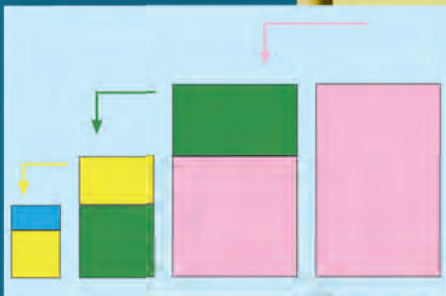
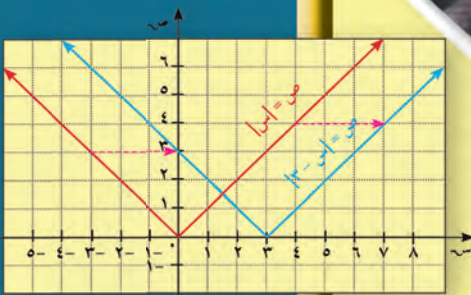


الرياضيات

كتاب الطالب



الطبعة الثانية



الصفّ العاشر
الفصل الدراسي الأول

الرياضيات

الصفّ العاشر
الفصل الدراسي الأول

كتاب الطالب

اللجنة الإشرافية لدراسة ومواءمة سلسلة كتب الرياضيات

أ. إبراهيم حسين القطان (رئيساً)

أ. حصة يونس محمد علي أ. فتحية محمود أبو زور

الطبعة الثانية

١٤٤٠ - ١٤٤١ هـ

٢٠١٩ - ٢٠٢٠ م

حقوق التأليف والطبع والنشر محفوظة لوزارة التربية - قطاع البحوث التربوية والمناهج
إدارة تطوير المناهج

الطبعة الأولى ٢٠١٢م

الطبعة الثانية ٢٠١٤م

٢٠١٩م

فريق عمل دراسة ومواءمة كتب الرياضيات للصف العاشر

أ. رضية ناصر القطان (رئيسًا)

أ. السعيد فوزي إبراهيم

أ. نجوى محمد وسيم

أ. مجدي محمد الكواوي

أ. منيرة علي العدواني

دار التّربّويّون House of Education ش.م.م. وبيرسون إديوكيشن ٢٠١٢م

شاركنا بتقييم مناهجنا



الكتاب كاملاً



ذات السلاسل - الكويت

أودع بمكتبة الوزارة تحت رقم (٤٩) بتاريخ ٧/٤/٢٠١٤م



صاحب السمو الشيخ أحمد الجابر الصباح
أمير دولة الكويت



سَمُو الشَّيْخِ نَوَافُ بْنُ جَبْرِ السَّبَّاحِ

وَلِيَّ عَهْدِ دَوْلَةِ الْكُوَيْتِ

مقدمة

الحمد لله رب العالمين، والصلاة والسلام على سيد المرسلين، محمد بن عبد الله وصحبه أجمعين.

عندما شرعت وزارة التربية في عملية تطوير المناهج، استندت في ذلك إلى جملة من الأسس والمرتكزات العلمية والفنية والمهنية، حيث راعت متطلبات الدولة وارتباط ذلك بسوق العمل، وحاجات المتعلمين والتطور المعرفي والعلمي، بالإضافة إلى جملة من التحديات التي تمثلت بالتحدي القيمي والاجتماعي والاقتصادي والتكنولوجي وغيرها، وإن كنا ندرك أن هذه الجوانب لها صلة وثيقة بالنظام التعليمي بشكل عام وليس المناهج بشكل خاص.

وما يجب التأكيد عليه، أن المنهج عبارة عن كم الخبرات التربوية والتعليمية التي تُقدم للمتعلم، وهذا يرتبط أيضًا بعمليات التخطيط والتنفيذ، والتي في محصلتها النهائية تأتي لتحقيق الأهداف التربوية، وعليه أصبحت عملية بناء المناهج الدراسية من أهم مكونات النظام التعليمي، لأنها تأتي في جانبين مهمين لقياس كفاءة النظام التعليمي، فهي من جهة تمثل أحد المدخلات الأساسية ومقياسًا أو معيارًا من معايير كفاءته من جهة أخرى، عدا أن المناهج تدخل في عملية إنماء شخصية المتعلم في جميع جوانبها الجسمية والعقلية والوجدانية والروحية والاجتماعية.

من جانب آخر، فنحن في قطاع البحوث التربوية والمناهج، عندما نبدأ في عملية تطوير المناهج الدراسية، ننطلق من كل الأسس والمرتكزات التي سبق ذكرها، بل إننا نراها محفزات واقعية تدفعنا لبذل قصارى جهدنا والمضي قدمًا في البحث في المستجدات التربوية سواء في شكل المناهج أم في مضمونها، وهذا ما قام به القطاع خلال السنوات الماضية، حيث البحث عن أفضل ما توصلت إليه عملية صناعة المناهج الدراسية، ومن ثم إعدادها وتأليفها وفق معايير عالمية استعدادًا لتطبيقها في البيئة التعليمية.

ولقد كانت مناهج العلوم والرياضيات من أول المناهج التي بدأنا بها عملية التطوير، إيماناً بأهميتها وانطلاقاً من أنها ذات صفة عالمية، مع الأخذ بالحسبان خصوصية المجتمع الكويتي وبيئته المحلية. وعندما أدركنا أنها تتضمن جوانب عملية التعلم ونعني بذلك المعرفة والقيم والمهارات، قمنا بدراساتها وجعلها تتوافق مع نظام التعليم في دولة الكويت، مركزين ليس فقط على الكتاب المقرر ولكن شمل ذلك طرائق وأساليب التدريس والبيئة التعليمية ودور المتعلم، مؤكدين على أهمية التكامل بين الجوانب العلمية والتطبيقية حتى تكون ذات طبيعة وظيفية مرتبطة بحياة المتعلم.

وفي ضوء ما سبق من معطيات وغيرها من الجوانب ذات الصلة التعليمية والتربوية تم اختيار سلسلة مناهج العلوم والرياضيات التي أكملناها بشكل ووقت مناسبين، ولتحقق نقلة نوعية في مناهج تلك المواد، وهذا كله تزامن مع عملية التقويم والقياس للأثر الذي تركته تلك المناهج، ومن ثم عمليات التعديل التي طرأت أثناء وبعد تنفيذها، مع التأكيد على الاستمرار في القياس المستمر والمتابعة الدائمة حتى تكون مناهجنا أكثر تفاعلية.

د. سعود هلال الحربي

الوكيل المساعد لقطاع البحوث التربوية والمناهج

المحتويات

١٠	الوحدة الأولى: الجبر - الأعداد والعمليات عليها
١٢	١ - ١ خواص نظام الأعداد الحقيقية
١٨	٢ - ١ تقدير الجذر التربيعي
٢٢	٣ - ١ حل المتباينات
٢٨	٤ - ١ القيمة المطلقة
٣٦	٥ - ١ دالة القيمة المطلقة
٤٣	٦ - ١ حل نظام معادلتين خطيتين
٤٨	٧ - ١ حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

٦٠	الوحدة الثانية: وحدة حساب المثلثات
٦٢	١ - ٢ الزوايا وقياساتها
٦٩	٢ - ٢ النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما
٧٥	٣ - ٢ ظل الزاوية ومقلوبه
٨٠	٤ - ٢ النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة
٨٤	٥ - ٢ حل المثلث قائم الزاوية
٨٧	٦ - ٢ زوايا الارتفاع والانخفاض
٩٠	٧ - ٢ القطاع الدائري والقطعة الدائرية

٩٨	الوحدة الثالثة: الجبر - التغير
١٠٠	٣ - ١ النسبة والتناسب
١١٠	٣ - ٢ التغير الطردي
١١٨	٣ - ٣ التغير العكسي

١٢٦	الوحدة الرابعة: الهندسة المستوية
١٢٨	٤ - ١ المضلعات المتشابهة
١٣٥	٤ - ٢ تشابه المثلثات
١٤٧	٤ - ٣ التشابه في المثلثات قائمة الزاوية
١٥٢	٤ - ٤ التناسبات والمثلثات المتشابهة
١٦٠	الربط بالتعلم السابق: العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتيهما

١٦٨	الوحدة الخامسة: المتتاليات (المتابعات)
١٧٠	٥ - ١ الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتابعات)
١٧٧	٥ - ٢ المتتالية الحسابية
١٨٦	٥ - ٣ المتتالية الهندسية

الجبر - الأعداد والعمليات عليها Algebra - Numbers and Operations

مشروع الوحدة: شراء الأسهم

- ١ مقدمة المشروع: أثناء العمل على هذا المشروع سوف تجمع بيانات عن إحدى الشركات. وتستخدم الصيغ لتحليل البيانات. ثم عليك أن تقرر كيفية تنظيم النتائج وعرضها باستخدام الرسوم البيانية وجداول البرمجة.
- ٢ الهدف: فهم كيف يدرس المحللون الاقتصاديون حركة الأسهم المالية لتحديد أي أسهم يشترون.
- ٣ اللوازم: آلة حاسبة - صحيفة محلية - أوراق رسم بياني.
- ٤ أسئلة حول التطبيق:



- أ اختر شركة للبحث. اجمع المعلومات حول المنتجات التي تبيعها الشركة أو الاستشارات التي تقدمها، وتاريخ الشركة والممارسات الإدارية.
- ب اطلع على صفحة الأوراق المالية في الصحيفة. اختر أحد الأسهم المتداولة في الأسواق المالية. ما كان سعر الإغلاق لهذا السهم؟ ما كان أعلى سعر لهذا السهم خلال العام الماضي؟ أنشئ جدولاً يعرض أعلى سعر وأدنى سعر للسهم الواحد لعدة أيام.
- ج افترض أن لديك ٥٠٠٠ دينار استثمرتها في الأسهم المالية التي اخترتها. يشمل سعر الشراء ثمن السهم زائد ٩٥, ٩٠ دينار كرسوم في ختام هذا المشروع، باعت الأسهم الخاصة بك. هل حققت ربحاً أم تكبدت خسارة؟ اشرح.

- ٥ التقرير: ضع تقريراً مفصلاً تبين فيه كيف استفدت من خواص نظام الأعداد الحقيقية لتنفيذ المشروع وللإجابة عن الأسئلة.

دروس الوحدة

خواص نظام الأعداد الحقيقية	تقدير الجذر التربيعي	حل المتباينات	القيمة المطلقة
١-١	٢-١	٣-١	٤-١
دالة القيمة المطلقة	حل نظام معادلتين خطيتين	حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد	
٥-١	٦-١	٧-١	

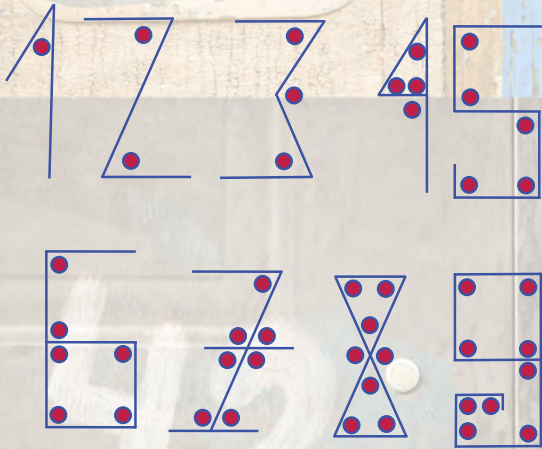
الوحدة الأولى

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

أضف إلى معلوماتك

يعتمد الغرب الأرقام 0، 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، في كتابة الأعداد وهي تدعى «الأرقام العربية».

يرتبط كل رقم منها بعدد من الزوايا. يبين الرسم أدناه هذه العلاقة.



ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف خاصية الكثافة والترتيب والفترات.
- سوف تحل متباينات مستخدماً الجمع والطرح والضرب والقسمة.
- سوف تحل معادلات ومتباينات تتضمن قيماً مطلقة.
- سوف ترسم بياناً دوال القيمة المطلقة.
- سوف تحل أنظمة معادلات خطية.
- سوف تحل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد.
- سوف تتعرف حل متباينات تربيعية بيانياً.

المصطلحات الأساسية

الأعداد النسبية - الأعداد غير النسبية - الخاصية الإبدالية - الخاصية التجميعية - الخاصية التوزيعية - المحايد - المعكوس - الفترات - المتباينات - القيمة المطلقة - الانسحاب - الحذف - التعويض - المميز.

خواص نظام الأعداد الحقيقية

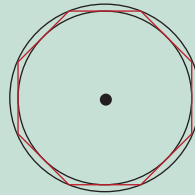
Real Numbers System Properties

دعنا نفكر ونتناقش

شغل العدد π (النسبة بين طول الدائرة وطول قطرها) الباحثين في الرياضيات لآلاف السنين.

اعتمد أرخميدس على الدائرة المحوطة (الداخلية) والدائرة المحيطة (الخارجية) بمضلع منتظم من ٩٦ ضلعًا للوصول إلى $\frac{22}{7} > \pi > \frac{223}{71}$ وتسمى متباينة أرخميدس.

واستخدم الصينيون الكسر $\frac{355}{113}$ كقيمة تقريبية لـ π .
في بداية القرن الثامن عشر اعتمد الرمز اليوناني π .
استخدم آلتك الحاسبة:



١ أوجد ٣ قيم تقريبية لـ π مستخدماً متباينة أرخميدس.

۲ π هو عدد غير نسبي. تنحصر قيمته بين ۱۴، ۳، ۱۵، ۳.

إعطاء مثال لإحدى القيم: مثلاً: $\pi \simeq 3,1415926$.

هل يمكن تحديد عدد القيم التقريبية لـ π ؟

سوف تتعلم

- خاصية الكثافة
- الترتيب
- الفترات



يعد أرخميدس (القرن السادس قبل الميلاد)
من أعظم علماء الرياضيات وأبو الهندسة،
ومن أشهر اكتشافاته طرق حساب المساحات
والأحجام.

حدّد قيمة π بدقة عالية $\left(\frac{22}{7} = \pi\right)$

Real Numbers

١ - الأعداد الحقيقية

القراءة في الرياضيات:

$\sqrt[2]{}$ هو الجذر التربيعي الموجب للعدد ٢.

$-\sqrt[2]{}$ هو الجذر التربيعي السالب للعدد ٢.

تعلم أن الأعداد النسبية (ن) يمكن كتابتها في صورة أعداد عشرية أو (كسور عشرية) متتهية مثل ٢٥، ٣، ٤٨٧، ٠، أو بصورة أعداد عشرية دورية (أو كسور عشرية دورية) مثل ١٦، ٢، ٣، ٠، ...). وهناك مجموعة أخرى من الأعداد تسمى أعدادًا غير نسبية لا يمكن كتابتها على الصورة $\frac{p}{q}$ حيث $p, q \in \mathbb{Z}$ ، $q \neq 0$. مثل $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\frac{1}{\sqrt{2}}$ ، ...

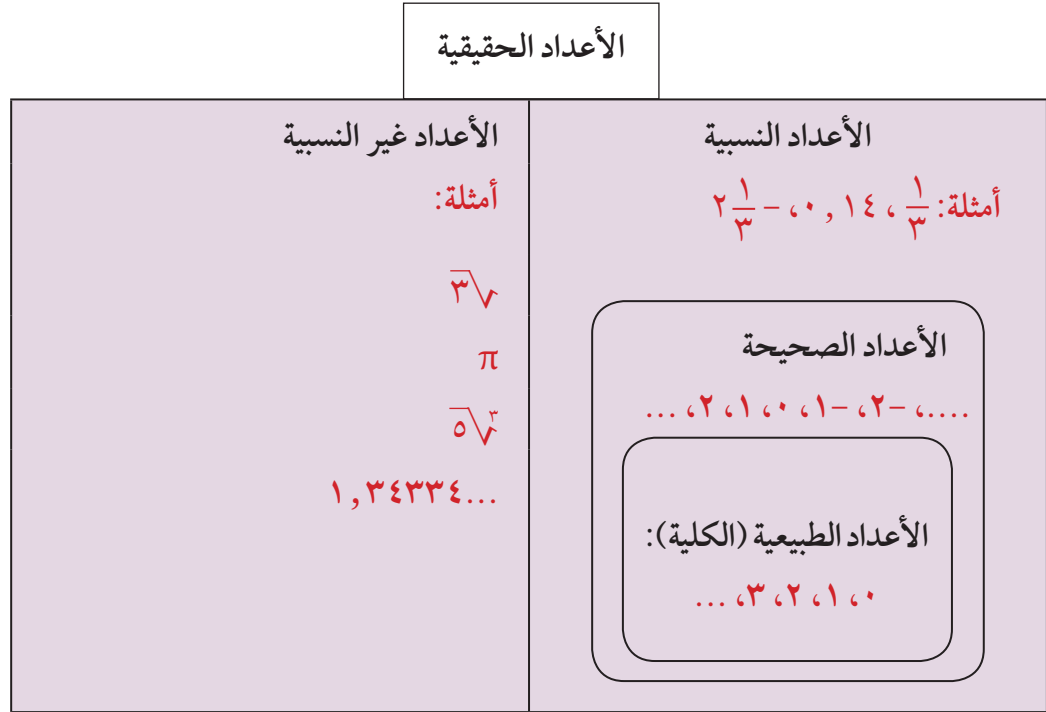
وكما الأعداد العشرية التي أرقامها العشرية لا تنتهي ولا تتكرر دوريًا مثل

$\pi \simeq 3, 14159265359\dots$ فالأرقام العشرية في π لا تنتهي ولا تتكرر دوريًا.

والأعداد غير النسبية ($\bar{n}$) من الممكن أن تتضمن كسورًا عشرية ذات نمط في كتابة أرقامها مثل $0,30333333\ldots$

اتحاد مجموعتي الأعداد النسبية وغير النسبية يشكل مجموعة تسمى مجموعة الأعداد الحقيقية
 أى أن $\mathbb{N} \cup \overline{\mathbb{N}} = \mathbb{R}$.

يوضح المخطط التالي العلاقات بين مجموعات الأعداد.



تمثل مجموعة الأعداد الحقيقية بخط الأعداد.

كل عدد حقيقي يمثل بنقطة على هذا الخط وكل نقطة على هذا الخط تمثل عددًا حقيقيًا.



مثال (١)

حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي.

- أ - $\frac{18}{5}$ ب - $\sqrt[4]{41}$ ج - $0, 3, 3, 3, \dots$ د - $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$

الحل:

- أ - $\frac{18}{5}$ هو عدد نسبي.
- ب - $\sqrt[4]{41}$ هو عدد غير نسبي.
- ج - $0, 3, 3, 3, \dots$ هو عدد نسبي.
- د - $1, 0, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0, 1, \dots$ هو عدد غير نسبي.

حاول أن تحل

- ١ حدد أيًا من الأعداد التالية عددًا نسبيًا وأيها عددًا غير نسبي: $\frac{4}{3}, 1, 4, \pi, 5$.

٢ - خواص عمليتي الجمع والضرب على الأعداد الحقيقية

Properties of Addition and Multiplication of Real Numbers

لكل a, b, c ، ج $\Rightarrow$ ح فإن:

الخاصية	الجمع	الضرب
الإبدالية	$a + b = b + a$	$a \times b = b \times a$
التجميعية	$(a + b) + c = a + (b + c)$	$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$
المحايد	$a + 0 = 0 + a = a$	$a \times 1 = 1 \times a = a$
المعكوس (النظير)	$0 = a + (-a) = (-a) + a$	$1 = a \times \frac{1}{a} = \frac{1}{a} \times a$ ($a \neq 0$)
التوزيعية	$a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c)$ $(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$	

Order of Real Numbers

٣ - ترتيب الأعداد الحقيقية

مجموعة الأعداد الحقيقية هي **مجموعة مرتبة**، هذا يعني أننا نستطيع مقارنة أي عددين حقيقيين باستخدام رموز علاقات الترتيب ($<$ أو $>$ أو $=$). والقول إن عددًا ما هو «أكبر من» أو «أصغر من» أو «يساوي» العدد الآخر.

Properties of Order

الترتيب وخواصه

ترتيب الأعداد الحقيقية		
ليكن a, b عددين حقيقيين		
الكتابة بالرموز	التعريف	القراءة
$a < b$	$a - b$ عدد موجب	a أكبر من b
$a > b$	$a - b$ عدد سالب	a أصغر من b
$a \leq b$	$a - b$ عدد موجب أو صفر	a أكبر من أو يساوي b
$a \geq b$	$a - b$ عدد سالب أو صفر	a أصغر من أو يساوي b

حقيقة هامة:

لأي عددين حقيقيين a, b .
تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح:

$a < b$

$a = b$

$a > b$

حقيقة هامة:

لأي عددين حقيقيين a, b .
تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح:

$$a < b$$

$$a = b$$

$$a > b$$

لتكن a, b, c أعداد حقيقية.

الخاصية	القاعدة	ملاحظة
التعدي	إذا كان $a \geq b$ ، $b \geq c$ فإن $a \geq c$	
الجمع	إذا كان $a \geq b$ ، فإن $a + c \geq b + c$	
الطرح	إذا كان $a \geq b$ ، فإن $a - c \geq b - c$	
الضرب	إذا كان $a \geq b$ ، $c > 0$ ، فإن $ac \geq bc$ إذا كان $a \geq b$ ، $c < 0$ ، فإن $ac \leq bc$	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد c سالبًا.
القسمة	إذا كان $a \geq b$ ، $c > 0$ ، فإن $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ إذا كان $a \geq b$ ، $c < 0$ ، فإن $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$	لاحظ أن علاقة الترتيب تنعكس عندما يكون العدد c سالبًا.

٤ - خاصية الكثافة

Density Property

يتسع وعاء لعدد محدد من الحجارة (تبقى فراغات كبيرة). كما أنه يتسع لعدد أكبر من الحصى الصغيرة (تقل الفراغات) ويمكن ملؤه كذلك بعدد أكبر بكثير من الرمل (تصبح الفراغات نادرة).

معلومة مفيدة:

تعتمد كثافة الجسم على شدة تراص جزيئات المادة فيه.

وماذا إذا ملئ الوعاء بأجسام أصغر حجمًا من الرمل؟

كلما صغر حجم الأجسام المستخدمة لملء الوعاء زادت الكثافة.

يمكن تشبيه سعة الوعاء بطول فترة على خط الأعداد.

يوجد بين أي نقطتين مختلفتين على خط الأعداد عدد لا نهائي من النقاط، وبالتالي بين أي عددين حقيقيين مختلفين يوجد عدد لا نهائي من الأعداد الحقيقية.

مثال (٢)

أعط خمسة أعداد حقيقية بين $3,14$ ، $3,15$.

الحل: تعلم أن $3,14 = 3,140$ ، $3,15 = 3,150$

∴ الأعداد الحقيقية مثل: $3,141$ ، $3,142$ ، $3,1456$ ، $3,14448$ ، π .

حاول أن تحل

٢ أعط ستة أعداد حقيقية بين $1,414$ ، $1,415$.

Intervals

٥ - الفترات

الفترة مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية.

لاحظ أن ليس كل مجموعة جزئية من مجموعة الأعداد الحقيقية تمثل فترة. لماذا؟

يمكن استخدام المتباينات للتعبير عن الفترات في مجموعة الأعداد الحقيقية، وكذلك يمكن تمثيل الفترات على خط الأعداد. مثلاً: يعبر عن الفترة: $(-\infty, 3)$ بالمتباينة، $s < 3$.

وهي مجموعة الأعداد الحقيقية الأصغر من ٣، وتمثل بيانياً كما يلي:



سوف نميز بين نوعين من الفترات: الفترات المحدودة والفترات غير المحدودة.

أولاً: الفترات المحدودة

الجدول التالي يوضح أنواع الفترات المحدودة: لتكن a ، b أعداداً حقيقية.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
$[a, b]$	مغلقة	$a \leq s \leq b$	
(a, b)	مفتوحة	$a < s < b$	
$[a, b)$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$a \leq s < b$	
$(a, b]$	نصف مفتوحة أو نصف مغلقة	$a < s \leq b$	
الأعداد a ، b هما نقطتا الحدود لكل فترة حيث a الحد الأدنى للفترة، b الحد الأعلى للفترة.			

