 690 , 652 , 803 , 465 , 531

حاول أن تحل

3 في إحدى المستشفيات يوجد 80 إداريًا مرقمين من 1 إلى 80 ، 140 طبيبًا مرقمين من 81 إلى 220 ، 240 ممرضًا مرقمين من 221 إلى 460، 40 عاملًا مرقمين من 461 إلى 500.

المطلوب سحب عينة عشوائية طبقية مكونة من 25 فردًا لدراسة كفاءة العاملين وذلك بتكوين عينات عشوائية بسيطة باستخدام جدول الأعداد العشوائية.

3 – العينة العشوائية المنتظمة Systematic Random Sample

واحدة من العينات الأكثر استخدامًا هي العينة العشوائية المنتظمة حيث يتم سحب مفرداتها بحسب نظام ثابت ومنتظم. ترقم هذه المفردات ترقيمًا متسلسلًا ثم يقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول بعدد مفردات العينة تسمى **فترة المعاينة**.

نستخدم العينة العشوائية المنتظمة في المجتمع الإحصائي حيث تكون جميع المفردة متجانسة، ولإيجاد طول الفترة نستخدم القاعدة التالية:

$$\text{طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$$

يمكن سحب المفردة الأولى في العينة المنتظمة بطريقة عشوائية من جدول الأعداد العشوائية أو عن طريق المختبر الإحصائي ثم تسحب باقي المفردات بطريقة منتظمة تقضي بإضافة طول فترة المعاينة على المفردة الأولى للحصول على المفردة الثانية ثم إضافة طول الفترة على المفردة الثانية للحصول على المفردة الثالثة وهكذا...

مثال (4)

في أحد المصانع حيث عدد العمال 900 مرقمين من 1 إلى 900، أراد صاحب هذا المصنع مناقشة هؤلاء العمال حول كيفية تحسين الأداء وزيادة الإنتاج. المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 15، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن والعمود العاشر.

الحل:

نوجد: $\text{طول الفترة} = \dfrac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \dfrac{900}{15} = 60$

نختار أول عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية على ألا يزيد عن العدد 60

نجد العدد 31 على التقاطع بين الصف الثامن والعمود العاشر.

فتكون الأعداد كما يلي:

$$31$$
$$31 + 60 = 91$$
$$91 + 60 = 151$$
$$151 + 60 = 211$$
$$211 + 60 = 271$$
$$271 + 60 = 331$$
$$331 + 60 = 391$$
$$391 + 60 = 451$$
$$451 + 60 = 511$$
$$511 + 60 = 571$$
$$571 + 60 = 631$$
$$631 + 60 = 691$$
$$691 + 60 = 751$$
$$751 + 60 = 811$$
$$811 + 60 = 871$$

والعينة العشوائية المنتظمة تتكون من العمال حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

31 , 91 , 151 , 211 , 271 , 331 , 391 , 451 , 511 , 571 , 631 , 691 , 751 , 811 , 871

حاول أن تحل

4 **في مثال (4) ما العينة العشوائية المنتظمة إذا أراد صاحب المصنع تشكيلها على أن يكون حجمها 10، مستخدمًا جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثامن عشر والعمود السابع؟**

مثال (5)

يبلغ عدد طلاب إحدى مدارس الكويت 700 طالب مرقمين من 1 إلى 700. أراد مدير المدرسة إرسال 10 طلاب لحضور ندوة حول «حماية الحيوانات المهددة بالانقراض». المطلوب سحب عينة عشوائية منتظمة حجمها 10 باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث.

الحل:

$$\text{نوجد طول الفترة} = \frac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}} = \frac{700}{10} = 70$$

نختار أوّل عدد عشوائي مؤلف من رقمين لجهة اليسار باستخدام جدول الأعداد العشوائية بحيث لا يزيد عن طول الفترة (70) ابتداءً من الصف الثاني والعشرون والعمود الثالث فنجد العدد 38.

38

$38 + 70 = 108$

$108 + 70 = 178$

$178 + 70 = 248$

$248 + 70 = 318$

$318 + 70 = 388$

$338 + 70 = 458$

$458 + 70 = 528$

$528 + 70 = 598$

$598 + 70 = 668$

تتكون العينة العشوائية من الطلاب حيث ترقيمهم بالأعداد التالية:

668 , 598 , 528 , 458 , 388 , 318 , 248 , 178 , 108 , 38.

حاول أن تحل

5 يبلغ عدد طلبة الصف الحادي عشر علمي في إحدى المدارس 140 طالبًا مرقمين من 1 إلى 140. المطلوب سحب عيّنة عشوائية منتظمة حجمها 7 لزيارة إحدى دور المسنين وتقديم الهدايا لهم بمناسبة حلول عيد الفطر السعيد باستخدام جدول الأعداد العشوائية ابتداءً من الصف السادس والعمود التاسع.

6–3

أساليب عرض البيانات

Ways to Display Data

سوف تتعلم
- إيجاد التكرار النسبي والنسبة المئوية للتكرار.
- تمثيل البيانات بالقطاعات الدائرية.
- تمثيل البيانات بالمدرج التكراري والمنحنى التكراري والربط بينهما.

المفردات والمصطلحات:
- التكرار Frequency
- التكرار النسبي Rational Frequency
- التكرار المئوي Percent Frequency
- تمثيل بياني بالقطاعات الدائرية Pie Chart
- المدرج التكراري Histogram
- المنحنى التكراري Frequency Curve
- مركز الفئة Center of Interval

عمل تعاوني

يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال قامات 50 طالبًا في المرحلة الثانوية بالسنتيمتر (cm)

الفئة	150–	155–	160–	165–	170–	175–	180–
التكرار	2	8	6	8	13	7	6

1 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين تقل أطوال قاماتهم عن 170 cm؟

2 ما هي النسبة المئوية للطلاب الذين أطوال قاماتهم 170 cm فأكثر؟

علمت فيما سبق أن البيانات التي يمكن الحصول عليها من مصادر مختلفة تصنف إلى نوعين: **كيفية وكمية.**

وهناك طرق متعددة لعرض البيانات مثل الجداول التكرارية والأعمدة والأعمدة المزدوجة والخط المنكسر والنقاط المجمعة...

القطاعات الدائرية Pie Chart

يمكن تمثيل البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية.

نستخدم التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية لعرض التوزيع التكراري لبيانات كيفية وتكون هذه البيانات مقسمة إلى فئات متعددة. عند صنع القطاعات الدائرية تقسّم الدائرة إلى قطاعات عددها يساوي عدد الفئات في البيانات ويمثل كل قطاع دائري واحدة من هذه الفئات، قياس الزاوية المركزية لكل قطاع يعطى بالقاعدة:

قياس الزاوية المركزية لقطاع = التكرار النسبي × $360°$

حيث التكرار النسبي = $\dfrac{\text{تكرار القيمة (أو الفئة)}}{\text{مجموع التكرارات}}$

وكل قطاع من الدائرة يأخذ لونًا أو تظليلًا مختلفًا عن الآخر.

مثال (1)

في أحد الاختبارات لم يقيّم الأستاذ طلابه بالدرجات، بل استخدم مفردات تقديرية كما في الجدول التالي:

الفئة	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	مقبول	ضعيف	المجموع
التكرار	4	4	6	4	5	2	25

a أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي لكل فئة.

b اعرض هذه البيانات الكيفية باستخدام القطاعات الدائرية.