تذكر:

المتباينة $a \leq s \leq b$
تكافئ $s \leq b$ و $s \geq a$

ثانياً: الفترات غير المحدودة

الجدول التالي يوضح بعض الفترات غير المحدودة: ليكن a ، $b \in \mathbb{R}$.

رمز الفترة	نوع الفترة	رمز المتباينة	التمثيل البياني
$(-\infty, a]$	نصف مغلقة وغير محدودة من الأعلى	$s \leq a$	
$(-\infty, a)$	مفتوحة وغير محدودة من الأعلى	$s < a$	
$[b, \infty)$	نصف مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	$s \geq b$	
(b, ∞)	مفتوحة وغير محدودة من الأسفل	$s > b$	

مثال (٣)

اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

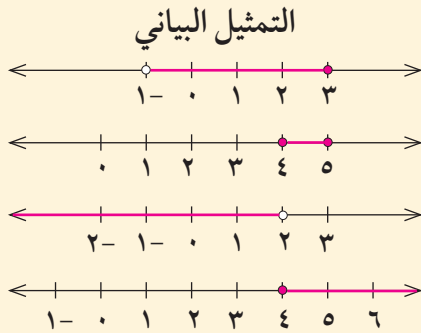
د $(-\infty, 4]$

ج $(2, \infty)$

ب $[5, 4]$

أ $(-1, 3]$

الحل:



رمز المتباينة

$s > -1$

$s \geq 5$

$s > 2$

$s \leq 4$

نوع الفترة

أ فترة نصف مفتوحة (أو نصف مغلقة)

ب فترة مغلقة

ج فترة مفتوحة وغير محدودة من أسفل

د فترة نصف مغلقة وغير محدودة من أعلى

حاول أن تحل

٣ اكتب نوع الفترة ورمز المتباينة والتمثيل البياني لكل من الفترات التالية:

ب $(-\infty, 3]$

أ $(-2, 1)$

٤ مثل كلاً مما يلي على خط الأعداد:

ب $(-\infty, 5) \cup (-1, \infty)$

أ $(-\infty, 2) \cup (-3, \infty)$

تقدير الجذر التربيعي

Estimating Square Root

دعنا نفكر ونناقش

لكل عدد حقيقي موجب جذران تربيعيان أحدهما موجب والآخر سالب.

الجذر الموجب	٣	الجذران التربيعيان للعدد ٩	$9 = 3 \times 3$
الجذر السالب	٣-		$9 = (3-) \times (3-)$

٣ هو الجذر الأساسي.

العدد ٢٩، ٧ هو موجب إذاً له جذران تربيعيان. لكن نجد صعوبة في إيجاد هذين الجذرين.

يعتمد الرمز $\sqrt{\quad}$ للإشارة إلى الجذر التربيعي الموجب فنكتب $\sqrt{29}$ ، ٧.

باستخدام الآلة الحاسبة نحصل على: $\sqrt{29} = 5.385$ ، ٧. كذلك $-\sqrt{29} = -5.385$ ، ٧.

Square Root

الجذر التربيعي

العدد a هو جذر تربيعي للعدد b عندما $a^2 = b$

Properties of Square Roots

خصائص الجذور التربيعية

خاصية الضرب: لأي عددين حقيقيين غير سالبين a ، b : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$

خاصية القسمة: لأي عددين حقيقيين موجبين a ، b : $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

مثال (١)

بسّط كل تعبير.

أ $\sqrt{49} = 7$

ب $-\sqrt{144} = -12$

ج $\frac{\sqrt{9} \pm \sqrt{25}}{\sqrt{25}} = \frac{3 \pm 5}{5}$

د $\sqrt{0} = 0$

هـ $-\sqrt{36} = -6$

جذر تربيعي موجب.

جذر تربيعي سالب.

الجذران التربيعيان هما $\frac{3}{5}$ ، $\frac{3-}{5}$.

للصفر جذر تربيعي واحد هو صفر.

غير معرف في ح.

(في مجموعة الأعداد الحقيقية الجذر التربيعي لعدد سالب غير معرف).

حاول أن تحل

١ بسّط كل تعبير.

أ $\sqrt{81}$

ب $-\sqrt{169}$

ج $\sqrt{25} \pm$

د $\sqrt{\frac{9}{25}}$

بعض الجذور التربيعية هي أعداد نسبية، وبعضها الآخر أعداد غير نسبية.
 فمثلاً من الجذور النسبية: $\sqrt{121} = 11$ ، $\sqrt{1} = 1$ ، $\sqrt{100} = 10$ ، $\sqrt{81} = 9$
 من الجذور غير النسبية: $\sqrt{2} \approx 1.414$ ، $\sqrt{3} \approx 1.732$ ، $\sqrt{5} \approx 2.236$ ، $\sqrt{7} \approx 2.646$

مثال (٢)

حدّد ما إذا كان كل عدد مما يلي عدداً نسبياً أو غير نسبي.

عدد نسبي

أ $\sqrt{64} = 8$

ب باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{4,9} \approx 2,2135943...$ عدد غير نسبي

ج باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt[3]{1} \approx 0,377964473$ عدد غير نسبي

مصطلح رياضي:

في الصيغة العشرية:

العدد النسبي هو عدد

منته أو متكرر (دوري).

العدد غير النسبي هو عدد

غير منته دون تكرار.

حاول أن تحل

٢ حدّد ما إن كان كل عدد مما يلي عدداً نسبياً أو غير نسبي.

أ $\sqrt{13}$

ب $\sqrt{625}$

ج $\sqrt{1000}$

د $\sqrt[3]{\frac{2}{15}}$

Estimating Square Roots

١ - تقدير الجذور التربيعية

مربعات الأعداد الطبيعية تسمى مربعات كاملة Perfect Squares.

١٢	١١	١٠	٩	٨	٧	٦	٥	٤	٣	٢	١	العدد الطبيعي
١٤٤	١٢١	١٠٠	٨١	٦٤	٤٩	٣٦	٢٥	١٦	٩	٤	١	المربع الكامل

يمكن استخدام المربعات الكاملة لتقدير قيمة بعض الجذور التربيعية دون استخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٣)

معلومة رياضية:

لأي أعداد موجبة وجذورها التربيعية الموجبة الترتيب نفسه.

حدّد بين أي عددين طبيعيين (كليين) متتاليين يوجد $\sqrt{15, 41}$ ، ثم قدر قيمته.
الحل:

١٥, ٤١ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٩, ١٦.

$$9 < 15, 41 < 16$$

باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$$\sqrt{9} < \sqrt{15, 41} < \sqrt{16}$$

تبسيط

$$3 < \sqrt{15, 41} < 4$$

وحيث إن العدد ١٥, ٤١ أقرب إلى ١٦ فإن $\sqrt{15, 41}$ يكون قريباً من ٤ وهو

إذاً $\sqrt{15, 41}$ هو بين ٣, ٤.

يساوي تقريباً ٣, ٩ أو ٣, ٨.

حاول أن تحل

٣ حدّد بين أي عددين صحيحين متتاليين يوجد العدد $\sqrt{30, 8}$ ، ثم قدر قيمته.

يمكن إيجاد قيمة تقريبية للجذور التربيعية باستخدام الآلة الحاسبة.

مثال (٤)

حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{28, 63}$ ، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدماً الآلة الحاسبة.
الحل:

٢٨, ٦٣ هو بين المربعين الكاملين المتتاليين ٢٥, ٣٦.

$$25 < 28, 63 < 36$$

باستخراج الجذر التربيعي لكل عدد

$$\sqrt{25} < \sqrt{28, 63} < \sqrt{36}$$

تبسيط

$$5 < \sqrt{28, 63} < 6$$

إذاً $\sqrt{28, 63}$ هو بين ٥, ٦.

باستخدام الآلة الحاسبة: $\sqrt{28.63} = 5.350700889$

أي أن $\sqrt{28, 63}$ يساوي تقريباً ٥, ٤.

حاول أن تحل

٤ حدّد بين أي عددين كليين متتاليين يقع $\sqrt{13, 7}$ ، ثم أوجد قيمته لأقرب جزء من عشرة مستخدماً الآلة الحاسبة.

مثال (٥)

أوجد طول وتر مثلث طولاً ضلعي زاويتي القائمة هما ٥ سم، ٧ سم.
الحل:

نظرية فيثاغورث

$$٧٤ = ٤٩ + ٢٥ = ٢٧ + ٢٥$$

٧٤ يقع بين المربعين الكاملين المتتاليين ٦٤، ٨١.

∴ طول وتر المثلث هو بين ٨، ٩ سم.

باستخدام الآلة الحاسبة $\sqrt{٢٧ + ٢٥} \approx ٦.٠٢٣$ ، ٨،

طول وتر المثلث ≈ ٦ ، ٨ سم.

حاول أن تحل

تذكر:

في المثلث قائم الزاوية،
مربع طول الوتر =
مجموع مربعي طولي
ضلعي الزاوية القائمة.

٥ أوجد طول وتر مثلث قائم الزاوية، طولاً ضلعي زاويتي القائمة هما ٩ سم، ١٣ سم.

مثال (٦) تطبيقات حياتية

يسقط جسم من ارتفاع ٩ أمتار. تبين المعادلة $٩ = ٤٠٤٠٠ \cdot t^2$ العلاقة بين الارتفاع ع بالأمتار والزمن ن بالثواني المستغرق للوصول إلى سطح الأرض. ما الزمن اللازم ليصل إلى الأرض؟
الحل:

$$٩ = ٤٠٤٠٠ \cdot t^2$$

$$t^2 = \frac{٩}{٤٠٤٠٠}$$

$$t = \sqrt{\frac{٩}{٤٠٤٠٠}}$$

$$t = -\sqrt{\frac{٩}{٤٠٤٠٠}} \text{ مرفوضة}$$

$$t \approx ١,٣٥٥ \text{ ثانية}$$

باستخدام الآلة الحاسبة

أي يلزم حوالي ثانية ونصف ليصل الجسم إلى الأرض.

حاول أن تحل

٦ من مثال (٦)، ما الزمن اللازم للوصول جسم إلى الأرض إذا سقط عن ارتفاع ١٤ مترًا؟

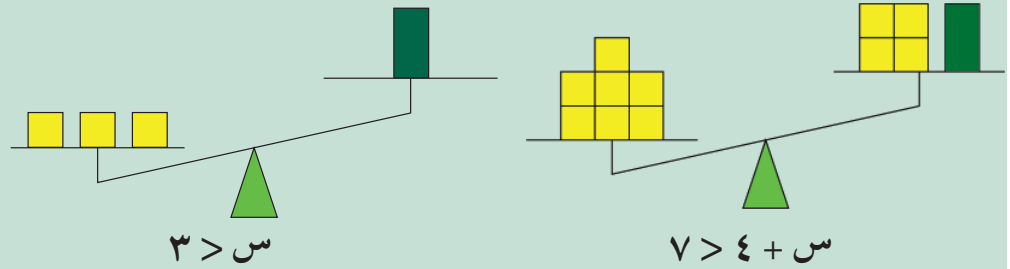
حل المتباينات Solving Inequalities

سوف تتعلم

- حل المتباينات باستخدام الخواص
- نمذجة متباينات من الدرجة الأولى
- حل متباينات ذات متغير واحد في أحد الطرفين أو كليهما

دعنا نفكر ونناقش

المتباينات المتكافئة هي متباينات لها مجموعة الحل نفسها. استخدم الميزان لتبين أن المتباينتين $س > ٧$ ، $س > ٣$ متباينتان متكافئتان.



حل المتباينات

Solving Inequalities

مصطلحات مساعدة:

تعني كلمة "لانهائي" أن عدد الحلول غير محدد ولا يمكن حصره.

أنت تحل متباينة تتضمن جمعًا أو طرحًا باستخدام العمليات العكسية، لكي تضع المتغير في طرف واحد. أحيانًا يكون لمتباينة عدد لانهائي من الحلول مما يستحيل معه التحقق منها جميعًا. بدلًا من ذلك، تحقق من صحة حساباتك واتجاه علاقة الترتيب.

استخدام خاصية المعكوس الجمعي في حل المتباينات

مثال (١)

أوجد مجموعة حل المتباينة $س - ٧ > ٢$ ومثل الحلول بيانيًا على خط الأعداد، ثم تحقق من صحة الحل.

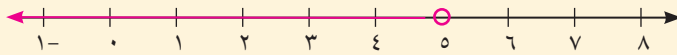
الحل: $س - ٧ > ٢$

ضع المتغير في طرف واحد، وذلك بإضافة المعكوس الجمعي للعدد $(٧-)$ إلى الطرفين

$س - ٧ + ٧ > ٢ + ٧$

$س > ٩$

مجموعة الحل: $(٩, \infty-)$



تحقق:

الخطوة ١: تحقق مما إذا كانت $س = ٩$ حلًا للمعادلة المرتبطة.

اكتب المعادلة المرتبطة $س - ٧ = ٢$

عوض بـ ٩ عن س $٩ - ٧ = ٢$

$٢ = ٢$ ✓

الخطوة ٢: تحقق من صحة علاقة الترتيب بالتعويض في المتباينة.

$$س - ٧ > ٢ -$$

$$٤ - ٧ > ٢ -$$

$$٣ - ٢ > \checkmark$$

كل من الخطوتين ١، ٢ تتحقق، لذلك $س > ٥$ هو حل المتباينة $س - ٧ > ٢ -$

حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل المتباينة ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد لكل مما يلي:

ب $١٢ \geq س - ٥$

أ ص $٤ \leq ١$

تذكر:

الدائرة المفتوحة على تمثيل بياني، تعني أن العدد ليس متضمنًا في الحل.

الدائرة المغلقة على تمثيل بياني، تعني أن العدد متضمن في الحل.

مثال (٢)



الأمثلة (الحقائب): تشترط إحدى شركات الطيران ألا يزيد وزن الأمتعة عن ٤٥ كيلوجرامًا للراكب. إذا كان وزن إحدى حقائبك ١٧ كيلوجرامًا، فما الوزن الممكن للحقيبة الثانية؟
الحل:

لا يزيد عن ٤٥ كجم

وزن الحقيبة الثانية

زائد

وزن الحقيبة الأولى

الألفاظ

ليكن $ز =$ وزن الحقيبة الثانية

$$٤٥ \geq$$

ز

+

$$١٧$$

المتباينة

$$١٧ + ١٧ + ز \geq ٤٥ + ١٧ \leftarrow \text{ضع المتغير في طرف واحد وذلك بإضافة المعكوس الجمعي (-17)}$$

$$٢٨ \geq ز \leftarrow \text{بسط}$$

يمكن أن يصل وزن حقيبتك الثانية إلى ٢٨ كجم.

حاول أن تحل

٢ تتسع القاعة الرئيسة في إحدى المدارس لـ ٣٠٠ مقعد. في عرض لإحدى المسرحيات كان عدد الحضور من الفصل العاشر ٨٩ طالبًا، فكم عدد الطلاب الذين يمكن حضورهم من بقية فصول المدرسة؟

استخدام خاصية المعكوس الضربي في حل المتباينات.

عندما تضرب طرفي متباينة في عدد سالب أو تقسم طرفي متباينة على عدد سالب، انعكس علاقة الترتيب.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{s}{2} > 1$ ، ومثل الحلول بيانياً على خط الأعداد.

الحل: $\frac{s}{2} > 1$

اضرب كلا الطرفين في المعكوس الضربي $(2-)$ واعكس علاقة الترتيب

بسط



$s < 2$

مثل بيانياً

مجموعة الحل $(-\infty, 2) =$

معلومة مفيدة:

إذا كان $a > b$ ، فإن $a < b$ ، فإن

$\frac{a}{b} > \frac{b}{a}$ ، فإن

إذا كان $a > b$ ، فإن $a < b$ ، فإن

$\frac{a}{b} < \frac{b}{a}$ ، فإن

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المتباينة $\frac{b}{4} \leq 1$ ، ومثل الحلول بيانياً على خط الأعداد.

مثال (٤)

فرصة للمشاركة الجديد

التوصيل الشهري للإنترنت من دون حدود

فقط ٥ دنانير في الشهر

عمل تجاري: تعلن شركة لتوصيل خدمات الإنترنت عن الفرصة التالية الموضحة. هدف الشركة هو تحقيق مبلغ إضافي على الأقل ٤٥٠٠ دينار شهرياً. كم مشتركاً جديداً يلزم أن تجتذبهم الشركة؟

الحل:

الألفاظ: عدد المشتركين الجدد مضروباً بـ ٥ دنانير يكون على الأقل ٤٥٠٠ دينار.

ليكن n = عدد المشتركين الجدد

المتباينة $5n \leq 4500$

$5n \leq 4500$

اقسم طرفي المتباينة على ٥

بسط

$n \leq 900$

يلزم أن تجتذب ٩٠٠ مشترك جديد على الأقل.

التحقق من معقولية الإجابة: الإجابة معقولة لأن 900×5 هو ٤٥٠٠، وأي عدد أكبر من ٩٠٠ مضروباً بـ ٥ ينتج عدداً أكبر من ٤٥٠٠.

حاول أن تحل

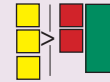
٤ الحد الأقصى لحمولة مصعد في فندق ١٠٠٠ كجم. افرض أن متوسط وزن النزول ٨٠ كجم، فكم نزلاً يمكن للمصعد أن يحملهم بأمان؟

حل متباينات متعددة الخطوات:

يتطلب حل المتباينات أحياناً استخدام أكثر من خطوة. وسنستخدم بلاطات الجبر في نمذجة متباينات من الدرجة الأولى حتى نفهم حلها. اعتبر أن  تمثل المجهول س، البلاطة الحمراء  تمثل -1 ، البلاطة الصفراء  تمثل $+1$

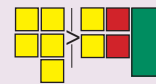
أ حل المتباينة $3 > 2 - س$

نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات



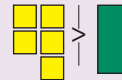
$$3 > 2 - س$$

إضافة $+2$ إلى طرفي المتباينة



$$2 + 3 > 2 + 2 - س$$

التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية

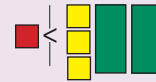


$$5 > 0$$

كل بلاطة خضراء أصغر من 5 بلاطات صفراء، إذاً $5 > 0$.

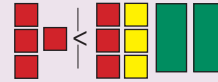
ب حل المتباينة $2س + 3 < 1$

نمذجة المتباينة باستخدام البلاطات



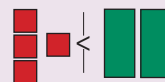
$$2س + 3 < 1$$

إضافة -3 إلى طرفي المتباينة



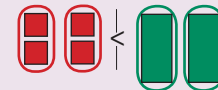
$$2س + 3 - 3 < 1 - 3$$

التبسيط بحذف أزواج البلاطات الصفرية



$$2س < -2$$

قسم كل طرف إلى مجموعتين متساويتين



$$\frac{2س}{2} < \frac{-2}{2}$$



$$س < -1$$

كل بلاطة خضراء أكبر من بلاطين حمراوين. إذاً $س < -1$

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $2(2 + m) - 3m \leq 1$ ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.
الحل:

$$2(2 + m) - 3m \leq 1$$

$$4 + 2m - 3m \leq 1$$

$$4 - m \leq 1$$

$$-m \leq 1 - 4$$

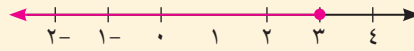
$$-m \leq -3$$

$$m \geq 3$$

$$\text{مجموعة الحل} = [3, \infty)$$

خاصية التوزيع
خاصية الإبدال
تبسيط
طرح ٤ من طرفي المتباينة

تنعكس علاقة الترتيب



حاول أن تحل

- ٥ أوجد مجموعة حل المتباينة ثم مثل الحل على خط الأعداد: أ $3(s + 4) + 5s \geq 2$.
ب $3 - 1 \geq 2s$

مثال (٦) تطبيقات حياتية

يشترى أحد المخازن أكثر من ٣٠ عبوة شامبو في الشهر. يدفع ٣ دنانير ثمن العبوة الواحدة، ٢٥ دينارًا كلفة تسليم البضاعة. عرضت شركة منافسة على صاحب المخزن عبوات بسعر ٤ دنانير للواحدة، ٥ دنانير فقط كلفة تسليم البضاعة، مدعية أن أسعارها هي الأرخص. هل هذا صحيح؟

الحل:

ليكن s عدد العبوات التي يشتريها المخزن في الشهر.

تبلغ كلفة الشراء: $3s + 25$

تبلغ كلفة الشراء من الشركة المنافسة: $4s + 5$

للتحقق، نحل المتباينة $4s + 5 > 3s + 25$.

$$4s + 5 > 3s + 25$$

$$s > 20$$

$$s > 20$$

$$s > 20$$

طرح $3s$ من طرفي المتباينة

تبسيط

طرح ٥ من طرفي المتباينة



أي أن الشركة المنافسة تكون أفضل عندما يكون عدد العبوات أقل من ٢٠ عبوة بينما يشتري المخزن أكثر من ٣٠ عبوة في الشهر.

∴ ما تعرضه الشركة المنافسة ليس أفضل عرض، لذا على صاحب المخزن أن يُبقي تعامله مع الشركة الأولى.

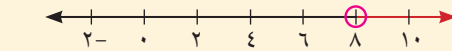
حاول أن تحل

٦ في مثال (٦)، هل يصبح عرض الشركة المنافسة أفضل إذا لم تقبض أموالاً كلفة تسليم البضاعة؟

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة $١٥ - س < ٤ + ١$ ومثل الحل على خط الأعداد.
الحل:

$$\begin{aligned} ١٥ - س &< ٤ + ١ \\ ١٥ - س &< ٤ - ١ + ٤ \\ ١٥ - س &< ٤ \\ ١٥ - ١ &< ٤ - ١ + ١٥ \\ ١٤ &< ٣ + ١٥ \\ ١٤ - ١٥ &< ٣ + ١٥ - ١٥ \\ -١ &< ٣ \\ -١ + ١ &< ٣ + ١ \\ ٠ &< ٤ \\ ٠ &< ٤ \end{aligned}$$



مجموعة الحل = $(٠, \infty)$.

حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينات التالية، ومثلها على خط الأعداد إن أمكن.

أ $٢(٨ - س) < ٤ + ٢$

ب $٣ + ٧ < ٣(س - ٣)$

٨ هل المتباينتان $٢ < ٢ - س$ ، $٢ > ٢ - س$ لهما مجموعة الحل نفسها؟ فسّر إجابتك.

انتبه:

في حالة حل المتباينات مثل:

$$٢ < ٢ - س$$

$$٢ - ٢ < ٢ - س - ٢$$

$$٠ < -س$$

مجموعة حلها ح.

القيمة المطلقة Absolute Value

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم

- حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة
- حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

عرفت سابقاً أن القيمة المطلقة لعدد حقيقي هي بُعد هذا العدد عن الصفر على خط الأعداد. ولما كان البعد عدداً غير سالب، فالقيمة المطلقة لعدد حقيقي سالب هي معكوسه الجمعي. الرمز المستخدم للقيمة المطلقة للعدد s هو $|s|$.

تعريف:

- إذا كان $s < 0$
- إذا كان $s = 0$
- إذا كان $s > 0$

$$\left. \begin{array}{l} s \\ 0 \\ -s \end{array} \right\} = |s|$$

لكل عدد حقيقي s يكون:

معلومة:

$(-s)$ ليس بالضرورة عدداً سالباً. $(-s)$ هو المعكوس الجمعي للعدد s .

نلاحظ أن العدد إذا كان موجباً أو صفراً فإن قيمته المطلقة تساويه، أما إذا كان العدد سالباً فإن قيمته المطلقة تساوي معكوسه الجمعي.

بعض خواص القيمة المطلقة للأعداد الحقيقية

ليكن a, b ، $b \geq a$

$$|a| \times |b| = |a \times b| \quad ٣$$

$$|a| = |a - b| \quad ٢$$

$$|a - b| = |b - a| \quad ٦$$

$$a \leq |a| \quad ٥$$

$$\frac{|a|}{|b|} = \left| \frac{a}{b} \right|, \text{ حيث } b \neq 0 \quad ٤$$

مثال (١)

أعد تعريف $|s - 4|$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

الحل:

- حيث $s - 4 < 0$
- حيث $s - 4 = 0$
- حيث $s - 4 > 0$

$$\left. \begin{array}{l} s - 4 \\ 0 \\ -(s - 4) \end{array} \right\} = |s - 4|$$

$$\left. \begin{array}{l} s - 4 \\ s - 4 \end{array} \right\} =$$

$$\left. \begin{array}{l} s - 4 \\ s - 4 \end{array} \right\} =$$

حاول أن تحل

١ أعد تعريف كل مما يلي دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

أ $|s + 3|$

ب $|4 - 2s|$

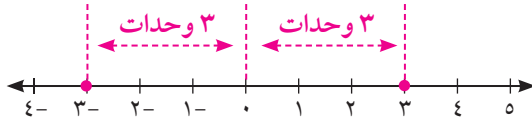
حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن استخدام خط أعداد لحل معادلات تتضمن قيمة مطلقة.