(إرشاد: النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي) = التكرار النسبي × 100%)

الحل:

a

الفئة	ممتاز	جيد جدًّا	جيد	متوسط	مقبول	ضعيف	المجموع
التكرار	4	4	6	4	5	2	25
التكرار النسبي	$\frac{4}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{6}{25}$	$\frac{4}{25}$	$\frac{5}{25}$	$\frac{2}{25}$	$\frac{25}{25}$
النسبة المئوية للتكرار (التكرار المئوي)	$\frac{4}{25} \times 100\% = 16\%$	$\frac{4}{25} \times 100\% = 16\%$	$\frac{6}{25} \times 100\% = 24\%$	$\frac{4}{25} \times 100\% = 16\%$	$\frac{5}{25} \times 100\% = 20\%$	$\frac{2}{25} \times 100\% = 8\%$	100%

b نحسب أولًا قياس الزاوية المركزية لكل قطاع دائري:

قياس (زاوية تقدير ممتاز):

$$\frac{4}{25} \times 360^\circ = 57.6^\circ$$

قياس (زاوية تقدير جيد جدًّا):

$$\frac{4}{25} \times 360^\circ = 57.6^\circ$$

قياس (زاوية تقدير جيد):

$$\frac{6}{25} \times 360^\circ = 86.4^\circ$$

قياس (زاوية تقدير متوسط):

$$\frac{4}{25} \times 360^\circ = 57.6^\circ$$

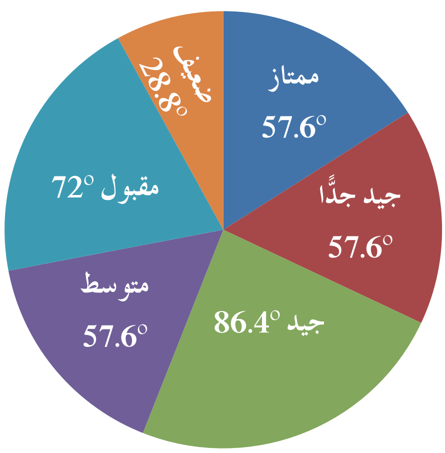
قياس (زاوية تقدير مقبول):

$$\frac{5}{25} \times 360^\circ = 72^\circ$$

قياس (زاوية تقدير ضعيف):

$$\frac{2}{25} \times 360^\circ = 28.8^\circ$$

التمثيل البياني بالقطاعات الدائرية للبيانات الكيفية



حاول أن تحل

1 يمثل الجدول التالي التوزيع التكراري لألوان العيون لدى 40 طالبًا ثانويًّا:

الفئة	أسود	أزرق	بني	عسلي	زيتي	المجموع
التكرار	13	4	13	6	4	40

a أوجد التكرار النسبي والتكرار المئوي.

b مثّل هذه البيانات بالقطاعات الدائرية.

المنحنى التكراري والمدرج التكراري

Frequency Curve and Histogram

يستخدم المدرج التكراري والمنحنى التكراري في تمثيل جدول تكراري ذي فئات بحيث إن كل مستطيل يمثل فئة من الفئات.

قاعدة المستطيل على الخط الأفقي هي طول الفئة، وارتفاعه الرأسي يساوي قيمة تكرار الفئة.

مثال (2)

يبيّن الجدول التالي التوزيع التكراري لنتائج تحليل مادة النيترات في 40 وحدة ماء معدة للخدمات المشتركة في المنازل (غير الصالحة للشرب) وذلك خلال شهر واحد (mg/L).

الفئة	–15	–20	–25	–30	–35	–40	–45	–50	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40

(a) أكمل الجدول بإضافة مراكز الفئات.

(b) ارسم المنحنى التكراري.

(c) ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

الحل:

(a) نوجد مراكز الفئات:

مركز الفئة –15 هو: $\frac{15+20}{2} = 17.5$

مركز الفئة –20 هو: $\frac{20+25}{2} = 22.5$

مركز الفئة –25 هو: $\frac{25+30}{2} = 27.5$

مركز الفئة –30 هو: $\frac{30+35}{2} = 32.5$

مركز الفئة –35 هو: $\frac{35+40}{2} = 37.5$

مركز الفئة –40 هو: $\frac{40+45}{2} = 42.5$

مركز الفئة –45 هو: $\frac{45+50}{2} = 47.5$

مركز الفئة –50 هو: $\frac{50+55}{2} = 52.5$

معلومة:

يتأثر استهلاك مياه الخدمات المشتركة في دولة الكويت بالعوامل التالية:

1 – كمية المطر المتساقطة على مدار السنة هي شبه ثابتة حيث إنها تتراوح سنويًّا بين 70 ملم – 130 ملم. وهذا يشكل جزءًا من رصيد المياه في الدولة.

2 – مصروف المياه هو تصاعدي وذلك نتيجة العوامل الاجتماعية والاقتصادية:

(a) عدد السكان في ازدياد حيث بلغت نسبة الزيادة السكانية في السنوات الأخيرة حوالي 4%.

(b) الرغبة في الإقامة داخل المدن وذلك يتطلب استهلاكًا أكثر لكمية المياه.

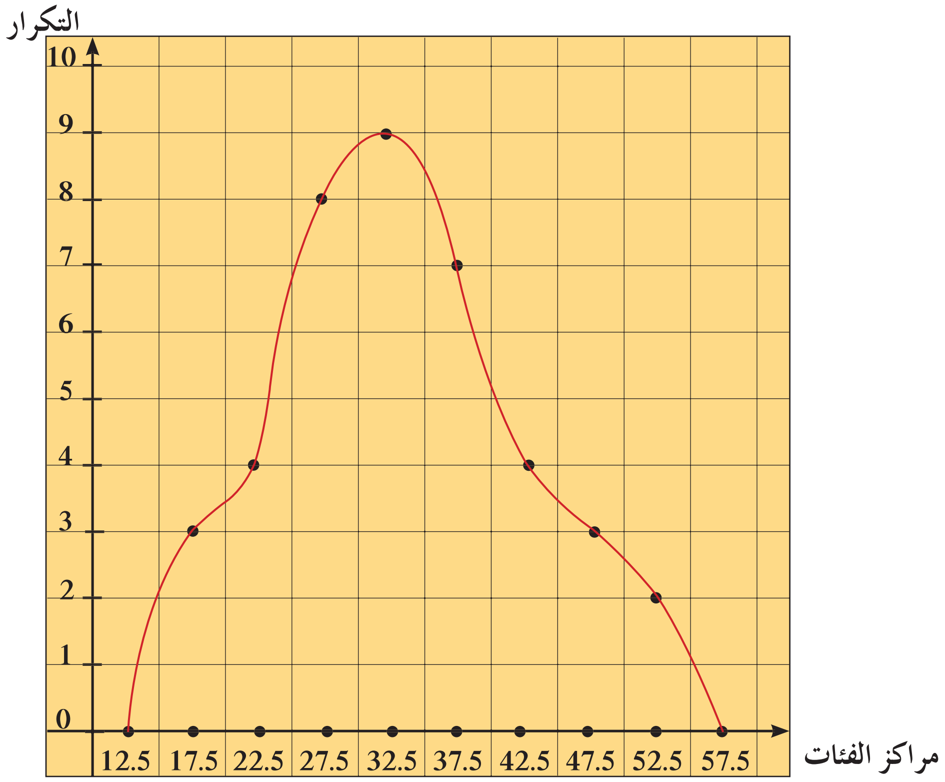
(c) نمو الصناعة والزراعة وري الحدائق العامة.

الجدول:

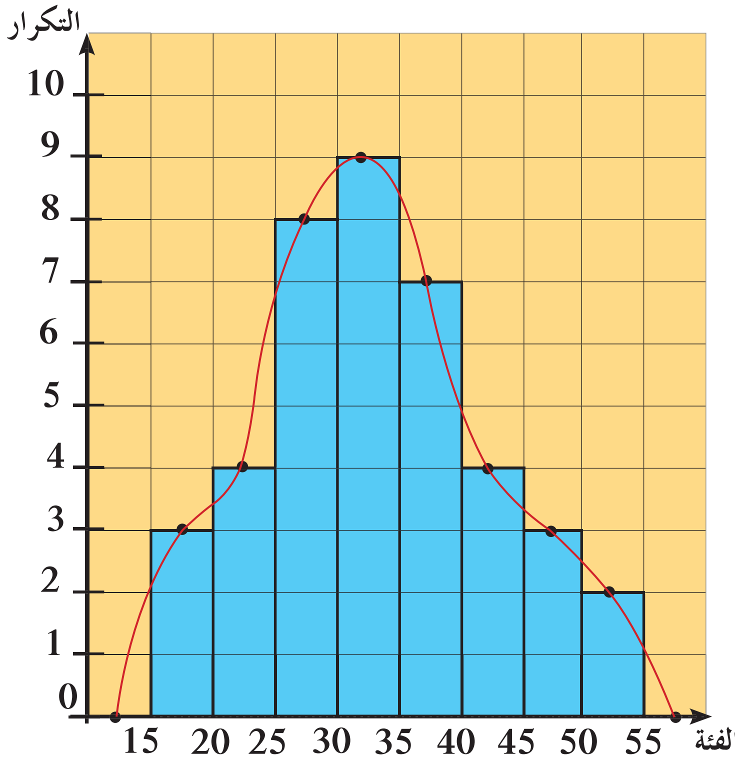
الفئة	15–	20–	25–	30–	35–	40–	45–	50–	المجموع
التكرار	3	4	8	9	7	4	3	2	40
مركز الفئة	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	

b لرسم المنحنى التكراري نصل النقاط الممثلة للأزواج المرتبة التي تمثل مراكز الفئات وتكراراتها ونقفل المنحنى التكراري عند البداية في مركز فئة تكرارها صفر وعند النهاية في مركز فئة تكرارها صفر:

(12.5, 0), (17.5, 3), (22.5, 4), (27.5, 8), (32.5, 9), (37.5, 7), (42.5, 4), (47.5, 3), (52.5, 2) , (57.5, 0).



c المدرج التكراري والمنحنى التكراري.



لإيجاد المنحنى التكراري، نأخذ منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات ثم نصل هذه النقاط بمنحنيات، ونقفل المنحنى التكراري عند البداية في مركز فئة تكرارها صفر، وعند النهاية في مركز فئة تكرارها صفر.

معلومة:
نصل بين منتصفات الأضلاع العليا للمستطيلات يدويًّا دون استخدام المسطرة للحصول على المنحنى التكراري.

حاول أن تحل

2 يبين الجدول التالي التوزيع التكراري لأطوال 30 طالبًا بالسنتيمتر (cm)

الفئة	155–	160–	165–	170–	175–	180–	المجموع
التكرار	4	6	11	5	3	1	30

a أوجد مراكز الفئات.

b ارسم المنحنى التكراري.

c ارسم المدرج التكراري ومنه المنحنى التكراري.

الانحراف المعياري

Standard Deviation

سوف تتعلم

- إيجاد التباين والانحراف المعياري.

المفردات والمصطلحات:

- المتوسط الحسابي Mean
- مقاييس التشتت Dispersion Measures
- الانحراف المعياري Standard Deviation
- التباين Variance

عمل تعاوني

في نهاية الفصل الأول من العام الدراسي، كانت درجات أحد الطلاب حيث النهاية العظمى 20 درجة كما يلي:

المتوسط الحسابي	الدرجة					المادة
	9	10	11	12	11	أحياء
	13	7	10	8	16	رياضيات
	5	5	15	15	15	فيزياء
	11	10	11	12	11	كيمياء

a هل يمكن التعرف على المادة الأفضل في التحصيل، من دون إجراء عمليات حسابية، أو من خلال أفضل متوسط حسابي لدرجات هذا الطالب؟

b أوجد المتوسط الحسابي لدرجات هذا الطالب في كل مادة.

c أدخل البيانات إلى الآلة الحاسبة الموجودة لديك، ثم أوجد الانحراف المعياري لدرجات كل مادة.
أكمل الجدول التالي:

الانحراف المعياري	
	أحياء
	رياضيات
	فيزياء
	كيمياء

d ما الذي تلاحظه عند هذا الطالب بالنسبة إلى الانحراف المعياري لدرجات كل مادة؟ اشرح.

خطوات استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الانحراف المعياري:

لإدخال بيانات ذو متغير منفرد. تأخذ x على الترتيب القيم: {1، 2، 2، 3، 3، 3، 4، 4، 5}

باستخدام العمود FREQ لتعيين عدد التكرارات لكل بند {xn; freqn}

{1;1، 2;2، 3;3، 4;2، 5;1}، وحساب الانحراف المعياري والمتوسط الحسابي.

SHIFT MODE (SETUP) ▼ 4 (STAT) 1 (ON)

MODE 3 (STAT) 1 (1 – VAR)

1 = 2 = 3 = 4 = 5 = ▼ ▶

1 = 2 = 3 = 2 = 1 =

AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 2 ($\bar{x}$) =

AC SHIFT 1 (STAT) 4 (VAR) 3 (σx) =

STAT X		FREQ
3	3	3
4	4	2
5	5	1

1

3

1.154700538

الناتج: المتوسط الحسابي: 3 الانحراف المعياري: 1.154700538

يمكن قراءة البيانات الإحصائية بزوج مرتب مكون من مقياسين مهمين:

a المتوسط الحسابي وهو مقياس لتمركز القيم في البيانات.

b الانحراف المعياري وهو مقياس لتشتت القيم في البيانات.

- لإيجاد المتوسط الحسابي $\overline{x}$ نستخدم القانون: $\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$

حيث إن: x_i هي قيم المتغيرات في البيانات.

n_i تكرارات المتغيرات في البيانات.

- لإيجاد التباين v نستخدم القانون: $v = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}$

- لإيجاد الانحراف المعياري σ نستخدم القانون: $\sigma = \sqrt{v}$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}}$$

ملاحظة هامة: في حالة التوزيع التكراري ذي الفئات x_i تمثل مراكز الفئات ونستخدم نفس القوانين السابقة.

مثال (1)

في استطلاع أجري في عيادة أحد الأطباء عن الوقت المستغرق لمعاينة 120 مريضًا، جاءت النتائج كما يلي:

الوقت المستغرق بالدقائق (min)	10−	15−	20−	25−	30−	35−	40−	45−	50−	المجموع
عدد المرضى	11	21	23	14	16	18	12	3	2	120

a أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة. أوجد المتوسط الحسابي.

b أوجد التباين والانحراف المعياري.

c فسّر إجابتك.

الحل:

a

الوقت المستغرق بالدقائق (min)	10−	15−	20−	25−	30−	35−	40−	45−	50−	المجموع
عدد المرضى (n_i)	11	21	23	14	16	18	12	3	2	120
مركز الفئة (x_i)	12.5	17.5	22.5	27.5	32.5	37.5	42.5	47.5	52.5	

المتوسط الحسابي:

$$\overline{x} = \frac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$$

$$\overline{x} = \frac{(11 \times 12.5) + (21 \times 17.5) + (23 \times 22.5) + (14 \times 27.5) + \ldots + (3 \times 47.5) + (2 \times 52.5)}{120}$$

$$\overline{x} = \frac{3\,360}{120} = 28$$

b لإيجاد التباين والانحراف المعياري نكون الجدول التالي:

مركز الفئة x_i	التكرار n_i	$(x_i - \overline{x})$	$(x_i - \overline{x})^2$	$n_i(x_i - \overline{x})^2$
12.5	11	12.5 − 28	240.25	2642.75
17.5	21	17.5 − 28	110.25	2315.25
22.5	23	22.5 − 28	30.25	695.75
27.5	14	27.5 − 28	0.25	3.5
32.5	16	32.5 − 28	20.25	324
37.5	18	37.5 − 28	90.25	1624.5
42.5	12	42.5 − 28	210.25	2523
47.5	3	47.5 − 28	380.25	1140.75
52.5	2	52.5 − 28	600.25	1200.5
				المجموع = 12 470

التباين:

$$v = \frac{\sum n_i (x_i - \overline{x})^2}{\sum n_i}$$

$$v = \frac{12\,470}{120} \approx 103.91\overline{6}$$

الانحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{v}$$

$$\sigma \approx 10.2$$

c بما أن المتوسط الحسابي $\overline{x} = 28$ min والانحراف المعياري $\sigma \approx 10.2$ فهذا يدل على تشتت كبير لقيم البيانات عن المتوسط الحسابي.