يُبين التمثيل البياني المقابل حلول المعادلة $|س| = ٣$.

حيث المسافة بين س، صفر تساوي ٣ وحدات

إذاً الحل: $س = ٣$ أو $س = -٣$



نتيجة

معلومة مفيدة:

المجموعة الخالية نعبّر عنها

بأحد الرمز $\emptyset$ أو $\{ \}$

١ إذا كان $ا$ عدداً حقيقياً موجباً فإن حل المعادلة $|س| = ا$ هو: $س = ا$ أو $س = -ا$ وتكون مجموعة الحل $\{ا, -ا\}$.

٢ إذا كان $ا$ عدداً حقيقياً سالباً فإن المعادلة $|س| = ا$ مجموعة حلها $\emptyset$

٣ إذا كان $ا = ٠$ فإن $|س| = ا$ مجموعة حلها $\{٠\}$.

مثال (٢)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|٢ص - ٣| = ٧$ ، ثم تحقق من صحة الحل.

الحل: $|٢ص - ٣| = ٧$

قيمة $٢ص - ٣$ يمكن أن تكون ٧ أو -٧ .

$٢ص - ٣ = ٧$ أو $٢ص - ٣ = -٧$

إضافة ٣ إلى طرفي المعادلة.

$٢ص = ١٠$ أو $٢ص = -٤$

قسمة كل طرف على ٢ .

$ص = ٥$ أو $ص = -٢$

مجموعة الحل $\{٥, -٢\}$

وعندما $ص = ٥$

تحقق: عندما $ص = ٥$

$|٢ص - ٣| = ٧$

$|٢(٥) - ٣| = ٧$

$|٢(-٢) - ٣| = ٧$ ؟

$|٢(٥) - ٣| = ٧$ ؟

✓ $|٧| = ٧$

✓ $|٧| = ٧$

حاول أن تحل

٢ أوجد مجموعة حل كلٍّ من المعادلتين، ثم تحقق من صحة الحل.

أ $|٣ + ٥س| = ٨$

ب $|٢س - ١| = ٠$

عند حل مسائل متعددة الخطوات، ابدأ بوضع التعبير الذي يتضمن القيمة المطلقة في طرف واحد.

مثال (٣)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $٠ = ٣ + |١ + ٢س|$

الحل: $٠ = ٣ + |١ + ٢س|$

$$٣- = |١ + ٢س|$$

وحيث إن $٣- > ٠$ (عدد سالب)

∴ مجموعة الحل = $\emptyset$

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حل المعادلة: $٠ = |٤ + ٢س - ٥|$

مثال (٤)

أوجد مجموعة حل المعادلة $١١ = ٥ - |٣ + ٢س|$

الحل: $١١ = ٥ - |٣ + ٢س|$

إضافة ٥ إلى طرفي المعادلة

$$١٦ = |٣ + ٢س|$$

قسمة كل طرف على ٤

$$٤ = |٣ + ٢س|$$

$$٤س + ٣ = ٤ \quad \text{أو} \quad ٤س + ٣ = -٤$$

إضافة ٣- إلى طرفي المعادلة

$$٧س = -١$$

قسمة كل طرف على ٢

$$س = -\frac{١}{٢}$$

$$\left\{ -\frac{١}{٢}, -\frac{٧}{٢} \right\} = \text{مجموعة الحل}$$

حاول أن تحل

٤ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين:

ب $٠ = ٣ + |٤ - ٥س|$

أ $٠ = ٦ - |٤ + ٢س|$

عند حل المعادلة $|س| = |ص|$ نستخدم طريقة المساواة، نضع $س = ص$ أو $س = -ص$. ونحل المعادلات أو نستخدم طريقة تربيع الطرفين ثم نحل المعادلة الناتجة ونتحقق من القيم بالتعويض عن المجهول لتحديد مجموعة الحل.

مثال (٥)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|١ + م| = |٣ - ٢م|$

الحل:

أولاً: طريقة المساواة

لاحظ أن للمقدارين القيمة المطلقة نفسها إذًا هما متساويان، أو كل منهما هو المعكوس الجمعي للآخر.

$$\begin{array}{l|l} \text{أو} & \\ \hline ١ - م = ٣ - ٢م & ١ + م = ٣ - ٢م \\ ٣ + ١ - م = م + ٢م & ٣ + ١ = م - ٢م \\ ٢ = م٣ & ٤ = م \\ \frac{٢}{٣} = م & \end{array}$$

مجموع الحل = $\left\{ \frac{٢}{٣}, ٤ \right\}$

ثانياً: طريقة تربيع الطرفين

$$^٢(|١ + م|) = ^٢(|٣ - ٢م|)$$

$$^٢(١ + م) = ^٢(٣ - ٢م)$$

$$١ + م٢ + ٢م = ٩ + م٢ - ١٢م + ٤م$$

$$٠ = ٨ + م١٤$$

$$٠ = (٢ - م٣)(٤ - م)$$

$$٤ = م \text{ أو } \frac{٢}{٣} = م$$

$$\text{تحقق: } |١ + م| = |٣ - ٢م|$$

أضف إلى معلوماتك:

$$|س| = |ص| \Rightarrow س = ص \text{ أو } س = -ص$$

معلومة رياضية:

إذا كان $|س| = |ص|$ فإن

• $س = ص$ أو $س = -ص$.

$$^٢(|س|) = ^٢(|ص|)$$

عندما $\frac{٢}{٣} = م$

$$\left| ١ + \frac{٢}{٣} \right| \stackrel{؟}{=} \left| ٣ - \frac{٢}{٣} \times ٢ \right|$$

$$\left| \frac{٥}{٣} \right| = \left| \frac{٥}{٣} \right| \quad \checkmark \quad \text{الحلّان مقبولان}$$

عندما $٤ = م$

$$\left| ١ + ٤ \right| \stackrel{؟}{=} \left| ٣ - ٤ \times ٢ \right|$$

$$\left| ٥ \right| = \left| ٥ \right| \quad \checkmark$$

مجموعة الحل = $\left\{ \frac{٢}{٣}, ٤ \right\}$

حاول أن تحل

٥ أوجد مجموعة حل كل من المعادلتين التاليتين:

ب $|س - ٥| = |س - ٧|$

أ $|س - ٥| = |٢ص + ٣|$

استخدم طريقة المساواة ثم طريقة التربيع.

يمكننا كذلك حل معادلات تتضمن قيمة مطلقة في أحد طرفيها على النحو التالي:

مثال (٦)

أوجد مجموعة حل المعادلة: $|س + ٢| = ٣ - س$

الحل: $|س + ٢| = ٣ - س$

نعلم أن الطرف الأيمن للمعادلة غير سالب نتيجة وجود القيمة المطلقة، إذاً يجب أن يكون الطرف الأيسر للمعادلة غير سالب. لذلك نضيف الشرط:

$$٣ - س \geq ٠ \text{ أي } س \leq ٣$$

(تقبل كل قيم س أكبر من أو تساوي $\frac{٢}{٣}$)

أي أن مجموعة التعويض هي $(\frac{٢}{٣}, \infty)$

أو $٢ + س = ٣ - س$

$٢ + س = ٣ - س$

$٢ - ٣ = -س - س$

$-١ = -٢س$

$\frac{١}{٢} = س$

$\therefore س = \frac{١}{٢} \notin (\frac{٢}{٣}, \infty)$

$\therefore$ الحل س = $\frac{١}{٢}$ مرفوض

$٢ + س = ٣ - س$

$٢ + س = ٣ - س$

$٢ - ٣ = -س - س$

$-١ = -٢س$

$\frac{١}{٢} = س$

$\therefore س = \frac{١}{٢} \in (\frac{٢}{٣}, \infty)$

$\therefore$ الحل س = $\frac{١}{٢}$ مقبول

مجموعة الحل = $\{\frac{١}{٢}\}$

أضف إلى معلوماتك:

$$\sqrt{س} = \sqrt{س^2}$$

$$(\sqrt{س})^2 = س \text{ (حيث } س \geq ٠)$$

معلومة مفيدة:

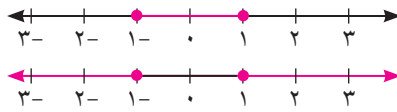
مجموعة الحل هي مجموعة جزئية من مجموعة التعويض

حاول أن تحل

٦ أوجد مجموعة حل المعادلة: $|س - ٤| = ١ - س$

حل متباينات تتضمن قيمة مطلقة

يمكن أيضًا حل متباينات تتضمن قيمًا مطلقة باستخدام خط الأعداد.



يُبين التمثيل البياني الأول حلول المتباينة $|x| \geq 1$.

يُبين التمثيل البياني الثاني حلول المتباينة $|x| \leq 1$.

تعميم

ليكن a عددًا حقيقيًا موجبًا.

١ $|x| \geq a$ تكافئ $x \geq a$ أو $x \leq -a$

٢ $|x| \leq a$ تكافئ $x \leq a$ أو $x \geq -a$

تذكر:

• $|x| \geq 1$

تعني أن بعد x عن الصفر هو أصغر من أو يساوي ١ على خط الأعداد.

• $|x| \leq 1$ تعني

أن بعد x عن الصفر هو أكبر من أو يساوي ١ على خط الأعداد.

مثال (٧)

أوجد مجموعة حل المتباينة $|2x + 1| + 4 \geq 12$ ، ومثل مجموعة الحل على خط الأعداد.

الحل: $|2x + 1| + 4 \geq 12$

$8 \geq |2x + 1|$

$2 \geq |2x + 1|$

$2 - 2 \geq 2x + 1 - 2$

$0 \geq 2x - 1$

$\frac{1}{2} \geq x \geq \frac{1}{2}$

مجموعة الحل $= \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2} \right]$

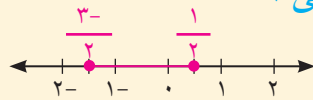
إضافة (-4) إلى طرفي المتباينة

قسمة كل طرف على ٢

كتابة المتباينة المكافئة

إضافة (-1)

القسمة على ٢



حاول أن تحل

٧ أوجد مجموعة حل المتباينة $\left| \frac{1}{x} - \frac{4}{5} \right| > 6$ ، ومثل مجموعة الحل على خط أعداد.

مثال (٨)

أوجد مجموعة حل المتباينة: $٥ < ١ - |٤ - ٣م|٢$ ، ومثل الحل على خط الأعداد.

الحل: $٥ < ١ - |٤ - ٣م|٢$

$$٦ < |٤ - ٣م|٢$$

$$٣ < |٤ - ٣م|$$

$$٣ < ٤ - ٣م \quad \text{أو} \quad ٣ < ٤ - ٣م$$

$$٧ < ٣م$$

$$\frac{٧}{٣} < م$$

$$٣ - > ٤ - ٣م$$

$$١ > ٣م$$

$$\frac{١}{٣} > م$$

$$\left(\frac{١}{٣}, \infty\right) \cup \left(\infty, \frac{٧}{٣}\right) = \text{مجموعة الحل}$$

إضافة ١ إلى طرفي المتباينة

قسمة كل طرف على ٢

كتابة المتباينة المكافئة

بسّط

قسمة كل طرف على ٣



حاول أن تحل

٨ أوجد مجموعة حل المتباينة: $\frac{٧}{٨} \leq |س - \frac{٣}{٤}|$ ومثل الحل على خط الأعداد.

مثال (٩) تطبيقات حياتية (إثرائي)

رياضة: يبلغ طول قطر دائرة مرمى كرة السلة ٤٥ سم مع هامش خطأ لا يزيد على ١ سم.

أ) اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن قطر دائرة مرمى تحقق هذا الشرط.

ب) أوجد قيم طول القطر المقبولة ومثلها على خط أعداد.

الحل:

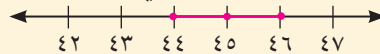
ليكن س طول قطر دائرة مرمى كرة سلة، وحيث إن س لا يزيد أو ينقص عن ٤٥ سم

بأكثر من ١ سم، فإن قيم س تحقق $|س - ٤٥| \geq ١$.

$$١ - \geq س - ٤٥ \geq ١$$

$$٤٤ \geq س \geq ٤٦$$

مجموعة الحل = $[٤٦, ٤٤]$ أي أن قيم طول القطر المقبولة تنتمي إلى $[٤٦, ٤٤]$



حاول أن تحل

٩ درجة حموضة عصير الطماطم هي ٤ مع هامش سماح ٠,٢. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تعبر عن درجات الحموضة المقبولة. وحلها ثم بين الحل على خط أعداد.



مثال (١٠) تطبيقات حياتية

يبلغ وزن عبوة رقائق الذرة ٤٥٠ جرامًا. يختار مراقب الجودة بعض العبوات للتحقق من زنتها. تلغى كل عبوة يزيد الفرق بين وزنها ووزن عبوة الذرة عن ٥ جم. اكتب متباينة تبين أوزان العبوات غير المقبولة ومثل الحل على خط الأعداد.

الحل:

لتكن s وزن العبوة. العبوات غير المقبولة هي التي يزيد وزنها أو يقل عن الوزن المبين بأكثر من ٥ جم.

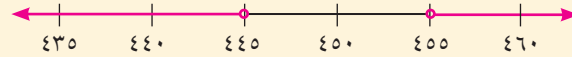
$$\text{أي } |s - 450| > 5$$

$$s - 450 < -5$$

$$\text{أو } s - 450 > 5$$

$$\text{أو } s > 455$$

$$s < 445$$



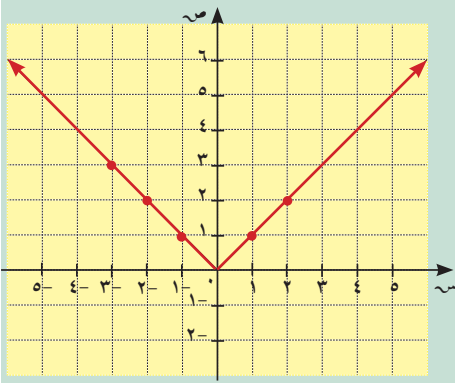
حاول أن تحل

١٠ يعرض أحد المحلات المثلجات في عبوات تزن ٧٥٠ جرامًا. عند التحقق من الوزن تقبل العبوات التي يقل الفرق بين وزنها ووزن العبوة المعتمد عن ٤٠ جرامًا. اكتب متباينة تتضمن قيمة مطلقة تبين أوزان العبوات المقبولة ومثل الحل على خط الأعداد.

دالة القيمة المطلقة Absolute Value Function

سوف تتعلم

- الرسم البياني لدالة القيمة المطلقة
- استخدام هندسة التحويلات في رسم بعض دوال القيمة المطلقة



دعنا نفكر ونتناقش

المعادلات على الشكل $y = |x + b| + c$ تمثل دوال قيمة مطلقة بمتغيرين. يمثل الرأس أكبر قيمة أو أصغر قيمة للدالة والتمثيل البياني لهذه الدوال يكون على شكل زاوية.

لرسم الدالة $y = |x|$ بيانيًا يمكن استخدام جدول قيم.

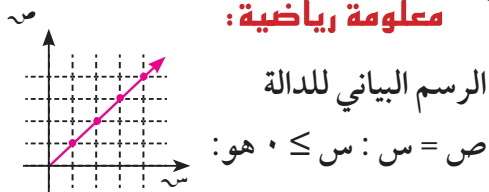
٣-	٢-	١-	٠	١	٢	س
٣	٢	١	٠	١	٢	ص = س

يمكن أيضًا كتابة $y = |x|$ دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$\left. \begin{array}{l} \text{س} : \text{س} < ٠ \\ \text{س} : \text{س} = ٠ \\ \text{س} : \text{س} > ٠ \end{array} \right\} = \text{ص}$$

تعميم

معلومة رياضية:



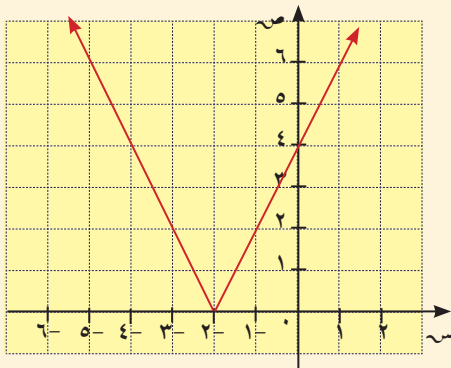
الرسم البياني للدالة

ص = س : س ≤ ٠ هو:

رأس منحنى الدالة $y = |x + b| + c$ هو النقطة $(-b, c)$

ملاحظة: رأس منحنى الدالة $y = |x + b| + c$ هو النقطة $(-b, c)$

مثال (١)



ارسم بيانيًا الدالة: $y = |x + 2| - 4$.

الحل: رأس منحنى الدالة هو $(-2, -4)$

$$-4 = \frac{4}{2} = \frac{b}{2} \text{ أي أن رأس المنحنى } (-2, -4).$$

نضع جدول قيم للأزواج المرتبة (س، ص) يتضمن رأس المنحنى.

٤-	٣-	٢-	١-	٠	س
٤	٢	٠	٢	٤	ص

حاول أن تحل

١ ارسم بيانيًا الدالة: $y = |x + 3| - 4$.

مثال (٢)

ارسم بيانيًا الدالة $ص = |س - ٣| + ٢$ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.
الحل:

نعيد الكتابة دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

$$ص = |س - ٣| + ٢$$

$$ص = \begin{cases} س - ٣ + ٢ : س \leq ٣ \\ -(س - ٣) + ٢ : س > ٣ \end{cases}$$

$$ص = \begin{cases} س - ١ : س \leq ٣ \\ -س + ٥ : س > ٣ \end{cases}$$

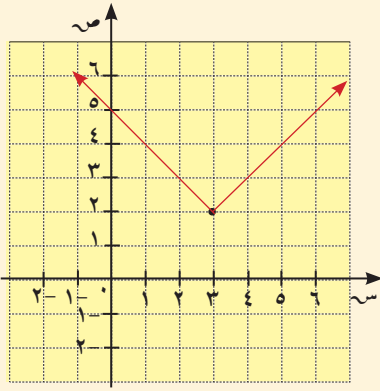
رأس منحنى الدالة $(٢, ٣) = (ج, \frac{ب}{م})$
نرسم بيانيًا كلاً من:

$$ص = س - ١ \text{ حيث } س \leq ٣,$$

س	٣	٤	٥
ص	٢	٣	٤

$$ص = -س + ٥ \text{ حيث } س > ٣.$$

س	٣	٢	١
ص	٢	٣	٤



حاول أن تحل

٢ ارسم بيانيًا الدالة: $ص = \frac{١}{٢}س + ١ - ٣$ بعد كتابتها دون استخدام رمز القيمة المطلقة.

مثال (٣)

يقع منزل إبراهيم بين مدرسته والمكتبة العامة كما في الشكل، وتوجد هذه المواقع الثلاثة على خط مستقيم يمر بدوّار الجوازات. تبعد المدرسة عن الدوّار ٢ كم وتبعد المكتبة العامة عنه ٧ كم في الاتجاه المعاكس. كم يبعد منزل إبراهيم عن الدوّار إذا كان البعد بين المنزل والمكتبة العامة مثلي البعد بين المنزل والمدرسة؟

الحل:

ليكن س موقع المنزل على الخط المستقيم.

$$\therefore |س - (٢-)| = \text{البعد بين المنزل والمدرسة}, |س - ٧| = \text{البعد بين المنزل والمكتبة}.$$

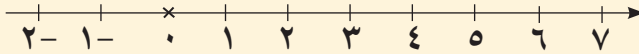
$$\therefore |س - ٧| = |س + ٢|$$

خواص القيمة المطلقة

$$|س - ٧| = |س + ٢|$$

دوّار الجوازات المدرسة

المكتبة العامة



$$\begin{array}{l|l}
 \begin{array}{l}
 \text{س} - ٧ = ٢ - \text{س} - ٤ \\
 \text{س} + ٢ = ٧ - \text{س} - ٤ \\
 ٣ = \text{س} \\
 \text{س} = ١
 \end{array}
 &
 \begin{array}{l}
 \text{س} - ٧ = ٢ + \text{س} - ٤ \\
 \text{س} - ٧ = \text{س} - ١ \\
 \text{س} = ١١ \text{ مرفوضة، لماذا؟}
 \end{array}
 \end{array}$$

يبعد منزل إبراهيم ١ كم عن الدوّار لجهة المكتبة العامة.

حاول أن تحل

٣ في مثال (٣)، ناقش حل المسألة إذا كانت المكتبة العامة تبعد ٤ كم عن الدوّار.

رسم بيان دوال المطلق باستخدام بعض التحويلات الهندسية

Graph of Absolute Value Functions Using some Geometric Transformations

سوف نستخدم الإزاحة (الانسحاب) أفقيًا أو رأسيًا أو الاثنين معًا في رسم بعض دوال القيمة المطلقة.

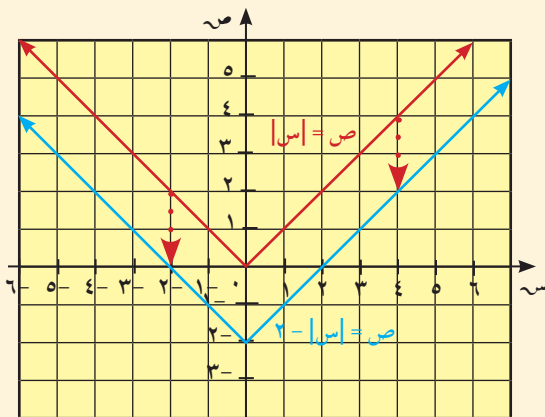
مثال (٤)

ارسم بيان كل من الدالتين: $|س| = ص$ ، $٢ - |س| = ص$.

صف كيف يرتبط الرسم البياني للدالة $٢ - |س| = ص$ بالرسم البياني للدالة $|س| = ص$.

الحل:

اصنع جدول قيم، ثم ارسم بيانًا.



س	$ س = ص$	$٢ - س = ص$
٤ -	٤	٢ -
٢ -	٢	٠
٠	٠	٢ -
٢	٢	٠
٤	٤	٢ -

لكل قيمة للمتغير س، تكون قيمة $٢ - |س| = ص$ أصغر بـ ٢ من قيمة $|س| = ص$.

الرسم البياني لـ $٢ - |س| = ص$ هو صورة للرسم البياني لـ $|س| = ص$ بعد إزاحته وحدتين إلى أسفل.

حاول أن تحل

٤ لكل زوج من الدوال، قارن بين الرسمين البيانيين. صف كيف يتم الانتقال من الرسم البياني الأول إلى الثاني.

أ $ص = |س|$ ، $ص = |س| - ٤$

ب $ص = |س| - ٣$ ، $ص = |س| + ٣$

دالة المرجع هي دالة نستخدم بيانها للحصول على بيان دوال أخرى بإجراء بعض التحويلات الهندسية.

بعض دوال المرجع هي: $ص = |س|$ حيث $١ \neq ٠$ ، $ص = س^٢$ ، $ص = |س|$ ، $ص = -|س|$ ، ...
الرسم البياني للدالة $ص = س + ك$ (ك عدد حقيقي موجب) ينتج من انسحاب الرسم البياني للدالة $ص = س$ إلى الأعلى ك وحدة.
كذلك ينتج الرسم البياني للدالة $ص = س - ك$ من انسحاب الرسم البياني للدالة $ص = س$ إلى الأسفل ك وحدة.
التمثيل البياني للدالة $ص = |س| \pm ك$ ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة $ص = |س|$ إلى الأعلى (أو إلى الأسفل) ك وحدة.
وبالمثل التمثيل البياني للدالة $ص = -|س| \pm ك$ ينتج من انسحاب التمثيل البياني للدالة $ص = -|س|$ (إلى الأعلى أو إلى الأسفل) ك وحدة.