حاول أن تحل

1 لاحظ صاحب صيدلية أن مبيع الأدوية بحسب أسعارها بالدينار هو كما يلي:

الفئة (بالدينار)	−0	−5	−10	−15	−20	−25	المجموع
التكرار	19	30	47	28	26	10	160

a أكمل الجدول بإيجاد مركز كل فئة. أوجد المتوسط الحسابي.

b أوجد التباين والانحراف المعياري لأسعار الأدوية.

6-5

سوف تتعلم
- استخدام القاعدة التجريبية.

المفردات والمصطلحات:
- قاعدة تجريبية Empirical Rule
- التوزيع الطبيعي Normal Distribution

القاعدة التجريبية
Empirical Rule

دعنا نفكر ونتناقش

تعلمنا سابقًا أن المدى يقيس تشتت قيم البيانات، إذا كانت قيمة المدى صغيرة فنستطيع القول إن قيم البيانات قريبة من بعضها بعضًا ولكن إذا كانت قيمة المدى كبيرة فإن قيم البيانات بعيدة عن بعضها بعضًا أو يوجد فيها قيم متطرفة. كما أن الانحراف المعياري يقيس مدى تشتت قيم البيانات بالمقارنة مع المتوسط الحسابي، إذا كانت قيمة الانحراف المعياري صغيرة تكون قيم البيانات قريبة جدًا من قيمة المتوسط الحسابي أما إذا كانت قيمة الانحراف المعياري كبيرة فتكون قيم البيانات بعيدة عن قيمة المتوسط الحسابي.

فمثلًا في البيانات: 14، 15، 16، 17، 18 نجد أن المدى = 4،

المتوسط الحسابي: $\overline{x} = 16$

والانحراف المعياري $\sigma_1 \approx 1.414$

وفي البيانات: 3، 9، 17، 23، 28 نجد أن المدى = 25

المتوسط الحسابي: $\overline{y} = 16$ والانحراف المعياري: $\sigma_2 \approx 9.077$

من الملاحظ أن البيانات الأولى لها متوسط حسابي $\overline{x} = 16$ وانحراف معياري $\sigma_1 \approx 1.414$ أي أن قيم هذه البيانات تتجمع حول المتوسط الحسابي.

في البيانات الثانية المتوسط الحسابي $\overline{y} = 16$ والانحراف المعياري $\sigma_2 \approx 9.077$ أي أن هذه البيانات تبتعد عن المتوسط الحسابي.

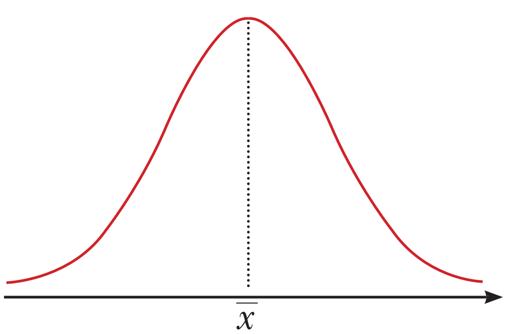
أوجد الإحصائيون قواعد أخرى لدراسة تشتت قيم البيانات عندما تتوزع بطريقة معينة تعرف بالتوزيع الطبيعي وذلك من خلال استخدام القاعدة التجريبية التي سنوضحها في هذا البند.

التوزيع الطبيعي Normal Distribution

تعلمت سابقًا توزيع قيم البيانات بحسب قيم المتوسط الحسابي والوسيط مقارنة مع قيمة المنوال.

والتوزيع الطبيعي هو توزيع البيانات بشكل متماثل حول المتوسط الحسابي والمنحنى التكراري الذي يمثل هذه البيانات يأخذ شكل الجرس كما في الشكل التالي:

من خواص منحنى التوزيع الطبيعي:
- أن يكون على شكل ناقوس (جرس) متماثل حول المتوسط الحسابي.
- أن تتساوى فيه قيم المتوسط الحسابي والوسيط والمنوال.
- أن ينحدر طرفاه تدريجيًّا ويمتدان إلى ما لانهاية ولا يلتقيان مع المحور الأفقي أبدًا.

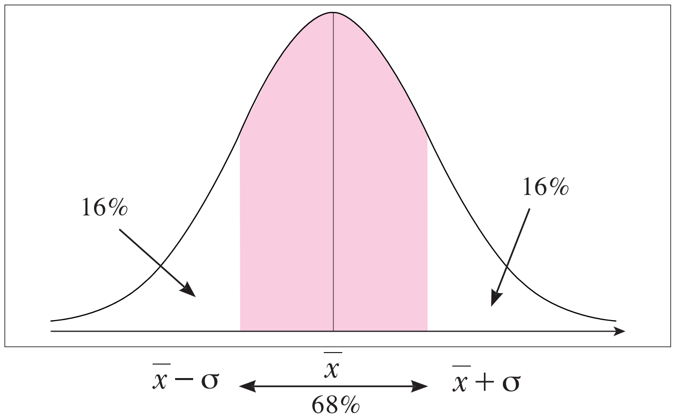


Empirical Rule القاعدة التجريبية

تستخدم القاعدة التجريبية لدراسة الجودة في مواقف إحصائية متعددة لعينات ذات قيم مفردة محددة ويمكن اتخاذ القرارات المناسبة على ضوء هذه الدراسة.

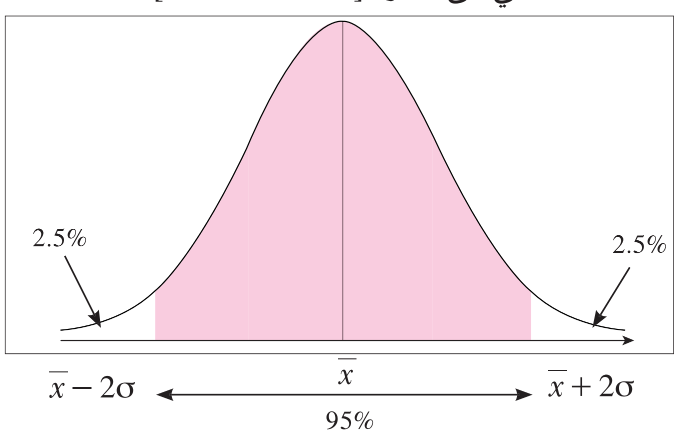
على افتراض أن لدينا مجموعة بيانات كمية ووجدنا المتوسط الحسابي $\overline{x}$ والانحراف المعياري σ لقيم هذه البيانات وتبين أن المنحنى التكراري هو على شكل الجرس يمكن عندها تطبيق القاعدة التجريبية التي تنص على ما يلي:

- حوالي 68% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma]$.



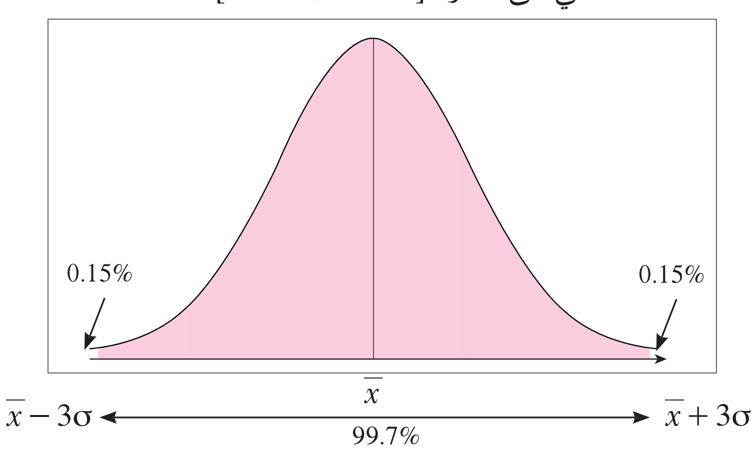
68% من البيانات تقع على الفترة $[\overline{x}-\sigma, \overline{x}+\sigma]$

- حوالي 95% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma]$



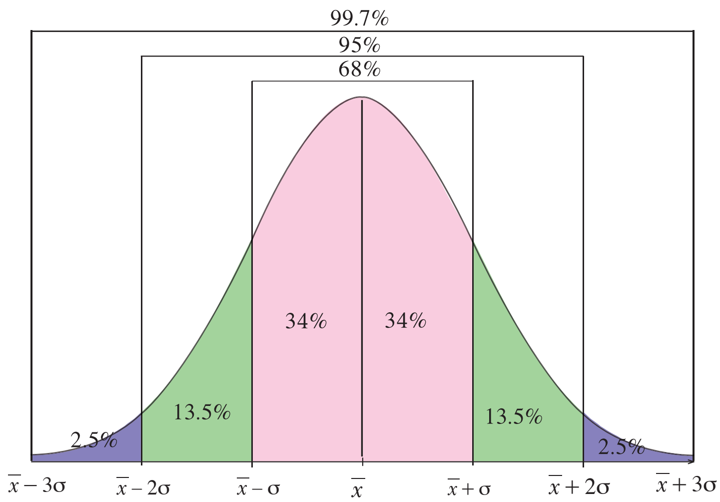
95% من البيانات تقع على الفترة $[\overline{x}-2\sigma, \overline{x}+2\sigma]$

- حوالي 99.7% من قيم هذه البيانات تنتمي إلى الفترة $[\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma]$



99.7% من البيانات تقع على الفترة $[\overline{x}-3\sigma, \overline{x}+3\sigma]$

يبيّن الشكل أدناه التوزيعات للفترات الثلاث ونسبها المئوية.



مثال (1)

إذا كان المتوسط الحسابي لأرباح إحدى الشركات الصغيرة 350 دينارًا والانحراف المعياري 110 والمنحنى التكراري لأرباح هذه الشركة هو على شكل الجرس (توزيع طبيعي).

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح الشركة إلى 690 دينارًا؟ فسّر ذلك.

الحل:

a $\overline{x} = 350$، $\sigma = 110$

باستخدام القاعدة التجريبية نحصل على ما يلي:

(1) حوالي 68% من الأرباح تقع على الفترة:

$[\overline{x}-\sigma,\ \overline{x}+\sigma]$

$=[350-110,\ 350+110]=[240,\ 460]$

(2) حوالي 95% من الأرباح تقع على الفترة:

$[\overline{x}-2\sigma,\ \overline{x}+2\sigma]$

$=[350-220,\ 350+220]=[130,\ 570]$

(3) حوالي 99.7% من الأرباح تقع على الفترة:

$[\overline{x}-3\sigma,\ \overline{x}+3\sigma]$

$=[350-330,\ 350+330]=[20,\ 680]$

b نلاحظ أن المبلغ 690 دينارًا يقع خارج الفترة الأخيرة [20, 680] والتي تناظر 99.7% من الأرباح لذلك من غير المتوقع أن تكون أرباح هذه الشركة قد وصلت إلى المبلغ 690 دينارًا.

حاول أن تحل

1 لاحظت شركة تجارية أن المتوسط الحسابي لأرباحها 475 دينارًا بانحراف معياري 115 دينارًا.

a طبق القاعدة التجريبية.

b هل وصلت أرباح هذه الشركة إلى 750 دينارًا؟ فسّر ذلك.

مثال (2)

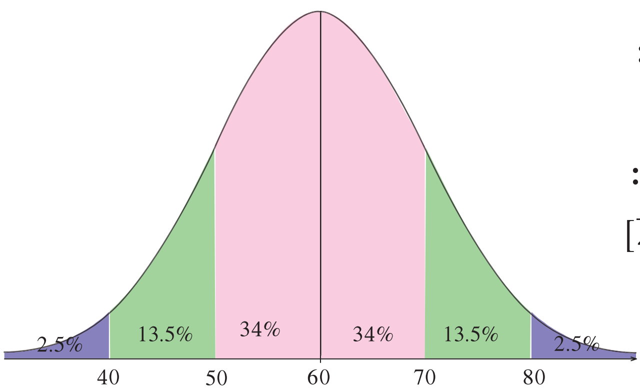
يعلن مصنع لإنتاج البطاريات المستخدمة في السيارات أن متوسط عمر البطارية من النوع (A) هو 60 شهرًا بانحراف معياري 10 أشهر.
على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

c أوجد النسبة المئوية للبطاريات من النوع (A) والتي يقل عمرها عن 40 شهرًا بفرض أن ما يعلنه المصنع صحيحًا.

الحل:



a (1) حوالى 68% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$$[\overline{x}-\sigma,\ \overline{x}+\sigma]=[60-10,\ 60+10]=[50,\ 70]$$

(2) حوالى 95% من البطاريات المصنعة عمرها يقع على الفترة:

$$[\overline{x}-2\sigma,\ \overline{x}+2\sigma]=[60-20,\ 60+20]=[40,\ 80]$$

(3) حوالى 99.7% من البطاريات المصنعة عمرها

يقع على الفترة:

$$[\overline{x}-3\sigma,\ \overline{x}+3\sigma]=[60-30,\ 60+30]=[30,\ 90]$$

b بما أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر البطاريات يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي لذا من الرسم أعلاه نستنتج:

$$34\%+34\%+13.5\%+2.5\%=84\%$$

أي أن 84% من هذه البطاريات يزيد عمرها عن 50 شهرًا بفرض أن ما تعلنه هذه الشركة صحيحًا.

c يبين المنحنى الممثل لعمر البطاريات أن 2.5% من هذه البطاريات يقل عمرها عن 40 شهرًا وذلك بفرض أن ما تعلنه الشركة صحيحًا.

حاول أن تحل

2 يعلن مصنع لإنتاج المصابيح الكهربائية أن متوسط عمر المصباح الكهربائي من النوع (A) هو 700h بانحراف معياري 100h
على افتراض أن المنحنى الممثل لتوزيع عمر المصابيح الكهربائية يقترب كثيرًا من التوزيع الطبيعي.

a طبق القاعدة التجريبية.

b أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يزيد عمرها عن 500h

c أوجد النسبة المئوية للمصابيح الكهربائية من النوع (A) التي يقل عمرها عن 400h

6–6

القيمة المعيارية

Standardized Value

سوف تتعلم
- استخدام القيمة المعيارية.

المفردات والمصطلحات:
- قيمة معيارية

Standardized Value

دعنا نفكر ونتناقش

قد يحصل طالب خلال السنة الدراسية على درجات مختلفة في كل مادة كما أنه من الممكن أن يحصل على الدرجة نفسها في أكثر من مادة. والسؤال: كيف يقيم الطالب هذه الدرجة في كل مادة مع بقية الدرجات؟

للإجابة عن هذا السؤال تستخدم القيمة المعيارية.

القيمة المعيارية Standardized Value

هي مؤشر يدل على انحراف قيمة مفردة من بيانات عن المتوسط الحسابي وذلك باستخدام الانحراف المعياري لقيم هذه البيانات. إذا كان المطلوب مقارنة قيمتين لمفردتين مختلفتين تنتمي كل منهما إلى مجموعة محددة فإنه لا يكفي إحصائيًّا مقارنة قيم هذه المفردات ببعضها بعضًا بل يجب الأخذ بعين الاعتبار المتوسط الحسابي لكل مجموعة من البيانات وانحرافها المعياري. ويتطلب منا هذا الأمر تحويل القيم المقاسة بوحدات قياس عادية إلى قيم معيارية مناظرة بعدد من الانحرافات المعيارية، وذلك باستخدام القاعدة:

$$\text{القيمة المعيارية} = \frac{\text{قيمة المفردة} - \text{المتوسط الحسابي}}{\text{الانحراف المعياري}} \qquad z = \frac{x - \overline{x}}{\sigma}$$

مثال (1)

في أحد الاختبارات نال أحد الطلاب درجة 16 من 20 في مادة الرياضيات حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 5 ونال أيضًا 16 من 20 في مادة الكيمياء حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 4.