مثال (٥)

لكل من الدالتين، حدّد دالة المرجع وارسم بيانها، ثم ارسم كل من الدالتين بياناً مستخدماً الانسحاب بعد تحديد مسافة الانسحاب واتجاهه.

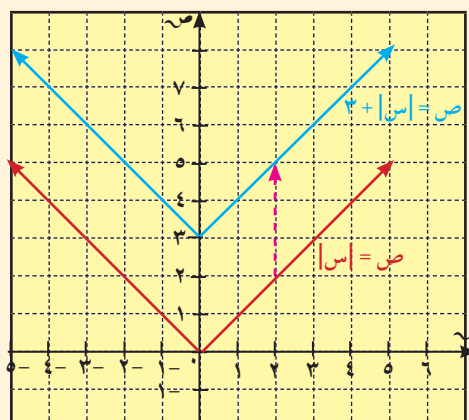
أ $ص = |س| + ٣$

الحل:

أ دالة المرجع هي $ص = |س|$ ، $ك = ٣$

أزح الرسم البياني للدالة $ص = |س|$

٣ وحدات إلى الأعلى.



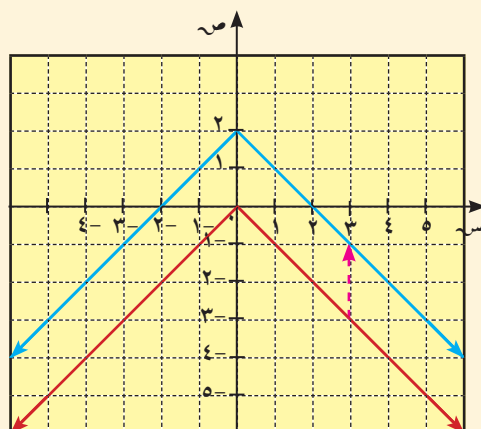
ب $ص = -|س| + ٢$

الحل:

ب دالة المرجع هي $ص = -|س|$ ، $ك = ٢$

أزح الرسم البياني للدالة $ص = -|س|$

وحدتين إلى الأعلى.



حاول أن تحل

٥ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة $ص = |س| + ٥$.

ملاحظة: يمكنك عمل جدول للقيم وتحديد بعض النقاط للتحقق من صحة الرسم.

يتشارك الانسحاب الأفقي مع الانسحاب الرأسى ببعض الخصائص.

الرسم البياني للدالة $ص = |س| + ل$ (حيث $ل$ عدد حقيقي موجب) هو انسحاب للرسم البياني للدالة $ص = |س|$ ، $ل$ وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة $ص = |س| - ل$ هو انسحاب لدالة المرجع $ص = |س|$ ، $ل$ وحدة إلى جهة اليمين.

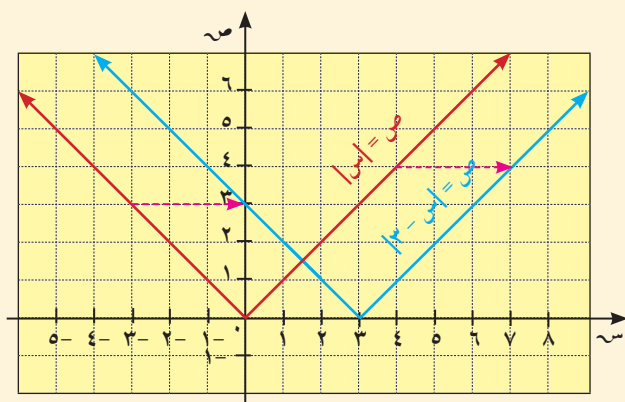
مثال (٦)

لكل من الدالتين، حدّد قيمة مسافة الانسحاب $ل$ ثم ارسم بيانيًا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع $ص = |س|$

ب $ص = |س - ٣|$

الحل:

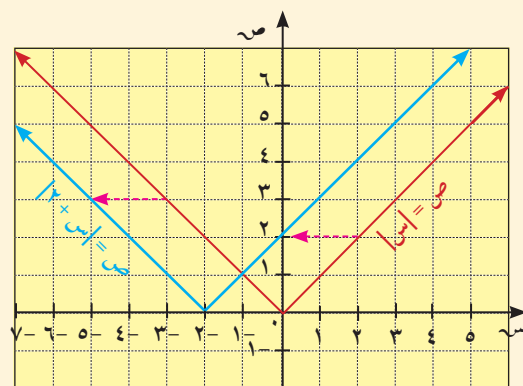
دالة المرجع هي $ص = |س|$ ، $ل = ٣$
الإشارة (-) تعني الإزاحة إلى اليمين.
أزح رسم $ص = |س|$ ثلاث وحدات إلى اليمين.



أ $ص = |س + ٢|$

الحل:

دالة المرجع هي $ص = |س|$ ، $ل = ٢$
الإشارة (+) تعني الإزاحة إلى اليسار.
أزح رسم $ص = |س|$ وحدتين إلى اليسار.



حاول أن تحل

٦ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة $ص = |س + \frac{٥}{٢}|$.

الرسم البياني للدالة: $v = -|s| + 4$ حيث $l \ni ح$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة $v = -|s|$ ، l وحدة إلى جهة اليسار. كذلك الرسم البياني للدالة $v = -|s - 4|$ هو انسحاب لدالة المرجع $v = -|s|$ ، l وحدة إلى جهة اليمين.

مثال (٧)

لكل من الدالتين، حدد قيمة مسافة الانسحاب l ، ثم ارسم بيانيًا كل دالة مستخدمًا الإزاحة، معتبرًا دالة المرجع $v = -|s|$

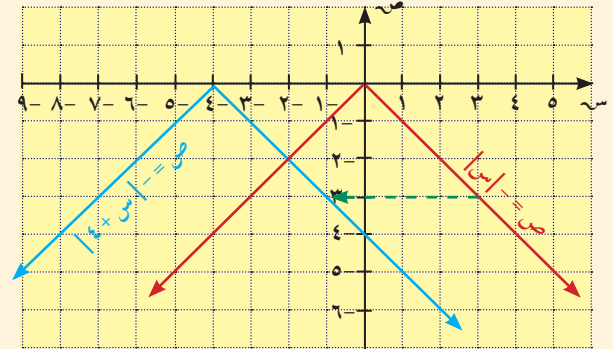
أ $v = -|s + 4|$

الحل:

دالة المرجع $v = -|s|$ ، $l = 4$

($4+$) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليسار.

ضع الرأس ($0, 4$) ثم ارسم بيانيًا الدالة.



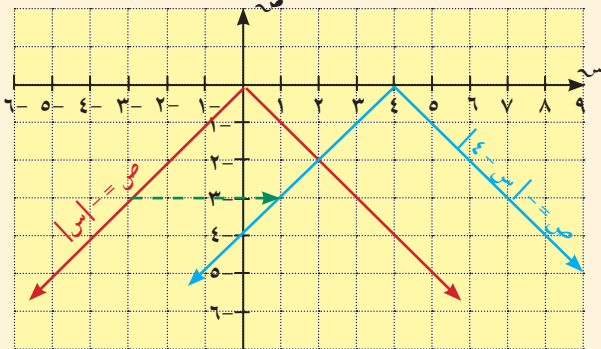
ب $v = -|s - 4|$

الحل:

دالة المرجع $v = -|s|$ ، $l = 4$

($4-$) تعني الانسحاب أربعة وحدات إلى جهة اليمين.

ضع الرأس ($4, 0$) ثم ارسم بيانيًا الدالة.



حاول أن تحل

٧ لكل من الدالتين، حدد دالة المرجع وقيمة مسافة الانسحاب l ، ثم ارسم بيانيًا كل دالة مستخدمًا الانسحاب.

أ $v = -|s - 2|$

ب $v = -|s + 3|$

تعرفت كيفية استخدام الانسحاب الأفقي أو الرأسى لدوال المرجع للحصول على رسم بياني لبعض دوال القيمة المطلقة. يمكن أيضاً استخدام الانسحابين الأفقي والرأسي معاً للحصول على بعض الرسوم البيانية للدوال: $ص = |س| + ل + ك$

مثال (٨)

ارسم بيانياً كلا من الدالتين:

أ $ص = |س - ٢| + ١$

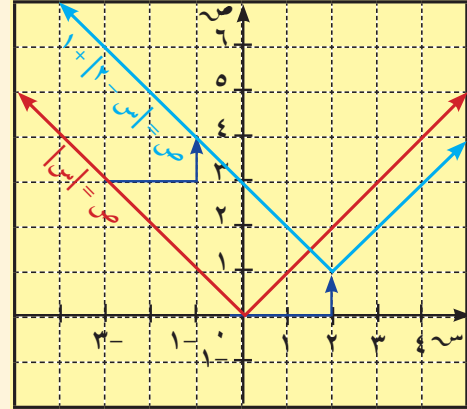
الحل:

دالة المرجع $ص = |س|$ ، $ل = ٢$ ، $ك = ١$

(٢-) تعني الانسحاب وحدتين إلى جهة اليمين.

(١+) تعني الانسحاب وحدة واحدة إلى الأعلى.

ضع الرأس (٢، ١) ثم ارسم بيانياً الدالة.



حاول أن تحل

٨ استخدم دالة المرجع والانسحاب لرسم الدالة:

أ $ص = |س + ٤| + ٣$

ب $ص = -|س - ٥| + ٣$

ب $ص = -|س + ٣| - ٢$

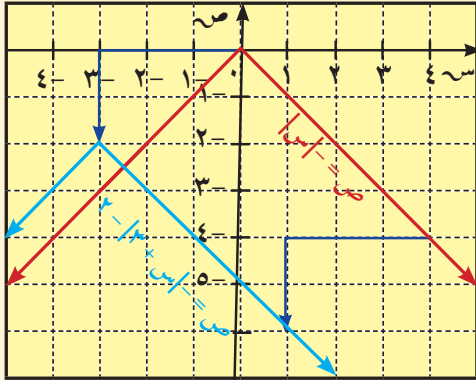
الحل:

دالة المرجع هي $ص = -|س|$ ، $ل = ٣$ ، $ك = -٢$

(٣+) تعني الانسحاب ٣ وحدات إلى جهة اليسار.

(٢-) تعني الانسحاب وحدتين إلى أسفل.

ضع الرأس (-٣، -٢) ثم ارسم بيانياً الدالة.



يمكنك رسم بيان الدالتين في مثال (٨) بتحديد رأس منحنى الدالة، وتحديد بعض النقاط.

حل نظام معادلتين خطيتين

Solving a System of Two Linear Equations

سوف تتعلم

- حل نظام معادلتين خطيتين بيانيًا
- حل نظام معادلتين خطيتين جبريًا باستخدام طريقة الحذف
- حل نظام معادلتين خطيتين جبريًا باستخدام طريقة التعويض

معلومة رياضية:

نستخدم الأقواس الكبيرة { قبل كتابة نظام المعادلات.

معلومة مفيدة (تكنولوجيا)

لإدخال البيانات في الآلة الحاسبة، نستخدم الصيغة:

١ **MODE** **EQN** $a_n x + b_n y = c_n$

أو

٢ **MODE** **MODE** **EQN** **2 Unknowns**

يظهر على الشاشة



$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: ١ معظم الآلات الحاسبة تعتمد الصيغة

$$ax + by = c \quad \text{أ} \quad \text{ب} + \text{ص} = \text{ج},$$

٢ تختلف صيغة إدخال البيانات من آلة حاسبة إلى أخرى لذلك ينصح بمراجعة الدليل المرفق بكل آلة حاسبة.

استكشاف: تحليل الرسوم البيانية

١ أ $\begin{cases} \text{ص} = 2\text{س} + 3 \\ \text{ص} = -\text{س} + 1 \end{cases}$ ب $\begin{cases} \text{ص} = 2\text{س} + 1 \\ \text{ص} = 2\text{س} \end{cases}$ ج $\begin{cases} \text{ص} = 2\text{س} + 2 \\ 0 = 4 - \text{ص} - 2\text{س} \end{cases}$

٢ لكل زوج من المعادلات أجب عن السؤال التالي:

هل للرسوم البيانية نقاط مشتركة؟ ما عددها؟

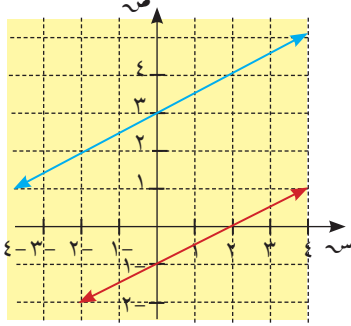
نظام معادلات هو مجموعة من معادلتين أو أكثر تستخدم المتغيرات نفسها. إذا كان الرسم البياني لكل معادلة في نظام من معادلتين هو خط مستقيم، فإن النظام يدعى **نظامًا خطيًا**.

فمثلاً $\begin{cases} 2\text{س} + 3\text{ص} = 4 \\ -\text{س} + 2\text{ص} = 3 \end{cases}$ هو نظام خطي

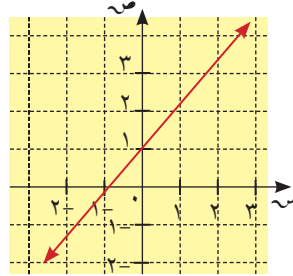
حل نظام معادلات هو إيجاد قيم المتغيرات التي تحقق كل معادلات النظام.

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين هندسيًا بتمثيل معادلاتهما بيانيًا.

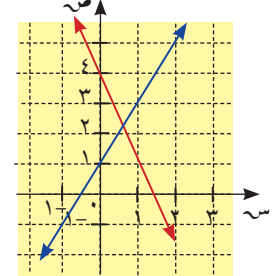
يمكن لنظام معادلتين خطيتين أن يكون له حل واحد أو لا حل، أو عدد لا نهائي من الحلول.



المستقيمان متوازيان غير منطبقين
لا حل للنظام



المستقيمان منطبقان
للنظام عدد لا نهائي من الحلول



المستقيمان متقاطعان
للنظام حل واحد

مثال (١)

أوجد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٢س - ٣ص = ١ \\ ٣س + ٤ص = ١٠ \end{cases}$ بيانياً وتحقق من الحل.
الحل:

ارسم بيانياً المستقيم الذي يمثل كل معادلة.

$٣س + ٤ص = ١٠$			
س	٠	١	٢
ص	$\frac{١}{٢}$	$\frac{٣}{٤}$	١

$٢س - ٣ص = ١$			
س	٠	١	٢
ص	$\frac{١}{٣}$	$\frac{١}{٣}$	١

نقطة تقاطع المستقيمين (١، ٢)

تحقق: تحقق ما إن كان الزوج المرتب (١، ٢) يحقق كلتا المعادلتين.

$$١٠ = ٣س + ٤ص$$

$$١٠ \stackrel{؟}{=} (١)٤ + (٢)٣$$

$$١٠ \stackrel{؟}{=} ٤ + ٦$$

$$✓ ١٠ = ١٠$$

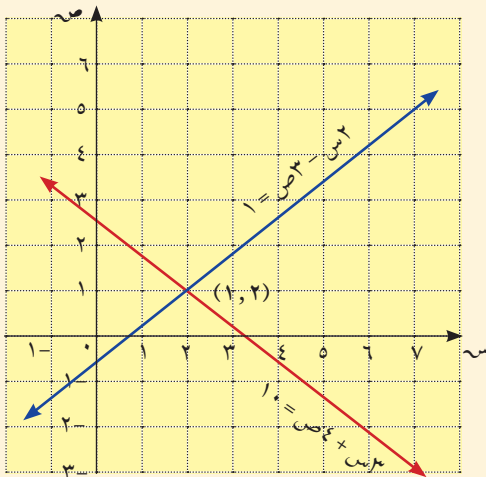
$$١ = ٢س - ٣ص$$

$$١ \stackrel{؟}{=} (١)٣ - (٢)٢$$

$$١ \stackrel{؟}{=} ٣ - ٤$$

$$✓ ١ = ١$$

∴ مجموعة حل النظام = {(١، ٢)}



حاول أن تحل

١ أوجد مجموعة حل النظام $\begin{cases} ٥ = ص + ٢س \\ ١ - = ص + س \end{cases}$ بيانياً وتحقق من الحل.

يمكن حل نظام معادلتين خطيتين جبرياً بطريقة الحذف. نستخدم خاصية الجمع والضرب في المعادلات.

مثال (٢)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} 13 = 2س - ص \\ 7 = 3س + ص \end{cases}$

الحل:

$$\begin{array}{rcl} 13 = 2س - ص & \textcircled{1} & \text{معامل ص في المعادلة الثانية هو المعكوس الجمعي} \\ 7 = 3س + ص & \textcircled{2} & \text{لمعامل ص في المعادلة الأولى لذلك نجمع المعادلتين} \\ \hline 20 = 5س & & \\ 4 = س & & \end{array}$$

اختر إحدى المعادلتين

عوّض عن س بـ ٤ في المعادلة $\textcircled{2}$

بسّط

$$\begin{array}{rcl} 7 = 3س + ص & & \\ 7 = 3(4) + ص & & \\ 7 = 12 + ص & & \\ 5- = ص & & \end{array}$$

مجموعة الحل = $\{(5, 4)\}$.

حاول أن تحل

$\textcircled{2}$ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} 11 = 3س + 2ص \\ 10 = 2س + 4ص \end{cases}$

يمكن أن تحوّل صيغ معادلتين النظام بحيث يصبح معامل ص (أو س) كل منهما المعكوس الجمعي للآخر باستخدام خاصية الضرب في المعادلات.

مثال (٣)

استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} 3 = 3س + 2ص \\ 14 = 5س - 3ص \end{cases}$

$\textcircled{1}$ الحل: $3 = 3س + 2ص$

$\textcircled{2}$ $14 = 5س - 3ص$

$$\begin{array}{rcl} 3 = 3س + 2ص & \dots & \text{اضرب المعادلة } \textcircled{1} \text{ في } 5 \leftarrow 15 = 15س + 10ص \\ 14 = 5س - 3ص & \dots & \text{اضرب المعادلة } \textcircled{2} \text{ في } 3 \leftarrow 42 = 15س - 9ص \\ \hline 57 = 19س & & \text{اجمع} \\ 3 = س & & \end{array}$$

اختَر إحدى المعادلتين

$$\begin{aligned} 3 &= 2س + 3ص \\ 3 &= 2(3) + 3ص \\ 3 &= 6 + 3ص \\ 3 - 6 &= 3ص \\ -3 &= 3ص \\ -1 &= ص \end{aligned}$$

مجموعة الحل = $\{(3, -1)\}$

حاول أن تحل

٣ استخدم طريقة الحذف لإيجاد مجموعة حل النظام $\begin{cases} 12 = 3ص + 2س \\ 13 = 5س - 3ص \end{cases}$

يمكن أيضًا حل نظام معادلتين جبريًا بطريقة التعويض.
حدّد قيمة أحد المتغيرين بدلالة الآخر في إحدى المعادلتين، وعوّض عنه بقيمته في المعادلة الثانية.

مثال (٤)

استخدم طريقة التعويض لحل النظام $\begin{cases} 1 = 3م - ل \\ 5 = 2م - 3ل \end{cases}$

الحل: في المعادلة الأولى (تم اختيارها لأنها أسهل)، حدّد قيمة ل بدلالة م.

$$1 = 3م - ل$$

$$1 - 3م = -ل$$

في المعادلة الثانية عوّض عن ل بقيمتها:

$$5 = (1 - 3م)2 - 3ل$$

$$5 = 2 - 6م - 3ل$$

$$3 = -6م - 3ل$$

$$1 = -2م - ل$$

$$1 - 3م = -ل$$

$$1 - (1 - 3م)3 = -ل$$

$$4 = -ل$$

$$\text{حل النظام هو: } م = 1, ل = 4$$

حاول أن تحل

٤ حل النظام $\begin{cases} 3 + 2ر = ت \\ 6 = 5ر - 4ت \end{cases}$ مستخدمًا طريقة التعويض.

مثال (٥) تطبيقات حياتية

دفع محمد ٢,٨٠٠ دينار ثمن ٦ أكواب شاي وقطعتي حلوى، ودفع سالم في المكان نفسه ٥,٢٠٠ دينار ثمن كوبين من الشاي و٦ قطع حلوى. ما سعر كوب الشاي وما سعر قطعة الحلوى؟
الحل:

ليكن ش سعر كوب الشاي، ح سعر قطعة الحلوى

محمد	٦ أكواب شاي $٦ \times \text{ش}$	و	قطعتا حلوى $٢ \times \text{ح}$	دفع	٢,٨٠٠ دينار $٢,٨٠٠ =$
سالم	كوبان من الشاي $٢ \times \text{ش}$	و	٦ قطع حلوى $٦ \times \text{ح}$	دفع	٥,٢٠٠ دينار $٥,٢٠٠ =$

لمعرفة الأسعار نحل النظام: $\left. \begin{array}{l} ٦ \text{ ش} + ٢ \text{ ح} = ٢,٨٠٠ \\ ٢ \text{ ش} + ٦ \text{ ح} = ٥,٢٠٠ \end{array} \right\}$

باستخدام أي من الطرائق التي سبق عرضها نحصل على: $٢,٠٠٠ \text{ ش} = ٥,٢٠٠ - ٢,٨٠٠$.
أي أن سعر كوب الشاي = ٢,٠٠٠ دينار، وسعر قطعة الحلوى = ٠,٨٠٠ دينار.

حاول أن تحل

- ٥ وزعت ٦ كجم من المربي في ١٤ عبوة، بعض العبوات يحتوي على ٥٠٠ جم وبعضها الآخر على ٣٧٥ جم. ما عدد العبوات من كل نوع؟

حل معادلات من الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations in One Variable

دعنا نفكر ونتناقش

سوف تتعلم

- قانون حل المعادلات من الدرجة الثانية
- استخدام المميز Δ
- المقارنة بين المعادلة والشكل البياني
- للدالة من الدرجة الثانية باستخدام Δ
- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة
- إيجاد معادلة من الدرجة الثانية إذا علم جذراها

سبق أن قمت بحلّ بعض معادلات الدرجة الثانية بالتحليل، كما في المثال التالي:

$$\text{حلّ المعادلة: } س^2 - ٧س + ١٠ = ٠$$

الحل:

$$س^2 - ٧س + ١٠ = ٠$$

$$٠ = (س - ٥)(٢ - س)$$

$$\therefore س = ٢ \text{ أو } س = ٥$$

$$\text{أي } س = ٢ \text{ أو } س = ٥$$

إذا حلّ المعادلة هو $س = ٢$ أو $س = ٥$

لكن بعض المعادلات يصعب (أو لا يمكن) حلها بالتحليل.

لذلك نبحث عن طريقة أخرى هي بإكمال المربع، كما في المثال التالي:

$$\text{حلّ المعادلة: } س^2 + ٦س - ٥ = ٠$$

$$\text{الحل: نأخذ المربع الكامل: } (س + ٣)^2 = س^2 + ٦س + ٩$$

$$\text{وبالمقارنة مع المعادلة } س^2 + ٦س = ٥$$

$$\text{نحصل على } ٩ = ٥ + ٦س$$

وعليه، لحل المعادلة نضيف للطرفين $٩ = ٥ + ٦س$ لنحصل على مربع كامل.

$$س^2 + ٦س + ٩ = ٥ + ٩$$

$$\text{بإكمال المربع للمقدار } س^2 + ٦س + ٩$$

$$(س + ٣)^2 = ١٤$$

$$س + ٣ = \pm \sqrt{١٤}$$

$$س = -٣ + \sqrt{١٤} \text{ أو } س = -٣ - \sqrt{١٤}$$

إن طريقة إكمال المربع تصلح لحل أي معادلة من الدرجة الثانية.

١ - حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد بإكمال المربع:

Solving Quadratic Equation by Completing the Square

مثال (١)

أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $س^2 + ١٠س - ١٦ = ٠$ بإكمال المربع.

الحل:

نكمل $س^2 + ١٠س$ لتصبح مربعاً كاملاً،

إرشاد:

لإكمال المربع نضيف إلى الطرفين $\left(\frac{١٠}{٢}\right)^2$ معامل $س$

بإضافة ٢٥ إلى طرفي المعادلة نجد أن:

$$س^٢ + ١٠س + ١٦ - = ٢٥ + ٢٥$$

$$١٦ - ٢٥ = (س + ٥)^٢$$

$$٩ = (س + ٥)^٢$$

$$٣ \pm = ٥ + س$$

$$س = ٢ - \text{ أو } س = ٨ - \text{ مجموعة الحل: } \{-٢, -٨\}.$$

حاول أن تحل

١ حل المعادلة: $س^٢ - ٨س = ١٥$ بإكمال المربع.

٢- استخدام القانون لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد

Solving Quadratic Equations by Using the Quadratic Formula

تستخدم طريقة إكمال المربع لاستنتاج قانون عام لحل أي معادلة من الدرجة الثانية على الصورة: $س^٢ + بس + ج = ٠$ ، وذلك بأخذ مثال عددي: حل المعادلة: $س^٢ + ٦س + ١ = ٠$

المثال العددي:

$$س^٢ + ٦س + ١ = ٠$$

$$س^٢ + \frac{٦}{٢}س + \frac{١}{٢} = \frac{١}{٢} \text{ بالقسمة على ٢. لماذا؟}$$

$$س^٢ + ٣س - \frac{١}{٢} = ٠$$

$$س^٢ + ٢\left(\frac{٣}{٢}\right)س + \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{٣}{٢}\right)^٢ - \frac{١}{٢}$$

$$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٩}{٤} - \frac{١}{٢}$$

$$\left(س + \frac{٣}{٢}\right)^٢ = \frac{٧}{٤}$$

$$س + \frac{٣}{٢} = \pm \sqrt{\frac{٧}{٤}}$$

$$س = \frac{\sqrt{٧} \pm ٣}{٢}$$

من ذلك نستنتج أن:

الصورة العامة:

$$س^٢ + بس + ج = ٠$$

$$س^٢ + \frac{ب}{٢}س + \frac{ج}{٢} = \frac{ج}{٢} \text{ بالقسمة على ١ حيث } ١ \neq ٠$$

$$س^٢ + \frac{ب}{٢}س - \frac{ج}{٢} = -\frac{ج}{٢}$$

$$س^٢ + ٢\left(\frac{ب}{٢}\right)س + \left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ = \left(\frac{ب}{٢}\right)^٢ - \frac{ج}{٢}$$

$$\left(س + \frac{ب}{٢}\right)^٢ = \frac{ب^٢}{٤} - \frac{ج}{٢}$$

$$\left(س + \frac{ب}{٢}\right)^٢ = \frac{ب^٢ - ٢ج}{٤}$$

$$س + \frac{ب}{٢} = \pm \sqrt{\frac{ب^٢ - ٢ج}{٤}}$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٢ج}}{٢}$$

القانون العام لحل معادلات الدرجة الثانية في متغير واحد:

$$\text{حل المعادلة: } س^٢ + بس + ج = ٠, \text{ حيث } ٠ \neq ١ \text{ هو: } س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٢ج}}{٢}$$

٣- حل معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد باستخدام القانون:

Solving Quadratic Equation in one Variable Using Formula

مثال (٢)

حلّ المعادلة: $س^2 + ١٠س - ١٦ = ٠$ باستخدام القانون.

ثم تحقق من صحة الناتج باستخدام التحليل.

الحل:

بوضع المعادلة على الصورة العامة

$$س^2 + ١٠س - ١٦ = ٠$$

بمقارنة ذلك بالصورة العامة

$$س^2 + بس + ج = ٠$$

$$١ = ب، ١٠ = ج، -١٦ = ج$$

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ} \quad (١)$$

$$ب^2 - ٤أج = (١٠)^2 - ٤ \times ١ \times (-١٦) = ٣٦$$

$$\sqrt{ب^2 - ٤أج} = \sqrt{٣٦} = ٦$$

بالتعويض في القانون

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤أج}}{٢أ} = \frac{-١٠ \pm ٦}{١ \times ٢}$$

$$س = \frac{-١٠ + ٦}{٢} \text{ أو } س = \frac{-١٠ - ٦}{٢}$$

$$س = \frac{-٤}{٢} \text{ أو } س = \frac{-١٦}{٢}$$

$$س = -٢ \text{ أو } س = -٨$$

وهو ما حصلنا عليه في المثال (١) باستخدام إكمال المربع.

وإذا استخدمنا التحليل نصل إلى النتيجة نفسها (حاول ذلك بنفسك).

حاول أن تحل

٢ باستخدام القانون، أوجد مجموعة حل المعادلة:

أ $س^2 - ٦س + ٥ = ٠$ ب $س(س - ٢) = ٧$

مثال (٣)

حلّ المعادلة: $س^2 + ٢س - ٤ = ٧$

الحل: $٢ = أ، ب = ٤، ج = -٧$

$$\begin{aligned} \text{س} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{5} \\ \text{س} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{5} \\ \text{س} &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4(1)(-16)}}{2(1)} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 + 64}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{80}}{2} = \frac{-4 \pm 4\sqrt{5}}{2} = -2 \pm 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٣ أوجد مجموعة حلّ المعادلة: $4س^2 = 13س - 9$

مثال (٤) تطبيقات حياتية

حركة الصواريخ: قامت جمعية للعلوم بصنع نموذج صاروخ، وتم إطلاقه رأسياً من سطح الأرض بسرعة ٣٠ مترًا/ثانية. بعد كم ثانية يصل الصاروخ إلى ارتفاع ٤٠ مترًا؟ علمًا بأن العلاقة بين الارتفاع (ف) بالمتراً، والزمن (ن) بالثانية، وسرعة الإطلاق (س) بالمتراً/ثانية، والارتفاع (ف)، الذي أطلق منه بالمتراً تعطى بالعلاقة:

$$ف = ٥ن^2 + س ن + ف, \quad (١)$$

الحل: بالتعويض في (١) عن ف، س،

حيث ف = ٠، (لأنه أطلق من سطح الأرض) نجد أن:

$$٤٠ = ٥ن^2 + ٣٠ن \quad (٢)$$

$$٠ = ٤٠ - ٥ن^2 - ٣٠ن$$

$$٠ = ٥ن^2 + ٣٠ن - ٤٠$$

$$\begin{aligned} \text{ن} &= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-30 \pm \sqrt{30^2 - 4(5)(-40)}}{2(5)} = \frac{-30 \pm \sqrt{900 + 800}}{10} = \frac{-30 \pm \sqrt{1700}}{10} \\ &= \frac{-30 \pm 41.23}{10} \end{aligned}$$

$$\text{ن} = \frac{-30 \pm 41.23}{10}$$

$$\text{ن} = \frac{-30 + 41.23}{10} = 1.123 \text{ أو } \text{ن} = \frac{-30 - 41.23}{10} = -7.123$$

يكون الصاروخ على ارتفاع ٤٠ مترًا من نقطة إطلاقه بعد ١.١٢٣ ثانية (٢ ثانية) عند صعوده وبعد ٧.١٢٣ ثوانٍ من الانطلاق عند نزوله.



حاول أن تحل

- ٤ قذفت رصاصة عموديًّا إلى أعلى بسرعة ٤٠ مترًا/ثانية. أوجد الزمن (ن ثانية) الذي تستغرقه الرصاصة كي تصل إلى ارتفاع ٨٠ مترًا علمًا أن العلاقة بين الزمن (ن) والارتفاع (ف) والسرعة (ع) هي:
- $$ف = -٥ن^٢ + ع ن، ع = السرعة بالمتر/ث.$$

Using the Discriminant

٤- استخدام المميز Δ :

من القانون العام لحل المعادلة: $أس^٢ + ب س + ج = ٠$ حيث $أ \neq ٠$ تكون الصورة العامة لجذري المعادلة كالتالي:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ} \text{ أو } س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^٢ - ٤أج}}{٢أ}$$

يسمى $\Delta = ب^٢ - ٤أج$ **المميز**، وقد يكون الناتج عددًا موجبًا أو صفرًا أو عددًا سالبًا لأنه يميّز لنا نوع جذري المعادلة من حيث كونهما: **عديدين حقيقيين مختلفين، إذا كان المميز موجبًا**
أو عديدين حقيقيين متساويين، إذا كان المميز يساوي صفرًا
أو عديدين غير حقيقيين، إذا كان المميز سالبًا.
 ويتضح ذلك من الأمثلة التالية:

مثال (٥)

حدد نوع جذري المعادلة: $س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$ وتحقق من نوع الجذرين جبريًّا باستخدام القانون وبيانيًّا.

الحل:

$$١ = أ، ٢ = ب، ٣ = ج$$

$$\Delta = ب^٢ - ٤أج = ٢^٢ - ٤(١)(٣) = ٤ - ١٢ = -٨$$

وحيث إنه عدد موجب، إذاً الجذران هما عددا حقيقيان مختلفان.

• يمكن التحقق من ذلك بحل المعادلة جبريًّا:

$$س^٢ + ٢س - ٣ = ٠$$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٢^٢ - ٤(١)(-٣)}}{٢(١)}$$

$$س = \frac{-٢ \pm \sqrt{٤ + ١٢}}{٢} = \frac{-٢ \pm \sqrt{١٦}}{٢}$$

$$س = ١ \text{ أو } س = -٣$$

ومن الواضح أن الجذرين عددا حقيقيان مختلفان.

معلومة مفيدة:

عند رسم بيان

$$ص = أس^٢ + ب س + ج$$

حيث $أ \neq ٠$ ، يكون رأس المنحنى

$$\text{عند } س = \frac{-ب}{٢أ}$$

التحقق بيانيًا:

س	٣-	٢-	١-	٠	١	٢
ص	٠	٣-	٤-	٣-	٠	٥

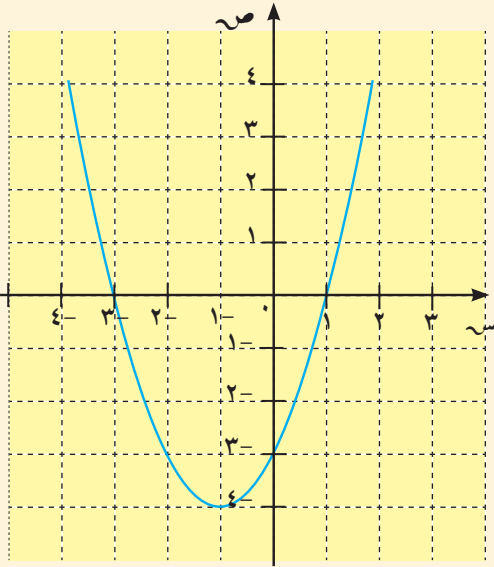
يبين الرسم البياني نقطتي تقاطع مع محور السينات.

تكتب المعادلة $س^2 + ٢س - ٣ = ٠$ على الصورة $(س + ١)(س - ٣) = ٠$

∴ بيان الدالة $ص = س^2 + ٢س - ٣$ هو انسحاب لدالة المرجع $ص = س^2$ وحدة واحدة جهة اليسار، ٤ وحدات إلى الأسفل.

حاول أن تحل

٥ حدد نوع جذري المعادلة: $س^2 - ٢س + ٥ = ٠$ ، تحقق من الحل جبريًا وبيانيًا.



مثال (٦)

أوجد نوع جذري المعادلة: $س^4 + ٤س + ١ = ٠$. وتحقق من نوع الجذرين جبريًا باستخدام القانون وبيانيًا.

الحل: $١ = ب$ ، $٤ = ب$ ، $ج = ١$

المميز: $\Delta = ب^2 - ٤ج = ٤ - ٤ = ٠$

وحيث إن المميز يساوي صفرًا، فالجذران حقيقيان ومتساويان

وللتحقق من ذلك جبريًا:

$$س = \frac{-ب \pm \sqrt{ب^2 - ٤ج}}{٢}$$

$$س = \frac{-٤ \pm ٠}{٤ \times ٢}$$

$$س = \frac{-٤ + ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$$

$$س = \frac{-٤ - ٠}{٨} = -\frac{١}{٢}$$

أي أن الجذرين متساويان وكل منهما يساوي $-\frac{١}{٢}$

التحقق بيانيًا:

س	١	٠	٠,٥-	١-	٢-
ص	٩	١	٠	١	٩

يبين الرسم البياني نقطة تقاطع واحدة مع محور السينات.

حاول أن تحل

٦ حدد نوع جذري المعادلة: $س^2 + ١٠س + ٢٥ = ٠$ ، تحقق من الحل بيانيًا.

معلومة مفيدة:

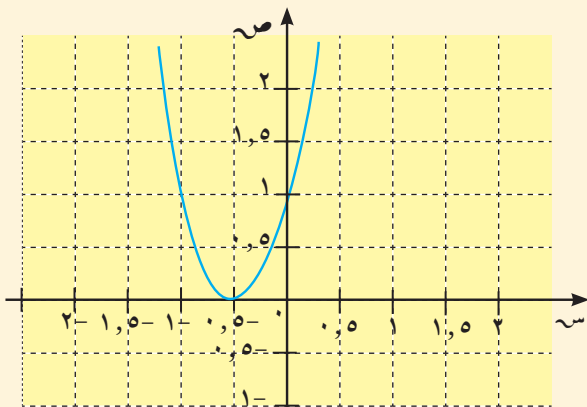
لحل معادلة تربيعية باستخدام الحاسبة نضغط

على **MODE**، **EQN** ثم **QUAD**

أو $ax^2 + bx + c = 0$. يظهر على الشاشة

$\begin{bmatrix} a & b & c \\ \square & \square & \square \end{bmatrix}$ نعوض بقيم ١ ، $ب$ ، $ج$ متبوعة

كل مرة بالضغط على **=** فيظهر الجذران تباعًا.



مثال (٧)

حدد نوع جذري المعادلة: $س^2 + ٢س + ٥ = ٠$ ، وتحقق من الحل بيانياً.
الحل:

$$١ = ٢, ٢ = ب, ٥ = ج$$

$$\Delta = ب^2 - ٤ج = ٤ - ٢٠ = -١٦$$

$$١٦ - = ٢٠ - ٤ =$$
 وهذا عدد سالب

إذاً الجذران تخيليان (أي غير حقيقيين) لأن $\sqrt{-١٦}$ ليس عدداً حقيقياً.

التحقق بيانياً:

س	١	٠	١-	٢-	٣-
ص	٨	٥	٤	٥	٨

يبين الرسم البياني أنه لا يوجد نقاط تقاطع مع محور السينات.

حاول أن تحل

٧ حدد نوع جذري المعادلة: $س^2 - ٥س + ٧ = ٠$ ، وتحقق من الحل بيانياً.

تعميم

المميز	نوع جذري المعادلة	التمثيل البياني للدالة
$ب^2 - ٤ج < ٠$ (عدد موجب)	الجذران حقيقيان (مختلفان)	$ص = ١س^2 + بس + ج$ حيث $١ \neq ٠$
$ب^2 - ٤ج = ٠$	الجذران حقيقيان متساويان	
$ب^2 - ٤ج > ٠$ (عدد سالب)	جذران غير حقيقيين	

اكتب أمثلة من عندك
عن معادلات من الدرجة
الثانية توضح الأنواع
الثلاثة للمعادلات (من
حيث جذرا المعادلة)
المبيّنة في الجدول
المجاور.

١ إذا كانت إشارة معامل $س^2$ موجبة يكون المنحنى بالشكل $\cup$.

٢ إذا كانت إشارة معامل $س^2$ سالبة يكون المنحنى بالشكل $\cap$.

٥- مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة التربيعية:

Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

تنبيه:

المعادلة التربيعية هي معادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد.

$$\begin{aligned} \text{اعتبر المعادلة: } x^2 + bx + c = 0, c \neq 0 \\ \text{جذرا المعادلة هما: } x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \text{ أو } x = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \\ \text{مجموع جذري المعادلة: } \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} + \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} = \frac{-2b}{2} = -b \\ \text{ناتج ضرب الجذرين: } \left(\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right) \times \left(\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4c}}{2} \right) = \frac{b^2 - (b^2 - 4c)}{4} = \frac{4c}{4} = c \\ \text{أي أن:} \end{aligned}$$

إذا كان جذرا المعادلة: $x^2 + bx + c = 0$ هما m ، n
فإن: $m + n = -b$ ، $m \times n = c$

٦- إيجاد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة:

Finding Sum and Product of Roots of a Quadratic Equation

مثال (٨)

بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: $x^2 + 3x - 3 = 0$ إذا وجد.

الحل: $a = 1$ ، $b = 3$ ، $c = -3$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 3^2 - 4(1)(-3) = 9 + 12 = 21 > 0$$

لما كان المميز موجبا إذا يوجد جذران حقيقيان مختلفان.

$$\text{مجموع الجذرين: } m + n = -\frac{b}{a} = -\frac{3}{1} = -3$$

$$\text{ناتج ضرب الجذرين: } m \times n = \frac{c}{a} = \frac{-3}{1} = -3$$

ويمكن التحقق من صحة النتائج بحل المعادلة.

حاول أن تحل

٨ بدون حل المعادلة، أوجد مجموع وناتج ضرب جذري المعادلة: $x^2 - 9x + 3 = 0$ إذا وجد.

مثال (٩)

إذا كان مجموع جذري المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ يساوي ١. فأوجد قيمة ب، ثم حلّ المعادلة.
الحل:

مجموع جذري المعادلة: $م + ن = -\frac{ب}{٢} = -\frac{١}{٢}$ ، $ب = -٢$
المعادلة: $٢س^٢ + ب س - ٥ = ٠$ تصبح: $٢س^٢ - ٢س - ٥ = ٠$

$$س = \frac{-\Delta \pm \sqrt{\Delta^2 - ٤٤}}{٢٢}$$

$$\Delta = ب^٢ - ٤٤ = (-٢)^٢ - ٤٤ = ٤ - ٤٤ = -٤٠$$

$$س = \frac{-(-٢) \pm \sqrt{٤٠}}{٢ \times ٢} = \frac{٢ \pm \sqrt{٤٠}}{٤}$$

$$س = \frac{٢ \pm \sqrt{٤٠}}{٤}$$

إذاً الجذران هما: $\frac{٢ + \sqrt{٤٠}}{٤}$ أو $\frac{٢ - \sqrt{٤٠}}{٤}$

حاول أن تحل

٩ إذا كان ناتج ضرب جذري المعادلة: $٢س^٢ - ٥س + ٢ = ٠$ يساوي $\frac{٢}{٣}$. فأوجد قيمة ب، ثم حلّ المعادلة.

٧- إيجاد المعادلة التربيعية إذا علم جذراها:

Finding the Quadratic Equation Knowing its Roots

لتكن المعادلة: $٢س^٢ + ب س + ج = ٠$ ، وليكن جذراها م، ن

$$س^٢ + \frac{ب}{٢}س + \frac{ج}{٢} = ٠$$

$$\text{وحيث إن } م + ن = -\frac{ب}{٢}، \frac{ج}{٢} = م ن$$

إذاً المعادلة على الصورة: $س^٢ - (م + ن)س + م ن = ٠$

هي معادلة بمعلومية مجموع الجذرين وناتج ضربهما.

طريقة أخرى:

ليكن م، ن جذري المعادلة من الدرجة الثانية في متغير واحد

∴ المعادلة تكون على الصورة: $(س - م)(س - ن) = ٠$

$$∴ س^٢ - (م + ن)س + م ن = ٠$$

مثال (١٠)

أوجد معادلة تربيعية جذراها ٣، ٥.

الحل:

بما أن الجذرين هما: ٣، ٥.

∴ المعادلة التربيعية على الصورة: $x^2 - (\text{مجموع الجذرين})x + (\text{ناتج ضرب الجذرين}) = 0$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

أو حل آخر: المعادلة على الصورة: $(x - 3)(x - 5) = 0$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

حاول أن تحل

١٠ إذا كان جذرا المعادلة $x^2 - 5x + 6 = 0$ هـ ل، م فكّون معادلة تربيعية جذراها ٢ ل، ٢ م.

حالة عامة: General Case

يوجد عدد لا نهائي من المعادلات يكون جذرا كلٍّ منها م، ن

وكلٍّ منها على الصورة: $x^2 - (n + m)x + mn = 0$

حيث (ك) أي عدد حقيقي $\neq 0$.

مثال (١١)

أوجد ثلاث معادلات تربيعية جذرا كل منها ٣، ٥.

الحل:

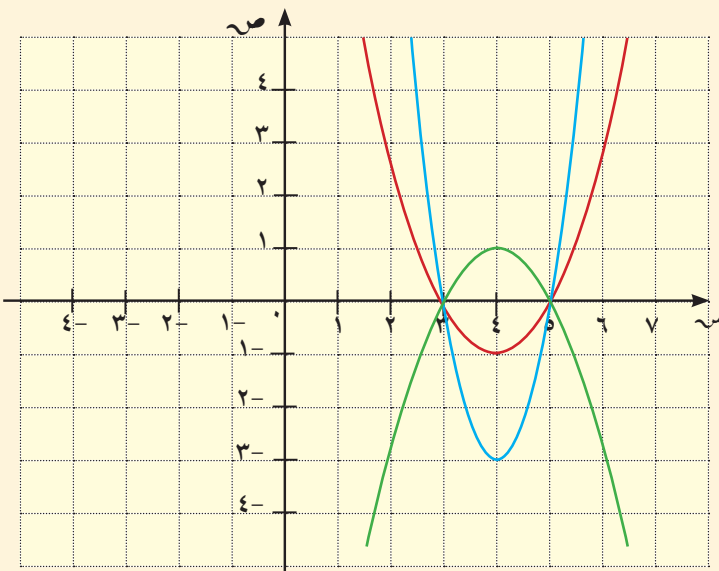
$$x^2 - 8x + 15 = 0 \quad \text{لماذا؟}$$

$$x^2 - 8x + 15 = 0$$

وهكذا (انظر الشكل المقابل).

حاول أن تحل

١١ أوجد معادلتين تربيعيتين جذرا كل منهما: -٤، -٣.



المرشد لحل المسائل

عرض مدير أحد المنتجعات الأسعار التالية خلال الموسم.

العرض أ: يدفع الشخص ٦,٥٠٠ دينار كل مرة يدخل المنتجع.

العرض ب: يدفع الشخص ٢٨ دينارًا ثم ٣ دينار كل مرة يدخل المنتجع.

يحاول يوسف معرفة أي من العرضين أفضل.

بدأ يوسف بنمذجة العرضين.

العرض أ: ص = ٦,٥٠٠ س حيث س عدد مرات دخول المنتجع، ص مجموع ما سيدفعه.

العرض ب: ص = ٢٨ + ٣س.

فكر يوسف: إذا حللت نظام المعادلتين $\left\{ \begin{array}{l} \text{ص} = 6,500 \text{ س} \\ \text{ص} = 28 + 3 \text{ س} \end{array} \right.$ أحصل على س = ٨، ص = ٥٢ أي أن العرضين يتساويان إذا دخلت ٨ مرات إلى المنتجع.

لكن يوسف لم يكتف بهذه النتيجة لأنه يريد أن يعرف بشكل عام ودون تحديد عدد مرات الدخول أي العرضين أفضل. لذلك استخدم حاسوبه ومثل بيانيًا المعادلتين.

ما استنتجه يوسف:

١ لمن يريد الدخول أقل من ٨ مرات إلى المنتجع العرض أ هو أفضل.

٢ لمن يريد الدخول أكثر من ٨ مرات إلى المنتجع العرض ب هو أفضل.

٣ يتساوى العرضان بالدخول ٨ مرّات.