ما القيمة المعيارية للدرجة 16مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

الحل:

القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات: $z_1 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{16 - 13}{5} = 0.6$

القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء: $z_2 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{16 - 14}{4} = 0.5$

$\because 0.5 < 0.6$

$\therefore$ **القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من القيمة المعيارية للدرجة 16 في مادة الكيمياء.**

وبالتالي الدرجة 16 في مادة الرياضيات أفضل من الدرجة 16 في مادة الكيمياء.

حاول أن تحل

1 جاءت إحدى درجات طالب في مادة الفيزياء 15 حيث المتوسط الحسابي 14 والانحراف المعياري 3.8 وفي مادة الكيمياء 15 حيث المتوسط الحسابي 13 والانحراف المعياري 7.8

ما القيمة المعيارية للدرجة 15 مقارنة مع درجات كل مادة؟ أيهما أفضل؟

مثال (2)

في نتيجة نهاية العام الدراسي حصلت الطالبة موضي على 64 درجة في مادة اللغة العربية حيث المتوسط الحسابي 69 والانحراف المعياري 8. وحصلت على 48 درجة في مادة الجغرافيا حيث المتوسط الحسابي 56 والانحراف المعياري 10

في أي المادتين كانت موضي أفضل؟

الحل:

لتحديد المادة التي كانت فيها موضي أكثر تحصيلًا نحول الدرجات الفعلية إلى قيم معيارية:

القيمة المعيارية للدرجة 64 في مادة اللغة العربية: $z_1 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{64 - 69}{8} = -0.625$

القيمة المعيارية للدرجة 48 في مادة الجغرافيا: $z_2 = \frac{x - \overline{x}}{\sigma} = \frac{48 - 56}{10} = -0.8$

$\because -0.625 > -0.8$

$\therefore$ القيمة المعيارية للطالبة في مادة اللغة العربية أفضل من القيمة المعيارية في مادة الجغرافيا.

$\therefore$ أداء الطالبة موضي في مادة اللغة العربية أفضل من أدائها في مادة الجغرافيا.

حاول أن تحل

2 يسكن خالد في المدينة A حيث إن طول قامته 180cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 174cm مع انحراف معياري 12cm. أما صالح فيسكن في المدينة B حيث إن طول قامته 172cm والمتوسط الحسابي لأطوال قامات الرجال في هذه المدينة 165cm مع انحراف معياري 15

أي منهما طول قامته أفضل من الآخر مقارنة مع أطوال الرجال في كل مدينة؟

المرشد لحل المسائل

في سوق العمل، ثمة شركتان تعملان في المجال نفسه. الرواتب الشهرية المدفوعة بالدينار لموظفي كل شركة مبينة على الجدولين الآتيين:

الراتب في الشركة (a)	600	700	1 200	1 750	2 250
التكرار	13	4	1	1	1

الراتب في الشركة (b)	700	800	1 100	1 300	1 500
التكرار	13	4	1	1	1

1. بالنظر إلى الجدولين، أيّ الشركتين تبدو أفضل من حيث الرواتب؟
2. a) احسب المتوسط الحسابي $\bar{x}$، $\bar{y}$ للرواتب في كل جدول.
   b) هل تحققت من التوقعات التي وضعتها في السؤال 1؟ اشرح.
   c) هل إيجاد المتوسط الحسابي يكفي وحده لمقارنة الرواتب الشهرية في الشركتين؟
3. احسب الانحراف المعياري σ_1 , σ_2 لرواتب الموظفين في كل شركة. ماذا تستنتج؟

الحل:

1. نلاحظ أن الرواتب الصغيرة والتي تكرارها 4 , 13 على الترتيب في الشركة (b) أفضل من تلك التي في الشركة (a) ولكن الرواتب الكبيرة والتي تكرارها 1 , 1 , 1 على الترتيب في الشركة (a) أفضل من تلك التي في الشركة (b)، وبالتالي رواتب العاملين في الشركة (b) أفضل، لكن رواتب الإداريين في الشركة (a) أفضل.
2. a) المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (a):

$$\bar{x} = 790 \text{ KD}$$

المتوسط الحسابي لرواتب الموظفين في الشركة (b):

$$\bar{y} = 810 \text{ KD}$$

   b) يبدو من خلال النتائج الحسابية أن المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (b) أفضل من المتوسط الحسابي للرواتب في الشركة (a).
   c) لا تكفي معرفة المتوسط الحسابي عند المقارنة بين الرواتب لوجود قيم متطرفة في الجدولين.

3 الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (a):

$$\sigma_1 \approx 431.45$$

الانحراف المعياري للرواتب في الشركة (b):

$$\sigma_2 \approx 218.86$$

نستنتج أن الرواتب للموظفين في الشركة (b) تتقارب من المتوسط الحسابي أكثر ممّا تتقارب رواتب الموظفين في الشركة (a). والملاحظ أن $\sigma_1 \approx 2\sigma_2$

مسألة إضافية

في أحد الاختبارات، أراد الأستاذ المقارنة بين درجات مجموعتين من الطلاب حيث النهاية العظمى 10 درجات.

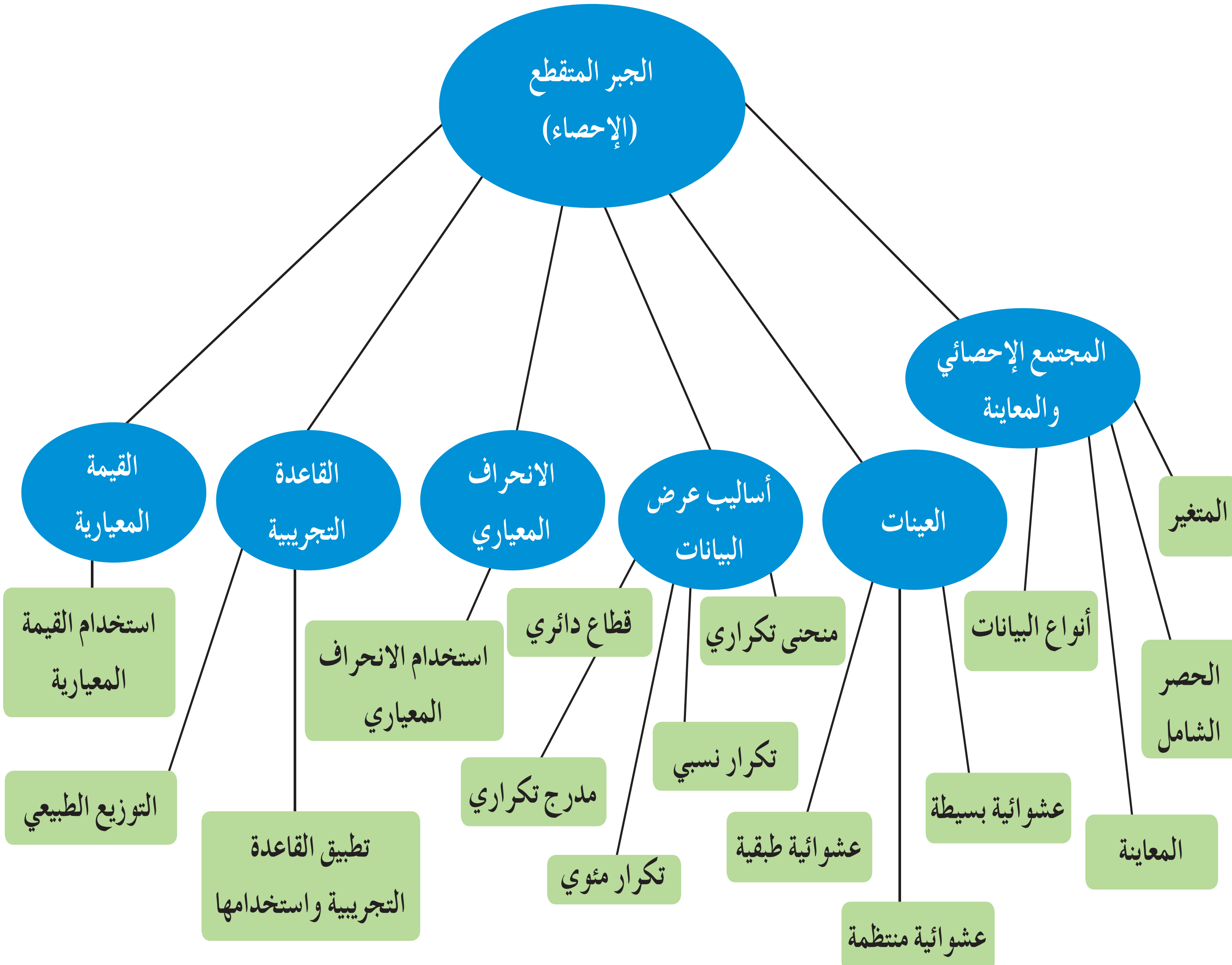
يبين الجدول التالي ما يلي:

مجموعة (a)	8	3	7	3	5	7	9	6	8	3	3	8	6	9
مجموعة (b)	6	7	3	5	6	6	8	4	7	9	6	7	5	6

1 أوجد لكل مجموعة المتوسط الحسابي.

2 كوّن جدولًا تكراريًّا لكل مجموعة، ثم أوجد: σ_1 الانحراف المعياري للمجموعة (a)، σ_2 الانحراف المعياري للمجموعة (b). ماذا تستنتج؟ اشرح.

مخطط تنظيمي للوحدة السادسة



ملخص

- المجتمع الإحصائي هو مجموعة كل المفردات(الوحدات) قيد الدراسة ولها خصائص مشتركة.
- المتغير هو الصفة (أو الصفات) محور الدراسة في مجتمع إحصائي معين.
- الحصر الشامل هو عملية جمع بيانات جميع مفردات المجتمع الإحصائي محل الدراسة.
- المعاينة هي عملية اختيار جزء من مفردات المجتمع بطريقة مدروسة تجعل هذه المفردات تمثل المجتمع وتحقق أهداف الدراسة.
- تصنف البيانات إلى نوعين: كيفي وكمي.
- العينة هي جزء من المجتمع الإحصائي يتم اختيارها عشوائيًّا بطريقة علمية كي تمثل هذا المجتمع أفضل تمثيل بأقل كلفة ممكنة.
- العينة العشوائية البسيطة هي عينة حيث إن كل مفردة منها لها الفرصة نفسها في الظهور وتمثل المجتمع الإحصائي الذي أخذت منه.

- العينة العشوائية الطبقية هي عينة تتكون من عينات عشوائية بسيطة وتستخدم في مجتمع إحصائي مكون من مجموعات لا تتقاطع مع بعضها بعضًا.
- لإيجاد العينة العشوائية الطبقية نوجد أوّلًا:

a كسر المعاينة $= \dfrac{\text{حجم العينة}}{\text{حجم المجتمع الإحصائي}} = \dfrac{m}{n}$

b حجم العينة من كل طبقة = كسر المعاينة × حجم الطبقة المناظرة

- العينة العشوائية المنتظمة هي عينة تقسم المجتمع الإحصائي إلى فترات متساوية الطول وعددها يساوي حجم العينة ويكون طول الفترة $= \dfrac{\text{حجم المجتمع الإحصائي}}{\text{حجم العينة}}$
- تستخدم الجداول التكرارية في تحديد عدد ظهور كل قيمة في البيانات.
- نستخدم التكرار النسبي لمقارنة ظهور كل قيمة بالنسبة إلى مجموع قيم البيانات.
- نستخدم النسبة المئوية لظهور كل قيمة لمعرفة نسبتها المئوية من الكل.
- توفر التمثيلات البيانية بالقطاعات الدائرية معرفة حجم كل قيمة بالنسبة إلى الكل.
- يبيّن المدرج التكراري حجم كل فئة مقارنة ببقية الفئات ويساعد على إيجاد قيمة تقريبية للمنوال.
- المدى = القيمة العظمى من البيانات − القيمة الصغرى من البيانات.
- المتوسط الحسابي: $\bar{x} = \dfrac{\sum n_i x_i}{\sum n_i}$
- التباين: $v = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} n_i (x_i - \bar{x})^2}{\sum_{i=1}^{n} n_i}$، حيث n_i التكرار، $\bar{x}$ = المتوسط الحسابي.
- الانحراف المعياري: $\sigma = \sqrt{v}$
- يؤشر الانحراف المعياري إلى تشتت البيانات عن المتوسط الحسابي، كلما كان أصغر كان التشتت أقل.
- القيمة المعيارية $= \dfrac{x - \bar{x}}{\sigma}$، توفر القيمة المعيارية مقارنة قيمة معينة ببقية القيم في عدد من البيانات.
- نستخدم القاعدة التجريبية: $[\bar{x} - \sigma, \bar{x} + \sigma]$، $[\bar{x} - 2\sigma, \bar{x} + 2\sigma]$، $[\bar{x} - 3\sigma, \bar{x} + 3\sigma]$ لإيجاد عدد القيم من البيانات في كل فئة والنسبة المئوية لهذه القيم.

جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	28138	28596	04819	50138	12598	96878	55684	01488	58963	25896	36987	47856	20150	18965
2	01055	53625	47739	51063	08445	33254	22542	50954	73949	11945	29947	86107	35420	77076
3	79603	31075	71532	38497	08236	78411	18237	48743	81472	31761	49582	70411	64708	59416
4	79261	96010	82558	15977	15827	55768	29668	73188	65198	24483	16219	63827	05092	47495
5	00005	37153	07206	78041	09457	97003	49739	75180	74018	90951	96161	31749	23314	55471
6	59282	86004	13259	59537	75702	66287	77941	27095	46176	67215	93007	84125	89302	92843
7	20119	41234	01600	61772	57765	43965	60952	86606	47653	71502	85121	56804	03494	98302
8	67205	41113	34514	03273	95516	68365	79855	50202	66262	31348	37260	56557	15116	38645
9	06244	02595	08941	24615	92256	43007	05022	48195	91554	42525	30499	92203	70717	92685
10	46210	35683	67486	77091	58196	08010	54826	97006	76740	76343	93982	66126	91164	53560
11	80851	80252	02993	92649	12421	00480	53258	45140	57226	10428	36478	24600	01401	29179
12	74684	98726	87312	70956	49731	45504	70689	57849	77383	53581	05100	07629	04450	54826
13	82136	32120	31733	10371	01132	25110	67123	59517	89996	58905	75260	21509	87839	68376
14	73419	88893	89748	44745	46390	54781	31307	62656	69777	24494	91659	29133	46122	75769
15	66082	76594	77480	38397	64521	18712	50625	39027	39168	07835	13446	17758	19166	86050
16	72300	93912	87548	69024	17509	52647	64335	84663	79524	34618	72718	51651	10486	81509
17	46805	82648	27550	65291	27181	92637	13539	87601	15442	70131	62278	99491	41647	11029
18	59068	93270	15829	34926	46252	90487	92734	04850	90175	84906	46435	91518	86972	25705
19	63089	93954	30250	80347	81506	53768	75611	62054	89867	16083	45585	39555	96236	37875
20	54384	64888	28929	46575	08301	86288	52656	19225	65019	74795	25915	71637	49063	17695
21	41219	63211	39429	15290	78067	66741	08485	64653	87698	04983	47255	72768	90770	82930
22	20939	02271	71831	53134	73002	86087	98213	24484	08574	34915	03881	26259	83583	55337
23	66587	02998	73357	00128	97188	71660	47602	52022	28157	21602	30212	53762	94149	66526
24	71255	04641	38419	79552	62599	76281	10226	60287	16627	85028	41218	20667	63917	49254
25	08584	91510	57892	75011	49221	69960	90413	62400	23239	76854	66983	15964	70808	41341
26	31552	70340	48274	81006	74831	19177	49160	50762	89666	93535	12381	29770	33895	90381
27	02779	92197	83606	60964	65448	64964	19444	31357	16774	68021	46076	43831	09372	71527
28	22739	38348	29275	50087	91312	68984	37018	03447	05352	00798	61243	86397	98949	07622
29	21255	64526	97920	04791	77315	49905	74232	67222	89562	14683	81533	60057	31164	21824
30	95796	88317	77167	07879	03499	00804	27377	18693	75652	32509	38279	28588	16753	86119
31	75902	33821	35579	75020	78575	43912	99570	79216	04682	53316	95976	11938	56490	43868
32	36028	73731	05339	82203	22856	72459	00237	17627	50326	98629	71967	48402	61549	83717
33	06836	03795	80497	34107	29215	17117	69538	63274	96690	78884	38149	84592	67096	84551
34	35984	71052	01657	19690	99783	13513	37517	96508	49098	86592	10874	18125	00876	14549
35	87635	49443	55077	18157	20552	27316	12591	68157	34316	20447	53989	40096	69123	74210
36	41484	58832	43633	92072	54522	60783	05639	78371	20340	90174	90549	60250	80858	97632
37	65736	34031	37846	47294	50168	96397	50329	17390	04554	96190	02594	44229	24198	03064
38	16118	88260	28975	20036	77353	96179	08143	29222	57871	01292	52420	07130	11896	94088
39	62064	36947	31193	72328	10262	75428	50450	31620	17855	27018	75910	60965	39988	73389
40	23472	61332	48829	99113	90538	74066	38628	09270	72856	71411	78860	50745	42966	27424
41	05654	41781	99888	60787	56313	83221	82631	91989	32577	68175	24897	23456	16419	41727
42	83428	17512	78322	01942	42061	60659	32746	95367	20551	99885	79334	03732	97058	80356
43	65126	87369	56266	48697	33094	07522	92724	05676	91022	64262	24239	60242	01049	42945
44	28042	84729	34846	05880	34188	27048	30623	23204	05034	93136	19192	91674	47022	48523
45	53148	70847	48117	16103	83773	13224	76143	39148	06742	08298	52014	61711	79466	78334

تابع جدول الأعداد العشوائية

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
46	13560	38973	76536	54464	57626	10247	67051	83850	93002	30930	83842	09990	39203	85693
47	74560	04842	75720	98173	35124	18019	70681	73624	86300	76894	55504	20022	27144	03239
48	27449	10887	55047	76702	62587	20131	63452	96127	15802	65271	74663	37237	95812	19427
49	44413	47571	63342	67062	19900	42511	71024	44364	02775	41081	33177	09580	71047	33820
50	64512	50481	41107	21553	86471	16380	45959	16065	75195	31120	33822	43200	82566	43078
51	00095	29635	33618	55201	12075	97285	80296	92250	92579	69296	68423	91353	35553	77036
52	09638	68500	84152	55279	29481	48723	87785	06304	53198	79425	41344	87395	54720	72911
53	08589	28972	20500	26761	61852	87387	17967	50345	20479	37841	16337	88163	38585	02798
54	54883	36854	75468	31821	08464	13393	24322	56872	39507	16845	92039	13209	47035	57686
55	15444	18858	69256	81949	85766	20284	15914	76382	25665	84484	36409	87271	14949	12069
56	71565	25235	48604	04697	60513	89675	34337	06619	67509	03365	67431	43725	60359	33823
57	92871	06972	97272	98081	58945	98039	47815	55173	93203	03385	58309	47970	27985	73782
58	68849	33525	22034	44200	90628	39212	75363	00247	96303	51838	99956	34321	85809	87275
59	98827	81751	86350	27162	56861	00566	32360	52560	05152	97370	29229	98503	44100	59854
60	66803	20412	23097	36884	14158	51578	82839	04323	01877	91180	22403	31175	67942	14508
61	41516	62122	37492	78385	08100	01107	49028	80607	92813	75169	25796	12643	75026	04170
62	12162	72695	70213	28844	94220	04677	63128	96254	60006	42148	63974	24739	46064	93416
63	13274	51517	40925	25926	47062	06867	80018	43394	68316	19197	74832	95805	26126	29623
64	52918	26336	17452	70092	22425	68294	14624	12683	60030	18091	76824	45533	29768	59678
65	30361	58894	77995	22650	20266	21791	25773	37748	38058	73835	57440	33610	24749	56691
66	46377	07121	20251	41301	07635	66029	80470	25523	16429	40640	40041	79302	98712	95368
67	27423	28968	39623	90457	26780	14540	15082	90327	56459	77107	60727	26328	59556	93557
68	73886	44934	65197	86001	51613	92940	24998	35378	35732	05469	05791	07309	23107	37543
69	70336	30279	09961	58625	11044	73699	32481	85490	58333	12277	98355	86413	87883	23945
70	97903	34498	31282	11249	13179	41489	87962	89071	61922	02704	83626	67269	26568	09110
71	86205	97851	61543	40666	78098	05621	86072	21202	84985	65253	09306	56791	86227	73343
72	70718	31353	96295	21718	03495	83149	48733	21496	68430	91459	18409	86552	53261	30280
73	79073	05288	57087	27201	29661	08888	42984	96272	93656	50805	32057	36231	03532	64408
74	37479	85240	68508	36333	90080	46063	78129	96854	65844	71369	15432	66145	29223	87139
75	56009	81470	06181	98341	92406	61704	57770	28984	92858	88178	80042	83674	23736	64497
76	97012	75201	16764	31720	59414	81005	63959	15445	12347	71939	23651	29846	20962	77463
77	89839	94534	78223	94989	54376	61163	21914	19430	86856	38116	83201	10117	77879	04504
78	81048	37891	24924	18757	54550	54788	72430	24611	18643	55647	11806	78567	76679	58222
79	96743	96838	50696	57648	15325	72557	77193	50894	33206	44420	37986	84257	02031	65384
80	87649	00751	47483	48564	13103	20941	49793	68972	27994	75845	84616	37040	97110	95953
81	18173	87553	45854	18750	16506	57202	60428	61710	35887	19879	49893	04512	62556	63742
82	27613	72032	94334	38239	00395	05486	96365	01758	99314	41866	25760	74573	72169	25744
83	67517	04195	89100	21434	52923	90818	09206	19493	00233	62413	39127	76457	39419	35023
84	23574	88907	08133	85126	84643	94128	89259	18791	71035	84179	82500	92193	31383	34150
85	98721	90145	05695	14882	11827	56881	14143	68069	88481	08328	58607	81737	11660	96892
86	85556	83652	92934	55451	94792	45056	50732	83305	46303	37510	15539	52534	47250	75231
87	63282	48334	46961	05993	16605	63422	23375	44298	16226	10617	96722	42776	53376	94366
88	34033	36344	41107	77495	73985	79352	14844	44334	30781	16339	38031	28104	60054	05725
89	75567	31423	72507	48162	30150	44912	76250	12017	12136	47687	90279	67127	83889	87957
90	45101	69475	96924	76548	57756	14741	26052	42807	52824	61981	87866	35512	23771	43130