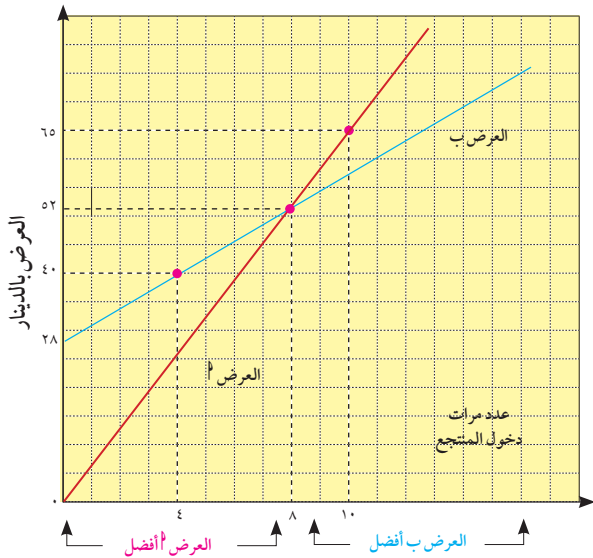
مسألة إضافية

يعرض على أحد المسارح للجمهور ١٢ عملاً فنيًا. يختار الجمهور أحد العرضين:

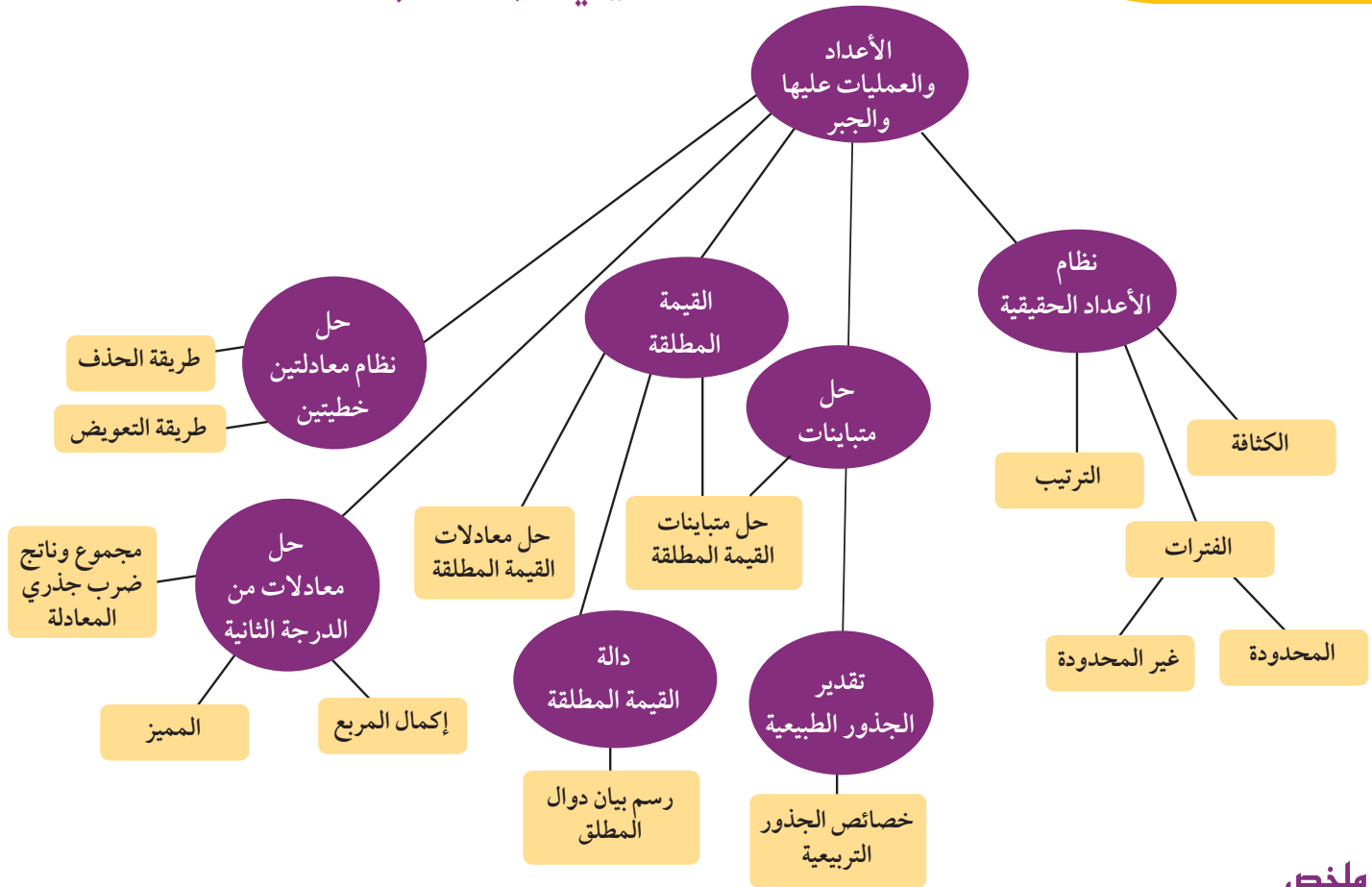
أ ١٠ دنانير لحضور كل عمل فني.

ب ٢٠ دينارًا ثم ٦ دنانير كل مرة يحضر عملاً فنيًا.

وضّح أي العرضين أفضل لمن يريد حضور ٦,٤ أعمال فنية.



مخطط تنظيمي للوحدة الأولى



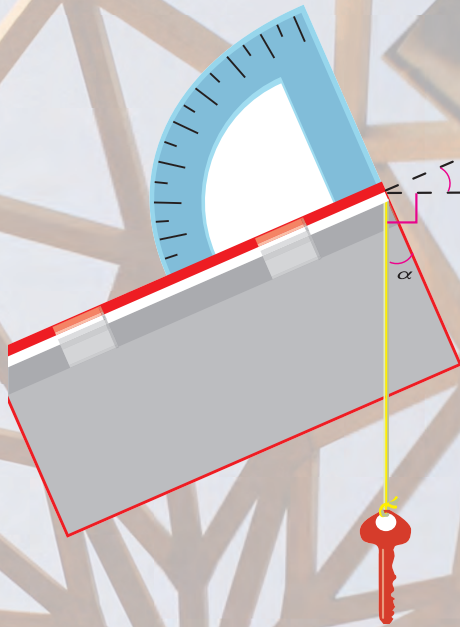
ملخص

- يوجد بين أي عددين حقيقيين مختلفين عدد لانهائي من الأعداد الحقيقية. مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة مرتبة.
- لأي عددين حقيقيين a, b تعبير واحد فقط مما يلي هو صحيح: $a < b$ أو $a = b$ أو $a > b$.
- العدد a هو جذر تربيعي العدد b عندما $a^2 = b$.
- لأي عددين حقيقيين غير سالبين a, b : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ ، $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$ حيث $b \neq 0$.
- القيمة المطلقة لأي عدد حقيقي s هي:

$$|s| = \begin{cases} s & \text{إذا كان } s \geq 0 \\ -s & \text{إذا كان } s < 0 \end{cases}$$
- $|a| \leq |b|$ ، $|a| = |b|$ لأي عدد حقيقي a, b .
- $|a| \times |b| = |a \times b|$ ، $|\frac{a}{b}| = \frac{|a|}{|b|}$ حيث $b \neq 0$ ، a, b عدنان حقيقيان.
- الرسم البياني للدالة $y = |x + l|$ حيث $l \in \mathbb{R}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة $y = |x|$ ، l وحدة إلى جهة اليسار.
- الرسم البياني للدالة $y = |x - l|$ حيث $l \in \mathbb{R}$ هو انسحاب للرسم البياني للدالة $y = |x|$ ، l وحدة إلى جهة اليمين.
- الرسم البياني للدالة $y = |x + l| - k$ هو انسحاب أفقي ورأسي معاً للرسم الدالة $y = |x|$.
- المميز: $\Delta = b^2 - 4ac$
- حل المعادلة $ax^2 + bx + c = 0$ هو $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$
- إذا كان m, n جذري المعادلة التربيعية، فإن $m + n = -\frac{b}{a}$ ، $m \times n = \frac{c}{a}$ وتكتب المعادلة على الصورة:

$$x^2 - (m + n)x + m \times n = 0$$

وحدة حساب المثلثات Trigonometry



مشروع الوحدة: صنع الميغال (Clinometer) واستخدامه.

١ مقدمة المشروع: كيف لنا أن نعرف كم تبعد الشمس عنا من دون

أن نمد أشرطة القياس لملايين الكيلومترات؟

كيف نعرف كتلة إلكترون عندما لا نستطيع أن نراه؟

أوجد الإنسان منذ القدم طرقاً للقياس غير المباشر عندما عجز عن القياس المباشر.

٢ الهدف: صنع آلة مشابهة للآلات التي استخدمها علماء الفلك

الأقدمون والرحالة لقياس ارتفاعات لا يمكن بلوغها.

٣ اللوازم: منقلة، سلك، شريط لاصق، قطعة من الورق المقوى،

مصاصة شرب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ انظر من خلال مصاصة الشرب إلى الهدف الذي تريد قياسه

(رأس برج مثلاً).

واطلب إلى أحد طلاب مجموعتك قراءة الزاوية بين المنقلة والخيط المتدلي عمودياً مع المفتاح.

لماذا تساوي هذه الزاوية زاوية المصاصة مع خط الأفق؟

(الزاوية ١ في الرسم).

ب استخدم آلة الميغال لقياس حساب زاوية ارتفاع بناء مدرستك مثلاً؛ وأوجد المسافة الأفقية بينك وبين البناء ثم احسب

ارتفاع البناء.

ج تختار المجموعة بعض المباني أو الأشياء الأخرى الموجودة في المدرسة أو في جوارها ثم يصار إلى قياس ارتفاعات

هذه الأشياء من مسافات مختلفة.

٥ التقرير: تضع كل مجموعة تقريراً مفصلاً حول كيفية صنع الميغال وكيفية استخدامه للإجابة عن الأسئلة (أ)، (ب)، (ج).

دروس الوحدة

الزوايا وقياساتها	النسب المثلثية: الجيب وجيب تمام ومقلوباتهما	ظل الزاوية ومقلوبه	النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة	حل المثلث القائم الزاوية
١-٢	٢-٢	٣-٢	٤-٢	٥-٢
زوايا الارتفاع والانخفاض	القطاع الدائري والقطعة الدائرية			
٦-٢	٧-٢			

أضف إلى معلوماتك

يذكر بعض المؤرخين أن الرياضي العربي نصير الدين الطوسي هو أول من فصل حساب المثلثات عن الفلك، كما يذكر المؤرخون أن طاليس (٦٠٠ قبل الميلاد) تطرق إلى حساب المثلثات، عندما تمكن من قياس ارتفاع الهرم عن طريق المقارنة بين طول عصا عمودية وطول ظلها وبين ارتفاع الهرم وطول ظله في الوقت نفسه.

ولقد كان لحساب المثلثات نصيبه من اهتمامات العرب. ويذكر أن اصطلاح «الظل» قد وصفه العالم العربي أبو الوفا البوزجاني في القرن العاشر الميلادي. وهذا الاصطلاح مأخوذ من ظلال الأجسام، التي تتكون نتيجة سير الضوء المنبعث من الشمس في خطوط مستقيمة.

كما أن للعرب إضافات عديدة في حساب المثلثات المستوي والكري أو الكروي (نسبة إلى سطح الكرة)، وعنهم أخذ الغربيون المعلومات المهمة وأضافوا أيضًا الكثير، حتى أصبح حساب المثلثات متضمنًا في الكثير من الأبحاث الرياضية، وأصبحت تطبيقاته في شتى المناحي العلمية والعملية.



نصير الدين الطوسي

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت كيفية استخدام نظرية فيثاغورث لإيجاد طول أحد أضلاع مثلث قائم الزاوية وإيجاد علاقة بين أطوال أضلاع مثلثات قائمة الزاوية في حالات خاصة، وتطبيق نظرية فيثاغورث على مسائل حياتية.
- تعلمت كيفية إثبات تشابه مثلثات واستنتاج أطوال الأضلاع المتناسبة والزوايا المتساوية القياس.
- استخدمت تشابه المثلثات في حل مسائل حياتية.
- تعلمت تطابق المثلثات واستنتجت تطابق الأضلاع المتناظرة والزوايا المتساوية القياس.

ماذا سوف تتعلم؟

- سوف تتعرف الزاوية الموجهة لتستنتج الزاوية الموجهة الموجبة والزاوية الموجهة السالبة والزاوية الموجهة في الوضع القياسي.
- سوف تتعرف القياس الستيني والقياس الدائري والعلاقة بينهما.
- سوف تستخدم تشابه المثلثات القائمة لتعريف النسب المثلثية.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لتحل مسائل حياتية تتضمن إيجاد ارتفاعات ومسافات وزوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض.
- سوف تستخدم النسب المثلثية لإيجاد مساحة المثلث بدلالة ضلعين والزاوية المحصورة بينهما وإيجاد مساحة القطاع الدائري ومساحة القطعة الدائرية.

المصطلحات الأساسية

زاوية موجهة - زاوية موجهة موجبة - زاوية موجهة سالبة - زاوية موجهة في الوضع القياسي - قياس ستيني - قياس دائري - جيب الزاوية - جيب تمام الزاوية - قاطع الزاوية - قاطع تمام الزاوية - ظل الزاوية - ظل تمام الزاوية - زاوية الارتفاع - زاوية الانخفاض - القطاع الدائري - القطعة الدائرية.

الزوايا وقياساتها Angles and their Measurement

سوف تتعلم

- الزاوية الموجهة
- الزاوية الموجهة الموجبة
- الزاوية الموجهة السالبة
- الزاوية في الوضع القياسي
- أنظمة قياس الزاوية
- القياس الستيني
- أجزاء الدرجة
- القياس الدائري
- طول القوس
- الزاوية النصف قطرية
- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني

دعنا نفكر ونتناقش

Angle

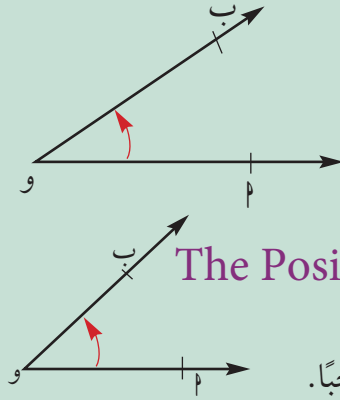
١ - الزاوية:

تعلمنا سابقاً أن الزاوية هي اتحاد شعاعين لهما نقطة بداية واحدة تسمى «رأس الزاوية»، والشعاعان هما ضلعوا الزاوية.

Oriented Angle

الزاوية الموجهة

في الشكل المقابل، رأس الزاوية هو نقطة و، وضلعوا الزاوية هما $\overrightarrow{OP}$ و $\overrightarrow{OB}$ ونرمز للزاوية بالرمز: $\angle POB$ وتسمى الزاوية في هذه الحالة بالزاوية الموجهة ويرمز لها أيضاً $(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OB})$ ويسمى $\overrightarrow{OP}$ الضلع الأساسي أو الضلع الابتدائي، و $\overrightarrow{OB}$ الضلع النهائي لها.

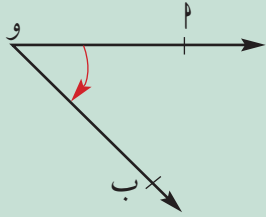


The Positive Oriented Angle

إذا كان الضلع الابتدائي هو $\overrightarrow{OP}$ والضلع النهائي لها هو $\overrightarrow{OB}$ كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون موجباً.

The Negative Oriented Angle

إذا كان الضلع الابتدائي هو $\overrightarrow{OP}$ والضلع النهائي هو $\overrightarrow{OB}$ كما في الشكل المقابل، فإن قياس الزاوية في هذه الحالة يكون سالباً.



تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الانتقال من الضلع الابتدائي $\overrightarrow{OP}$ إلى الضلع النهائي $\overrightarrow{OB}$ عكس اتجاه دوران عقارب الساعة، وتكون سالبة إذا كان الانتقال من $\overrightarrow{OP}$ إلى $\overrightarrow{OB}$ مع اتجاه دوران عقارب الساعة.

The Angle in the Standard Position

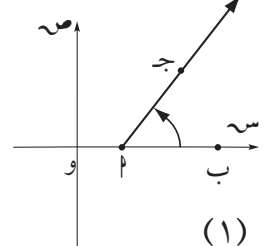
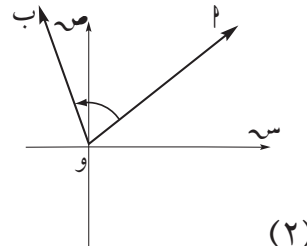
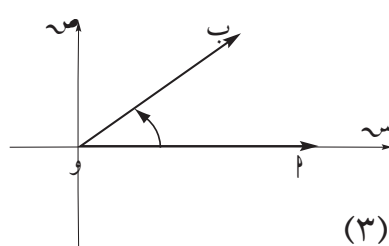
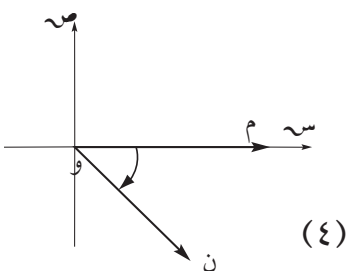
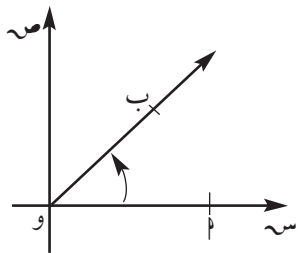
الزاوية الموجهة في الوضع القياسي:

تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان الضلع الابتدائي لها ينطبق على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها نقطة الأصل كما في الشكل المقابل.

في الأشكال التالية:

أ) سم الضلع الابتدائي والضلع النهائي، واذكر إذا كان قياس الزاوية سالباً أو موجباً.

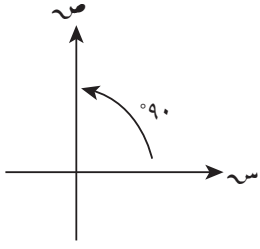
ب) حدّد الزوايا الموجهة التي في وضع قياسي.



Quarter Angle

الزاوية الربعية

هي زاوية موجهة في الوضع القياسي ينطبق ضلعها النهائي على أحد محوري الإحداثيات مثل الزوايا $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$ أو $0^\circ, 90^\circ, 180^\circ, 270^\circ, 360^\circ$.



ملاحظة:

الدرجة = 60 دقيقة

$$1^\circ = 60'$$

الدقيقة = 60 ثانية

$$1' = 60''$$

Angle Measurement Systems

٢- أنظمة قياس الزاوية:

توجد أنظمة مختلفة لقياس الزاوية، أهمها القياس الستيني والقياس الدائري.

The Degree Measure

أولاً: القياس الستيني:

في هذا القياس تقسم الزاوية التي تمثل دورة كاملة إلى 360 قسمًا متساويًا، قياس كل منها يسمى درجة. وقد اتخذت هذه الدرجة وحدة لقياس الزوايا في هذا القياس ويرمز إليها بالرمز $(^\circ)$.

90°

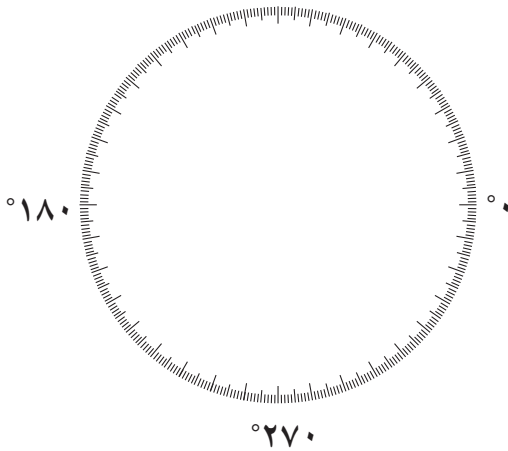
قياس الزاوية القائمة يساوي 90° . وقياس الزاوية المستقيمة يساوي 180° .

أجزاء الدرجة: الدقيقة minute وتساوي $\frac{1}{60}$ من الدرجة ويرمز إليها بالرمز $(')$.

والثانية second وتساوي $\frac{1}{3600}$ من الدرجة ويرمز إليها بالرمز $('')$.

فمثلاً سنكتب الزاوية التي قياسها 75 درجة و 45 دقيقة و 15 ثانية على الصورة التالية:

$$75^\circ 45' 15''$$



مثال (١)

أوجد $\frac{7}{8}$ الزاوية القائمة بالقياس الستيني. (بالدرجات والدقائق)

الحل:

$$\frac{7}{8} \text{ الزاوية القائمة} = 90^\circ \times \frac{7}{8} = \left(78 \frac{3}{4}\right)^\circ$$

لإيجاد $\frac{3}{4}$ الدرجة بالدقائق.

$$\frac{3}{4} \times \text{درجة} = \frac{3}{4} \times 60' = 45'$$

$$\text{أي أن } \frac{7}{8} \text{ الزاوية القائمة} = 78^\circ 45'$$

حاول أن تحل

١ اكتب كلاً مما يلي بالقياس الستيني.

ب ٠, ٦٢٥ الزاوية القائمة

أ $\frac{7}{32}$ الزاوية القائمة

مثال (٢)

استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{5}{11}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني (بالدرجات والدقائق والثواني والأجزاء من مئة من الثانية).

الحل:

$$\frac{5}{11} \text{ الزاوية المستقيمة} = 180 \times \frac{5}{11}^\circ$$

باستخدام الآلة الحاسبة:

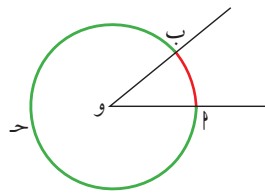
$$180 \times \frac{5}{11} = 81.81818181818181$$

فيظهر على الشاشة $81^\circ 49' 5.45''$

أي ٨١ درجة و ٤٩ دقيقة و ٥ ثوانٍ و ٤٥ جزءاً من مئة من الثانية.

حاول أن تحل

٢ استخدم الآلة الحاسبة لإيجاد $\frac{3}{7}$ الزاوية المستقيمة بالقياس الستيني.



ثانياً: القياس الدائري (الراديان): The Radian Measure

الزاوية المركزية زاوية رأسها مركز الدائرة.

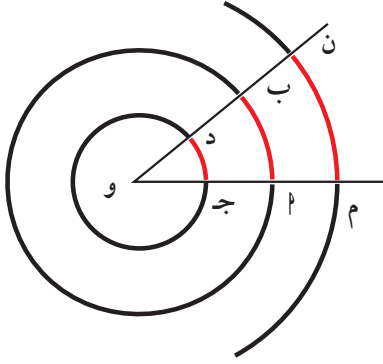
ضلعاً هذه الزاوية المركزية يقطعان الدائرة في نقطتين أ، ب.

طول القوس $\widehat{AB}$ هو المسافة على الدائرة بين النقطتين أ، ب.

ملاحظة: يتشكل من تقاطع ضلعي الزاوية المركزية مع الدائرة قوسان: القوس الأصغر $\widehat{AB}$ (باللون الأحمر)، القوس الأكبر $\widehat{AB}$ (باللون الأخضر) ويمكن التعبير عنه بـ $\widehat{AB}$. يعتمد القياس الدائري على طول القوس في الدائرة الذي تحصره الزاوية المركزية وعلى طول نصف قطر الدائرة.

حقيقة هندسية: في الدوائر المتحدة المركز، النسبة بين طول قوس أي زاوية مركزية وطول نصف قطر دائرتها المناظرة تساوي مقداراً ثابتاً يتوقف على قياس الزاوية التي تحصر هذا القوس.

$$\text{في الشكل المجاور: } \frac{\text{طول } \widehat{MN}}{OM} = \frac{\text{طول } \widehat{AB}}{OA} = \frac{\text{طول } \widehat{CD}}{OD}$$



أي أن $\frac{\text{طول القوس من الدائرة الذي تحصره زاوية مركزية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}} = \text{مقدارًا ثابتًا}$
وهذا يعد نظامًا آخر لقياس الزاوية يسمى بالقياس الدائري للزاوية.

تعريف:
القياس الدائري لزاوية مركزية في دائرة = $\frac{\text{طول القوس الذي تحصره هذه الزاوية}}{\text{طول نصف قطر هذه الدائرة}}$
ويرمز إليه بالرمز هـ.

فإذا رمزنا إلى طول القوس بالرمز (ل) وإلى طول نصف القطر بالرمز نـ

$$\text{فإن } هـ = \frac{ل}{ن} \text{ ومنها } ل = هـ \cdot ن$$

وحدة قياس الزوايا لهذا النوع من القياس تسمى الراديان ويرمز لها بالرمز (ر).

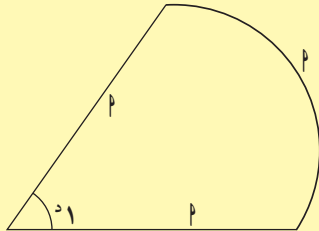
معلومة:

- في بعض الأنظمة، تقسم الزاوية القائمة إلى ١٠٠ جزء متساوٍ، كل منها يسمى "جراد" Grad.
- كل ١ جراد يعادل $\frac{٩}{١٠}$ من الدرجة.

Radial Angle

تعريف الزاوية النصف قطرية:

هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة.
وقياس الزاوية النصف القطرية يساوي ١ راديان (ر).



وعلى هذا فإن الزاوية التي قياسها ر هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوسًا من هذه الدائرة طوله يساوي خمسة أمثال طول نصف قطر هذه الدائرة.

مثال (٣)

ع ود زاوية مركزية في دائرة طول نصف قطرها ٤ سم. أوجد طول القوس ع د الذي تحصره هذه الزاوية إذا كان:

$$\text{أ } ر(ع ود) = ر\left(\frac{٣}{٤}\right) \quad \text{ب } ر(ع ود) = (٣, ١٤)$$

الحل:

$$\text{أ } \text{نفرض طول القوس } ل = \text{فيكون } ل = هـ \cdot ن$$

$$\therefore ل = \text{طول ع د} = ر \times \left(\frac{٣}{٤}\right) = ٣ \text{ سم}$$

$$\text{ب } ل = \text{طول ع د} = ر \times ٣, ١٤ = ١٢, ٥٦ \text{ سم}$$

حاول أن تحل

- ٣ دائرة طول نصف قطرها ٦ سم. أوجد طول القوس الذي تحصره زاوية مركزية قياسها
 أ (١, ٢) ب (١, ٥٧)

Degree-Radian Relation

٣- العلاقة بين القياسين الدائري والستيني:

إذا كان طول نصف الدائرة يساوي الوحدة فإن:

- ١ قياس الزاوية المركزية (بالقياس الدائري) يساوي طول قوسها.
 ٢ الزاوية المركزية التي قياسها الستيني يساوي 360° ، يكون طول قوسها 2π فـ أي قياسها الدائري يساوي 2π .
 360° يعادل 2π ومنها 180° يعادل π .

ملاحظة:

عند عدم ذكر وحدة القياس،
 يعتبر الراديان هو الوحدة.

$$1^\circ = \frac{180^\circ}{\pi} \approx \frac{180}{3.14159} \approx 57.2958^\circ$$

$$1^\circ = \frac{\pi}{180} \approx 0.0175$$

قانون: إذا كان لدينا زاوية قياسها الدائري هـ وقياسها الستيني س فإن:

$$\frac{\pi}{180} \times \text{س} = \text{هـ} \quad \text{ومنها س} = \text{هـ} \times \frac{180}{\pi} \quad \frac{\text{س}}{180} = \frac{\text{هـ}}{\pi}$$

أمثلة

- ٤ زاوية قياسها 5° ، أوجد القياس الستيني لهذه الزاوية لأقرب دقيقة.

الحل:

$$\text{س} = \text{هـ} \times \frac{180}{\pi}$$

$$\therefore \text{س} = 5^\circ \times \frac{180}{\pi} \approx 57.2958^\circ \approx 57^\circ 18'$$

- ٥ زاوية قياسها 75° ، أوجد القياس الدائري لها.

الحل:

$$\text{هـ} = \text{س} \times \frac{\pi}{180} \quad \text{هـ} = 75^\circ \times \frac{\pi}{180} \approx 1.309$$

- ٦ أوجد القياس الستيني للزاوية $\frac{\pi^3}{4}$.

الحل:

$$\text{س} = \text{هـ} \times \frac{180}{\pi} \quad \therefore \text{س} = \frac{\pi^3}{4} \times \frac{180}{\pi} = 135^\circ$$



حاول أن تحل

٤ أوجد بدلالة π القياس الدائري للزوايا التي قياساتها:

- أ ٤٥° ب ٣٠٠° ج ٢٢٥° د ١٥٠°

٥ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

- أ $\pi \times \frac{5}{8}$ ب ١٠, ٧٥ ج ٣, ٣٥ د $\frac{\pi}{5}$

٦ أوجد القياس الستيني للزوايا التالية:

- أ $\frac{\pi}{2}$ ب $\frac{\pi}{3}$ ج $\frac{\pi}{6}$ د $\frac{\pi}{4}$

مثال (٧)

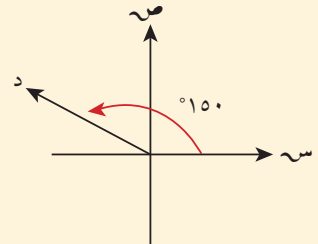
ارسم كلاً من الزوايا الموجهة التالية في الوضع القياسي، ثم حدّد الزوايا الربعية منها.

- أ ١٥٠° ب ٢٧٠° -

- ج $\frac{\pi 3}{4}$ د $\frac{\pi 3}{2}$

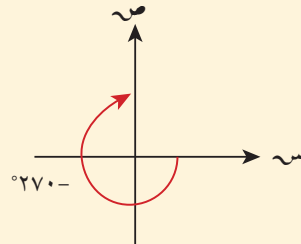
الحل:

أ



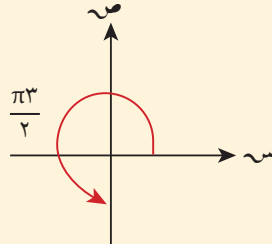
زاوية ليست ربعية

ب



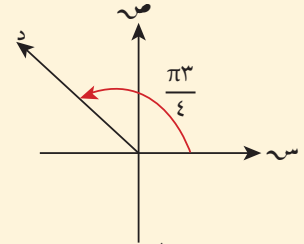
زاوية ربعية

د



زاوية ربعية

ج



زاوية ليست ربعية

حاول أن تحل

٧ حدّد الزوايا الربعية من بين الزوايا التالية: π , 250° , $\frac{\pi 5}{7}$, $\frac{\pi}{2}$, 330° .

مثال (٨)



زاوية قياسها $23^{\circ} 18' 85''$ ، أوجد القياس الدائري لهذه الزاوية مقرباً الناتج إلى رقمين عشريين.

الحل:

إذا كان θ° هو القياس الدائري فإن: $\theta^{\circ} = \frac{\pi}{180} \times \text{س}^{\circ}$
تضغط على المفاتيح بالترتيب التالي من جهة اليسار

$$\pi \div 180 \times 85 \div 18 \div 23 =$$

يظهر على الشاشة 1.488877359. $\therefore$ القياس الدائري ≈ 1.49

النسب المثلثية: الجيب وجيب التمام ومقلوباتهما Trigonometric Ratios and their Reciprocals Sine, Cosine, Secant and Cosecant

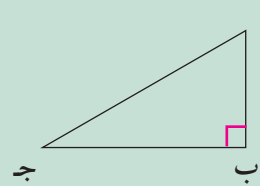
سوف تتعلم

- جيب الزاوية
- جيب تمام الزاوية
- قاطع الزاوية
- قاطع تمام الزاوية
- إيجاد قياس زاوية علم
- جيبها أو جيب تمامها

دعنا نفكر ونتناقش

١ - المقابل والمجاور لزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية:

The Opposite and Adjacent of an Acute Angle in a Right Triangle

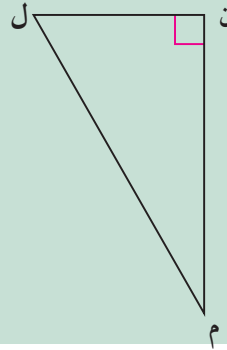


في المثلث أ ب ج الموضح بالشكل:

أ ب يسمى الضلع المقابل للزاوية ج، ب ج يسمى الضلع المجاور للزاوية ج، أ ج يسمى الوتر. وعلى هذا الأساس أكمل ما يلي:

.... هو مقابل $\hat{A}$

.... هو مجاور $\hat{A}$



في المثلث ل ن م الموضح بالشكل المقابل:

الضلع المقابل ل $\hat{M}$ هو ...

الضلع المجاور ل $\hat{M}$ هو ...

ن ل هو مجاور الزاوية ...

م ن هو مجاور الزاوية ...

ملاحظة:

للاختصار سنستخدم **المقابل** للدلالة على طول الضلع المقابل لزاوية. و**المجاور** للدلالة على طول الضلع المجاور لزاوية. و**الوتر** للدلالة على طول الوتر.

٢ - جيب الزاوية: Sine of the Angle

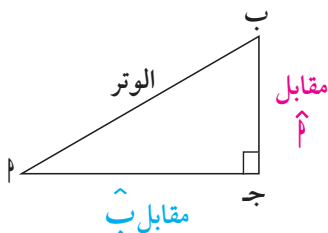
في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المقابل للزاوية الحادة إلى طول الوتر تسمى جيب الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جا) بالإنكليزية (sin).

$$\text{جيب الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$$

أي أن

في الشكل المقابل:

جيب الزاوية $\hat{A}$:

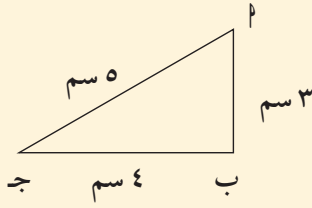


$$\text{جا } \hat{A} = \frac{\text{مقابل } \hat{A}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{أ ب}}$$

بالمثل جيب الزاوية $\hat{B}$:

$$\text{جاء } \hat{B} = \frac{\text{مقابل } \hat{B}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{أ ب}}$$

مثال (١)



في الشكل المقابل:

أثبت أن المثلث $\triangle PBJ$ ج قائم الزاوية في ب، ثم أوجد $\angle P$ ، جاجـ.

الحل:

عكس نظرية فيثاغورث

$$25 = 24 + 23 = 2(PB) + 2(BJ)$$

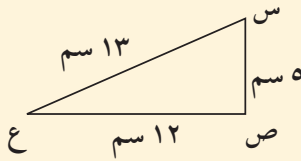
$$25 = 25 = 2(BJ)$$

$\therefore$ المثلث $\triangle PBJ$ ج قائم الزاوية في ب.

$$\cos P = \frac{\text{مقابل } \hat{P}}{\text{الوتر}} = \frac{BJ}{PJ} = \frac{4}{5}$$

$$\cos B = \frac{\text{مقابل } \hat{B}}{\text{الوتر}} = \frac{PB}{PJ} = \frac{3}{5}$$

حاول أن تحل



١ أ) أثبت أن المثلث $\triangle SVE$ ج قائم في ص.

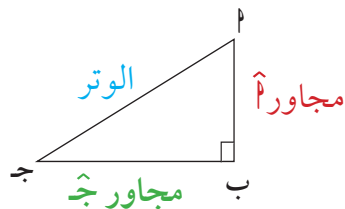
ب) أوجد $\angle S$ ، جاجـ.

Cosine of the Angle

٣- جيب تمام الزاوية:

في المثلث قائم الزاوية: نسبة طول الضلع المجاور للزاوية الحادة، إلى طول الوتر تسمى جيب تمام الزاوية، ويرمز لها بالرمز (جتا) وبالإنكليزية (cos).

$$\text{جيب تمام الزاوية} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

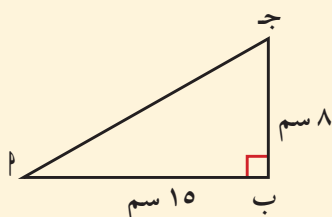


$$\cos P = \frac{\text{مجاور } \hat{P}}{\text{الوتر}} = \frac{BJ}{PJ}$$

$$\cos B = \frac{\text{مجاور } \hat{B}}{\text{الوتر}} = \frac{PB}{PJ}$$

مثال (٢)

Δ ب ج قائم في ب، أوجد كلاً من: ب ج، جتا ب، جتا ج، جتا ب. ماذا تستنتج؟



الحل: بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$^2(ب ج) = ^2(ب ج) + ^2(ب ج)$$

$$^2(ب ج) = ^2(١٥) + ^2(٨)$$

$$ب ج = ١٧ \text{ سم}$$

$$\text{جا } \hat{ب} = \frac{\text{مقابل } \hat{ب}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٧}$$

$$\text{جتا } \hat{ب} = \frac{\text{مجاور } \hat{ب}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{١٧}$$

$$\text{جا } \hat{ج} = \frac{\text{مقابل } \hat{ج}}{\text{الوتر}} = \frac{١٥}{١٧}$$

$$\text{جتا } \hat{ج} = \frac{\text{مجاور } \hat{ج}}{\text{الوتر}} = \frac{٨}{١٧}$$

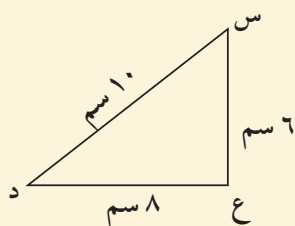
ماذا تستنتج؟

جا ب = جتا ج = $\frac{٨}{١٧}$ ، جتا ب = جا ج = $\frac{١٥}{١٧}$ ، لأن مقابل $\hat{ب}$ مجاور $\hat{ج}$.

هل تعلم؟

في الإنكليزية كلمة cosine مشتقة من كلمتي complement's و sine جيب ومنه جيب تمام الزاوية يساوي جيب الزاوية المتممة لها.

أي أن جتا س = جا (٩٠° - س)



حاول أن تحل

- ٢ أ) أثبت أن المثلث س ع د قائم الزاوية في ع.
- ب) أوجد كلاً من: جا (س)، جتا (س)، جا (د)، جتا (د).
- ج) ماذا تلاحظ بالنسبة إلى النسب المثلثية للزاويتين س، د.

Cosec and Sec

٤ - مقلوبات الجيب وجيب تمام:

مقلوب جا ب هو $\frac{١}{\text{جا ب}}$ ويسمى قاطع تمام الزاوية ب ويرمز إليه بالرمز قتا ب وبالإنكليزية Cosecant (cosec).

$$\text{قتا ب} = \frac{١}{\text{جا ب}} : \text{جا ب} \neq ٠$$

$$\text{قتا ب} = \frac{١}{\text{جا ب}} \iff \text{قتا ب} \times \text{جا ب} = ١$$

ومقلوب جتا ب هو $\frac{١}{\text{جتا ب}}$ ويسمى قاطع زاوية ب ويرمز إليه بالرمز قتا ب وبالإنكليزية Secant (sec).

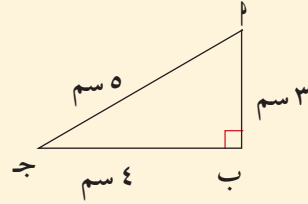
$$\frac{1}{\text{جتا } \theta} = \text{قا } \theta : \text{جتا } \theta \neq 0$$

$$\text{قا } \theta = \text{جتا } \theta \times 1$$

$$\text{قا } \theta = \frac{1}{\text{جتا } \theta} \leftarrow$$

مثال (٣)

في الشكل المقابل أوجد جاج، جتاج، قاج، قتاج.
الحل:



$$\frac{3}{5} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جاج}$$

$$\frac{4}{5} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \text{جتاج}$$

$$\frac{5}{4} = \frac{1}{\frac{4}{5}} = \frac{1}{\text{جتاج}} = \text{قاج}$$

$$\frac{5}{3} = \frac{1}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{\text{جاج}} = \text{قتاج}$$

حاول أن تحل

٣ ألب جـ مثلث فيه: أب = ٧ سم، ب جـ = ٢٤ سم، أ جـ = ٢٥ سم.
أثبت أن Δ ألب جـ قائم الزاوية، ثم أوجد جـا، جتا، قا، قتا، جاج، جتاج، قاج، قتاج.

مثال (٤)

استخدام الآلة الحاسبة

في الشكل المجاور، أوجد س، ص.
الحل:

$$\frac{\text{س}}{10} = (\angle 43^\circ)$$

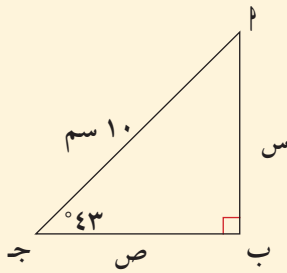
$$\text{س} = 10 \times \text{جا } (43^\circ)$$

تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على

المفاتيح على الشكل التالي:

$$10 \times \sin 43 =$$

يظهر 6.819983 ويساوي تقريباً ٦,٨ سم.



$$\frac{\text{ص}}{10} = \text{جتا } (43^\circ)$$

$$\text{ص} = 10 \times \text{جتا } (43^\circ)$$

تستخدم الآلة الحاسبة بالضغط على

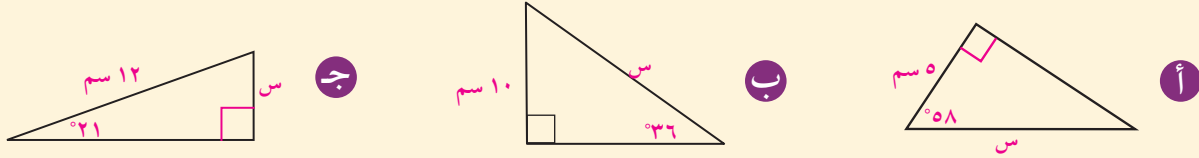
المفاتيح على الشكل التالي:

$$10 \times \cos 43 =$$

يظهر 7.313537 ويساوي تقريباً ٧,٣ سم.

حاول أن تحل

٤ أوجد قيمة s لأقرب جزء من عشرة.



كان نيكولاي كوبرنيك Nicolaus Copernicus (١٤٧٣م - ١٥٤٣م) عالمًا رياضيًا وفلكيًا، درس الطب وألّم بمعظم العلوم في عصره. يعتبر أول من صاغ نظرية مركزية الشمس وأن الأرض جرم يدور في فلكها. يعتبر كوبرنيك مؤسس الفلك الحديث. وحدة الفلك (و.ف أو AU) تمثل متوسط المسافة بين الأرض والشمس وهي تساوي تقريبًا ١٤٩ ٦٠٠ ٠٠٠ كم.

مثال (٥)

تطبيقات حياتية (إثرائي)

هل تعلم؟

١ ميل $\approx ١,٦٠٩$ كم

في الشكل المقابل، إذا كان $\angle P = 3^\circ, 22'$

أوجد بعد كوكب عطارد عن الشمس علمًا بأن بعد الأرض عن الشمس يساوي ١ وحدة الفلك AU.

الحل:

بفرض أن: s = بعد كوكب عطارد عن الشمس.

l = بعد الأرض عن الشمس

فيكون:

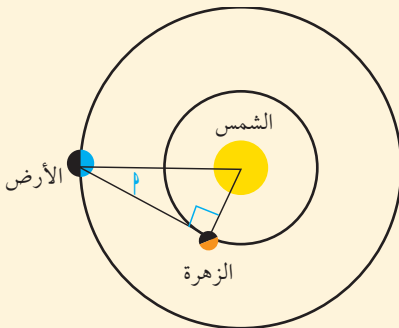
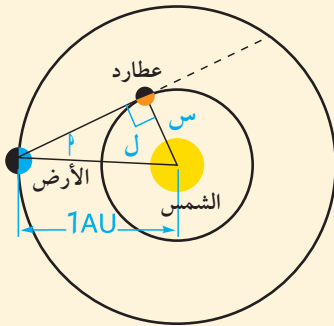
$$\frac{s}{l} = (3^\circ, 22')$$

$\therefore$ بعد عطارد عن الشمس $= s = l \times (3^\circ, 22')$.

$$AU \ 0,38 \approx 0,38 \times 1 \approx$$

حاول أن تحل

٥ كما في التطبيق السابق، أوجد بعد كوكب الزهرة عن الشمس علمًا بأن $\angle P = 1^\circ, 46'$



٥ إيجاد قياس زاوية علم جيبها او جيب تمامها

تريد معرفة قياس زاوية، تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبها المثلثية.

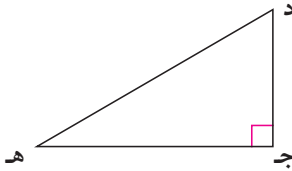
إذا كان جاد = ص فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

ننقر على: **ص** **Sin** **shift** لإيجاد د

وإذا كان جتاد = س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية د

غالبًا ما نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياسات هذه الزوايا.

ننقر على: **س** **Cos** **shift** لإيجاد د



مثال (٦)

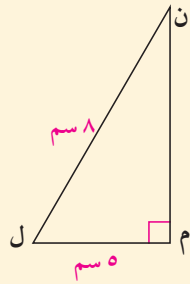
في الشكل المقابل، احسب $\hat{L}$ لأقرب درجة.

الحل:

$$\text{جتال} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$$

$$\text{جتال} = \frac{5}{8}$$

باستخدام النسب المثلثية لجيب التمام



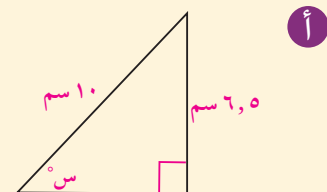
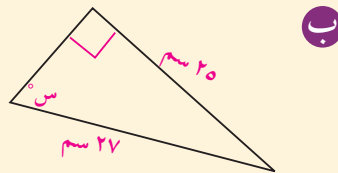
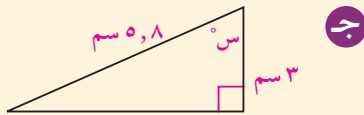
$$\text{shift} \quad \text{Cos} \quad (\quad 5 \quad \div \quad 8 \quad) \quad =$$

يظهر 51.317813

وبالتالي $\hat{L} \approx 51^\circ$

حاول أن تحل

٦ أوجد قيمة س° لأقرب درجة.



ظل الزاوية ومقلوبه

Tangent and Cotangent of an Angle

عمل تعاوني

سوف تتعلم

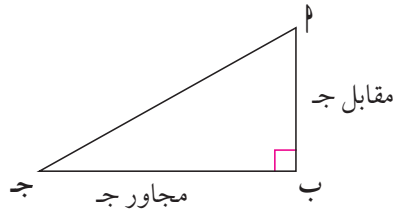
- ما هو ظل الزاوية
- إيجاد قياس الزاوية إذا علم ظلها
- مقلوب ظل الزاوية
- حل المثلث قائم الزاوية

سنعمل في مجموعات صغيرة، نختار قياسات الزوايا $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 80^\circ$

كل طالب في مجموعته يرسم مثلث Δ ج قائم الزاوية في ب، ويختار إحدى الزوايا من المثلث بحيث تنتمي إلى مجموعة قياسات الزوايا. يحسب كل طالب أطوال أضلاع المثلث باستخدام المسطرة لأقرب ملليمتر، ويستخدم الآلة الحاسبة في حساب النسب:

مقابل الزاوية ج / المجاور للزاوية ج لأقرب رقمين عشريين

في المثلث قائم الزاوية نسبة طول الضلع المقابل لزاوية حادة إلى طول الضلع المجاور للزاوية نفسها تسمى ظل الزاوية ونرمز إليها بالرمز ظا ج وبالإنكليزية **Tangent (tan)**.



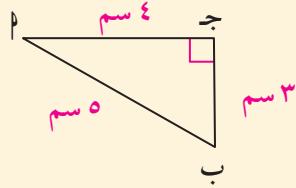
أي أن $\text{ظل الزاوية} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$

مثلاً في الشكل المقابل ظا ج = $\frac{PB}{BJ}$

قارن بين ظا 10° ، ظا 20° ، ظا 30° ، ظا 40° ، ... ماذا تستنتج؟
من العمل التعاوني السابق، يتبين أن قيمة ظا ج تزداد كلما زاد قياس الزاوية ج بين 0° ، 90° .

مثال (١)

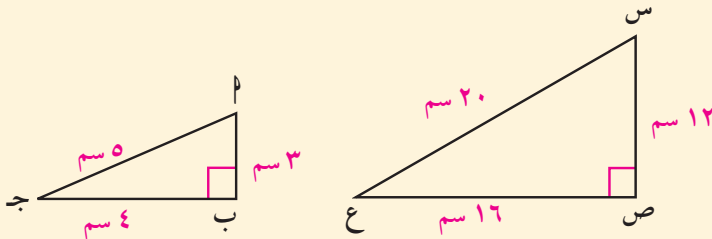
في الشكل المقابل أوجد ظل الزاوية Δ ، ظل الزاوية ب.



$$\text{الحل: ظا } \Delta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{PB}{BJ} = \frac{4}{3}$$

$$\text{ظا ب} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{BJ}{PB} = \frac{3}{4}$$

حاول أن تحل



١ أ استعن بالمثلثين المجاورين في إيجاد:

$$\frac{PB}{SV}, \frac{BJ}{SE}, \frac{PJ}{VE}. \text{ ماذا تستنتج؟}$$

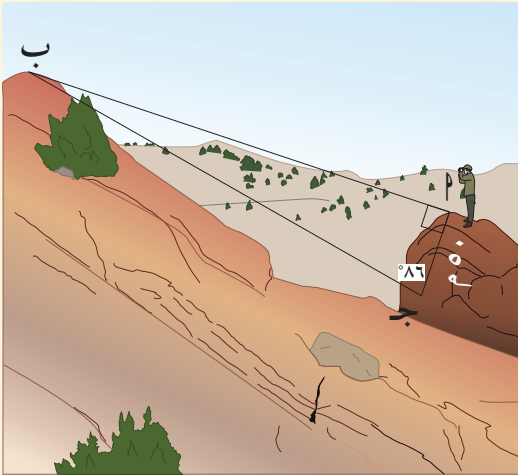
ب هل ظاس = ظا Δ ، ظاع = ظا ج؟ ماذا تستنتج؟

ج هل هذا صحيح بالنسبة إلى النسب: جاس، جا Δ وكذلك جتاس، جتا Δ ؟ ماذا تستنتج؟

مثال (٢) تطبيقات حياتية

أراد أحد أعضاء فريق الكشفية قياس المسافة بين قمتي جبلين، فوقف على قمة أحد الجبلين عند النقطة α وحدد علامة مميزة أمامه على قمة الجبل الآخر ولتكن β ، ثم اتبع التالي:

- ١ وضع مؤشر البوصلة باتجاه العلامة المميزة β وحدد قراءة المؤشر.
 - ٢ سار مسافة ٥٠ مترًا على خط مستقيم عمودي على الخط المستقيم الواصل بين القمتين.
 - ٣ وضع مؤشر البوصلة مرة ثانية في اتجاه العلامة المميزة وحدد قراءة المؤشر.
 - ٤ باستخدام قراءتي المؤشر وجد أن: $\angle \alpha = 86^\circ$.
- استخدم ظل الزاوية في حساب المسافة بين قمتي الجبلين عند النقطة التي بدأ منها القياس.



الحل: باستخدام ظل الزاوية

$$\frac{\alpha\beta}{50} = \tan(86^\circ)$$

$$\alpha\beta = 50 \times \tan(86^\circ)$$

تستخدم الآلة الحاسبة

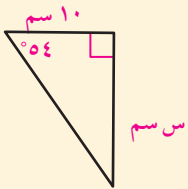
$$50 \times \tan 86 =$$

$$715.03331$$

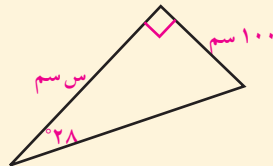
إذًا، المسافة بين قمتي الجبلين هي ٧١٥ مترًا تقريبًا.

حاول أن تحل

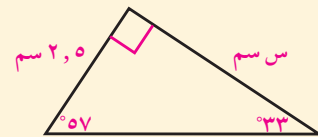
- ٢ أوجد قيمة α لأقرب جزء من عشرة.



ج



ب



أ

مثال (٣)

الهرم القائم المقابل قاعدته مربعة الشكل. أوجد طول ارتفاعه المائل ل إذا كان قياس الزاوية θ يساوي 60° .

الحل:

في Δ ن أ ب المتطابق الضلعين
 $\overline{ن ه} \perp \overline{أ ب}$

$\therefore ه ب = ه د = ٧٥ م$

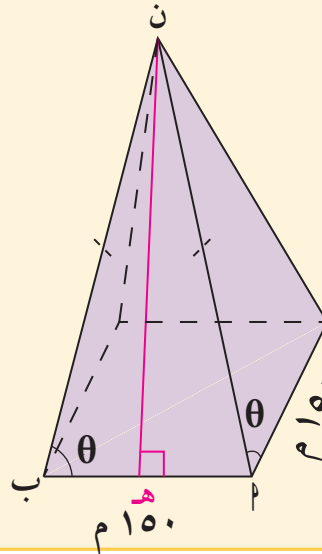
في Δ ن ه ب القائم الزاوية ه

$$\tan \theta = \frac{ل}{ه ب}$$

$$\tan 60^\circ = \frac{ل}{٧٥}$$

$$ل = ٧٥ \times \tan 60^\circ \simeq ١٣٠ \text{ مترًا.}$$

طول الارتفاع المائل $\simeq ١٣٠$ مترًا.



تذكر:

الارتفاع المائل:

هو العمود المرسوم من رأس الهرم إلى أحد أضلاع قاعدته.

١ - إيجاد قياس زاوية إذا علم ظلها: Finding the Measure of an Angle Knowing its Tangent

قد تعلم ظل زاوية وتريد معرفة قياس هذه الزاوية. تبين العلاقة التالية الترابط بين قياس الزاوية ونسبتها المثلثية:

إذا كان $\tan \theta =$ س فإننا نستخدم الآلة الحاسبة في إيجاد قياس الزاوية θ

ننقر على: س tan shift لإيجاد θ

مثال (٤)

في الشكل المقابل أوجد θ (س) في Δ س ص ع.

الحل:

$$\tan \theta = \frac{ص}{س} = \frac{٦}{٨} = ٠,٧٥$$

لإيجاد θ (س) نستخدم الآلة الحاسبة.

$$\text{Shift} \quad \text{TAN} \quad 0.75 \quad =$$

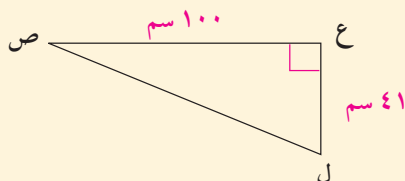
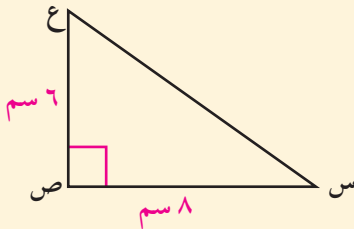
$$\text{يظهر } 36.86989765 \quad \text{يظهر } 36^\circ 52' 11.63''$$

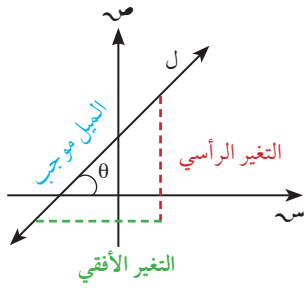
$$\theta \text{ (س)} \simeq 36^\circ 52' 12''$$

حاول أن تحل

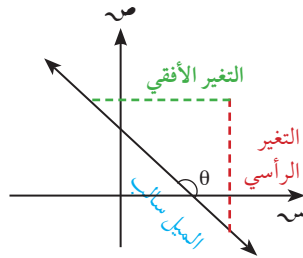
٣ أوجد θ (س) حيث $\tan \theta = ٠,٥$

٤ في الشكل المقابل، أوجد θ (ل) لأقرب درجة.





إذا كان المستقيم l يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات فإن θ تسمى زاوية ميل المستقيم ويكون $\theta = \text{ميل المستقيم} = \frac{\text{التغير الرأسى}}{\text{التغير الأفقى}}$



إذا كانت معادلة المستقيم: $v = m \cdot s + b$ فإن ميل المستقيم $= m$.

مثال (٥)

في الشكل المقابل: احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة θ التي يصنعها المستقيم $v = 3s + 2$ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

الحل:

من الشكل $\hat{v}(\hat{\theta}) = \hat{v}(\hat{p})$. زاويتان متناظرتان.

$$\tan \theta = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{1} = 3$$

Shift

TAN

3

=

71° 33' 54.18"

يظهر

71.565051

يظهر

71° 33' 54.18"

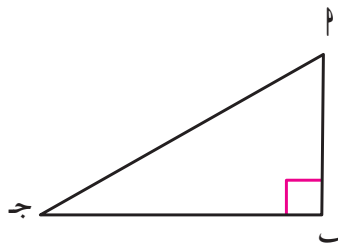
$$\hat{v}(\hat{p}) \simeq 71^\circ 33' 54.18''$$

حاول أن تحل

٥ احسب قياس الزاوية الحادة الموجبة التي يصنعها المستقيم $v = \frac{1}{4}s + 6$ مع الاتجاه الموجب للمحور السيني.

٢- مقلوب ظل الزاوية (ظتا): (Cotangent cot)

مقلوب ظل الزاوية $\hat{p} = \frac{1}{\tan \hat{p}}$ ويسمى ظل تمام الزاوية $\hat{p}$ ويرمز إليه بالرمز **ظتا $\hat{p}$** وبالإنكليزية (cot) Cotangent.



$$\frac{\text{ب}}{\text{ج}} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

$$\text{ظتا } \hat{p} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}}$$

$$\text{ظتا } \hat{p} = \frac{1}{\tan \hat{p}}$$

ويكون

$$\text{ظتا } \hat{p} \times \tan \hat{p} = 1$$

مثال (٦)

في الشكل المقابل أوجد ظاج، ظتاج.

الحل:

$$\text{من نظرية فيثاغورث (أج) } = \sqrt{(٥)^2 - (١٣)^2} = ١٤٤$$

$$\frac{١٢}{٥} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ظاج}}{١٢}$$

$$\frac{١٢}{٥} = \frac{\text{المجاور}}{\text{المقابل}} = \frac{\text{ظتاج}}{٥}$$

حاول أن تحل

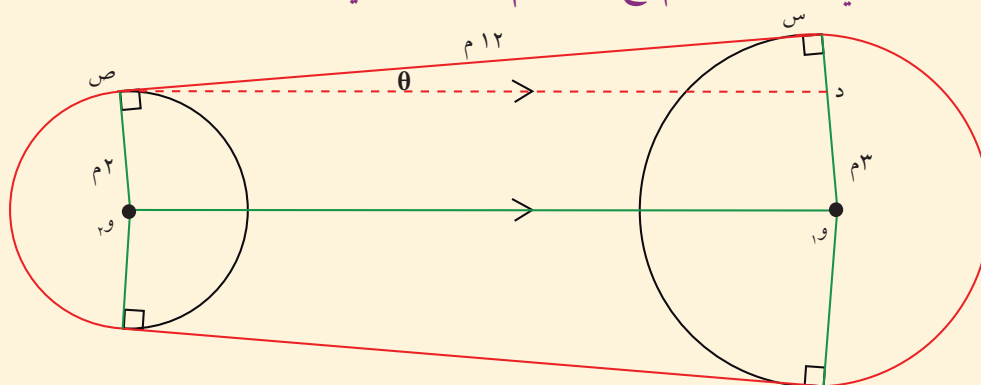
٦ أب جـ مثلث قائم الزاوية في ب فيه أب = ٧ سم، أج = ٢٥ سم. أوجد: ظاج، ظتاج.

ملاحظة:

عند عدم ذكر وحدة الطول في رسم الأشكال يمكنك اعتبار أي وحدة طول.

مثال (٧)

يلتف حزام حول بكرتين أسطوانتي الشكل. طول نصف قطر البكرة الكبرى ٣ م وطول نصف قطر الصغرى ٢ م. نريد معرفة قياس الزاوية θ التي يصنعها الحزام مع المستقيم المار بمركزي الدائرتين.



الحل:

نرسم دص // د١و١و

الشكل د١و١و دص متوازي أضلاع

$$\text{س د} = \text{س و} - \text{د و} = ١ - ٣ = ٢ \text{ م}$$

في المثلث د س ص قائم الزاوية:

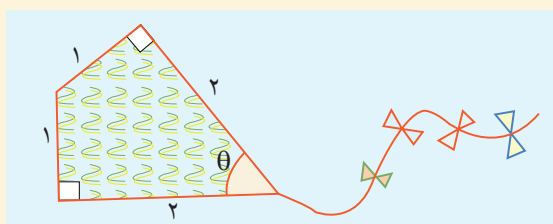
$$\frac{١}{١٢} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \theta$$

$$\theta = (\hat{\theta}) = 4^\circ 45' 49.11''$$

قياس الزاوية θ يساوي $4^\circ 45' 49''$ تقريبًا.

حاول أن تحل

٧ يبين الشكل المقابل طائرة ورقية. أوجد قياس الزاوية θ .



النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

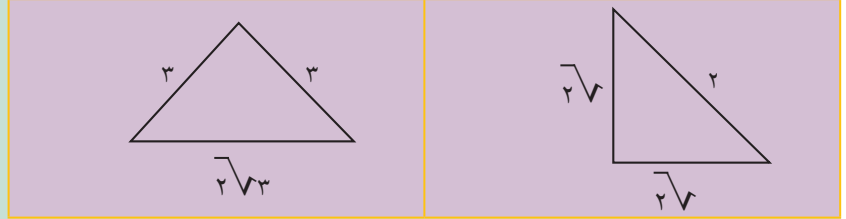
Trigonometric Ratios for Some Particular Angles

سوف نتعلم

- النسب المثلثية للزوايا 30° ، 45° ، 60° .
- متطابقات مثلثية
- الزاوية الربعية

دعنا نفكر ونتناقش

١ استخدم المنقلة لإيجاد قياسات زوايا كل مثلث.



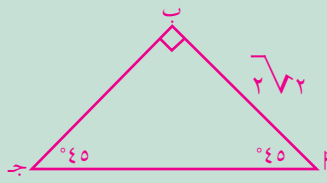
٢ قارن بين أطوال الأضلاع.

٣ استخدم نظرية فيثاغورث لإثبات ما حصلت عليه في ٢.

المثلث 45° ، 45° ، 90° .

في المثلث أ ب ج، قياس كل من الزاويتين الحادتين يساوي 45° .

المثلث أ ب ج قائم الزاوية ب متطابق الضلعين، ويسمى أحياناً المثلث 45° ، 45° ، 90° .



إذا كان طول كل من ضلعي الزاوية القائمة يساوي س، فإن طول الوتر = $س\sqrt{2}$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جاءه } 45^\circ$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \text{جتاه } 45^\circ$$

$$1 = \text{ظاه } 45^\circ$$

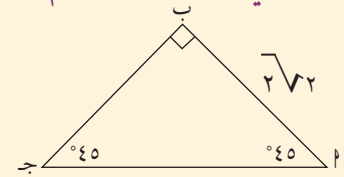
$$\text{في هذا المثلث جاءه } 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{س}{س\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{كذلك جتاه } 45^\circ = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{س}{س\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\text{ظاه } 45^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{س}{س} = 1$$

مثال (١)

أ في المثلث المرسوم، أوجد طول الوتر أ ب ج.



الحل:

$$\text{جتا } 45^\circ = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\text{جتاه } 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\text{أ ج} = \frac{\sqrt{2}}{1} \times 1 = \sqrt{2}$$

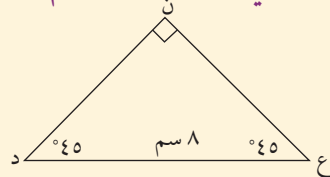
$$\text{طول الوتر أ ج} = 4 \text{ سم}$$

طريقة أخرى:

$$\text{أ ج} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} = 2$$

$$\therefore \text{أ ج} = 4 \text{ سم}$$

ب في المثلث المرسوم، أوجد طول الضلع ع ن.



الحل:

$$\text{جتاه } 45^\circ = \frac{\text{ع ن}}{\text{ع د}} = \frac{\text{ع ن}}{8}$$

$$\text{ع ن} = \frac{\sqrt{2}}{2} \times 8 = 4\sqrt{2}$$

$$\text{طول الضلع ع ن} \approx 5.66 \text{ سم}$$

حاول أن تحل

- ١ أ) لمثلث $45^\circ, 45^\circ, 90^\circ$. أوجد طول الوتر إذا كان طول أحد ضلعي الزاوية القائمة = ٥ سم.
- ب) الحساب الذهني: إذا كان ظا ج = ١ فكيف توجد $\hat{C}$ (ج) دون استخدام الآلة الحاسبة؟

$30^\circ - 60^\circ$ triangle

المثلث ثلاثيني ستيني

∴ Δ لمثلث متطابق الأضلاع.

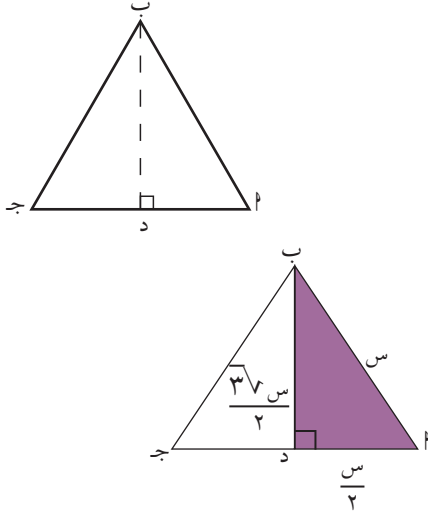
∴ $\overline{BD} \perp \overline{AC}$.

∴ B د هي منتصف الزاوية $\hat{B}$ ج.

ومنه $\hat{C} = (\hat{B} د) = \frac{60^\circ}{2} = 30^\circ$, $\hat{A} = 60^\circ$.

∴ لمثلث ثلاثيني ستيني $(30^\circ, 60^\circ, 90^\circ)$.

إذا كان طول الضلع $\overline{AC}$ يساوي s فإن $\overline{AD} = \frac{s}{2}$
وباستخدام نظرية فيثاغورث في المثلث $\overline{AB}$ د نحصل على $B د = \frac{\sqrt{3}s}{2}$.
كذلك $B د$ هي المنصف العمودي للقطعة $\overline{AC}$.



$$\frac{\sqrt{3}s}{2} = \text{جا } 60^\circ$$

$$\frac{1}{2} = \text{جتا } 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}s}{2} = \text{ظا } 60^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}s}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{B د}{\hat{A}} = 60^\circ \text{ جا}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{\sqrt{3}s}{2}} = \frac{\hat{A} د}{\hat{B}} = 60^\circ \text{ جتا}$$

$$\frac{\sqrt{3}s}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{1}{2}} = \frac{B د}{\hat{A} د} = 60^\circ \text{ ظا}$$

$$\text{كذلك جاب } \hat{B} = \text{جا } 30^\circ = \frac{\hat{A} د}{\hat{B}} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{\sqrt{3}s}{2}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\frac{\sqrt{3}s}{2} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{B د}{\hat{B}} = 30^\circ \text{ جتا}$$

$$\frac{\sqrt{3}s}{3} = \frac{1}{\frac{\sqrt{3}s}{2}} = \frac{\frac{s}{2}}{\frac{\sqrt{3}s}{2}} = 30^\circ \text{ ظا}$$

لاحظ أن $\text{جا } 60^\circ = \text{جتا } 30^\circ$

$\text{جتا } 60^\circ = \text{جا } 30^\circ$

$$\frac{1}{2} = \text{جا } 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}s}{2} = \text{جتا } 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}s}{3} = \text{ظا } 30^\circ$$

باستخدام الحاسبة يمكنك إيجاد كل من الجيب، جيب التمام والظل لكل زاوية ربعية. والجدول التالي يبين النسب المثلثية للزوايا الخاصة والربعية.

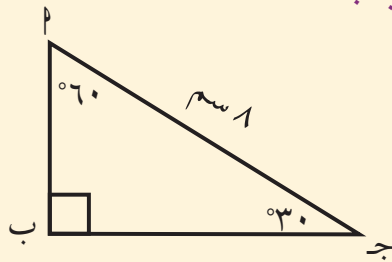
الزاوية هـ	جاه	جتاه	ظاه
القياس الستيني	القياس الدائري		
°٠	٠	١	٠
°٣٠	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
°٤٥	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
°٦٠	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
°٩٠	$\frac{\pi}{2}$	٠	غير معرّف
°١٨٠	π	١-	٠
°٢٧٠	$\frac{3\pi}{2}$	١-	غير معرّف
°٣٦٠	2π	٠	١

هل تعلم؟

وضعت جداول النسب المثلثية منذ أكثر من ٢٠٠٠ عام لتستخدم في علم الفلك.

مثال (٢)

أب جـ مثلث ثلاثيني ستيني. طول الوتر = ٨ سم. أوجد طول كل من الضلعين أب، ب جـ.



الحل:

في Δ أب جـ، جاج = 30° $\frac{AB}{AC} = \frac{1}{2}$

$$\frac{AB}{8} = \frac{1}{2}$$

$$AB = 4$$

جتاج = 60° $\frac{BC}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$\frac{BC}{8} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$BC = 4\sqrt{3}$$

طول الضلع أب = ٤ سم وطول الضلع ب جـ = $4\sqrt{3} \approx 6.9$ سم.

حاول أن تحل

٢ في مثلث ثلاثيني ستيني إذا كان طول الضلع الأصغر = $6\sqrt{3}$ سم، فأوجد طول الضلعين الآخرين.



مثال (٣) تطبيق لوحة إرشادية لمدرسة

تشير إحدى لوحات السير على وجود مدرسة. اللوحة على شكل مثلث متطابق الأضلاع طول ضلعه ٦٠ سم. أوجد مساحة هذه اللوحة.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{طول العمود النازل من رأس مثلث متطابق الأضلاع إلى القاعدة} &= \text{ارتفاع المثلث} = \text{طول الضلع} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} \times 60 \approx 52 \text{ سم.} \\ \text{مساحة اللوحة} &= \frac{\text{طول القاعدة} \times \text{الارتفاع}}{2} = \frac{60 \times 52}{2} = 1560 \text{ سم}^2. \\ \text{مساحة اللوحة تساوي حوالي } 1560 \text{ سم}^2. \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٣ معيّن يتكوّن من مثلثين متطابقين الأضلاع. أوجد مساحة المعين إذا كان طول ضلع المثلث = ٨ سم.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

برج بيزا معلم أثري مشهور في إيطاليا. كان ارتفاع البرج ٥٥ مترًا قبل ميله نحو الجنوب. (أد في الرسم). شاهد مراقبان موجودان في النقطتين ب، ج قمة البرج بزوايتين قياسهما ٤٥°، ٣٠° على الترتيب. أ عبّر عن طول كل من هـ ب، هـ ج بدلالة طول أ هـ.

ب أوجد أ هـ علمًا أن المسافة بين النقطتين ب، ج تساوي ٤٠ مترًا.

ج نتيجة للأشغال المهمة على البرج بين العامين ١٩٩٣ - ٢٠٠١ تقلص البعد بين النقطتين هـ، د من ٤، ٥ مترًا إلى ٤ أمتار. ما قياس (أ د هـ) التي يصنعها البرج مع الأرض قبل الأشغال؟ وبعد الأشغال؟



الحل: أ في المثلث أ هـ ب: ظا ٤٥° = $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ب}}$ = ١ ومنه هـ ب = أ هـ

في المثلث أ هـ ج: ظا ٣٠° = $\frac{\text{أ هـ}}{\text{هـ ج}}$ = $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ومنه هـ ج = $\sqrt{3}$ أ هـ

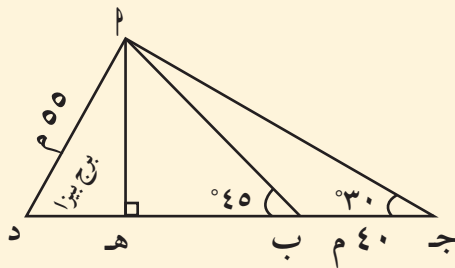
ب هـ ج = هـ ب + ب ج

$$\sqrt{3} \text{ أ هـ} = \text{أ هـ} + 40 \text{ أي } 40 = \text{أ هـ} (1 - \sqrt{3})$$

$$\text{أ هـ} = \frac{40}{1 - \sqrt{3}} \approx 54,64$$

ج قبل الأشغال: جتا (أ د هـ) = $\frac{4}{5}$ ، $\angle \text{أ د ج} \approx 56^\circ 21' 18''$

بعد الأشغال: جتا (أ د هـ) = $\frac{4}{5}$ ، $\angle \text{أ د ج} \approx 56^\circ 49' 18''$



حل المثلث قائم الزاوية Solving Right Triangle

عمل تعاوني

سوف تتعلم

- إيجاد قياسات زوايا مثلث قائم.
- إيجاد أطوال أضلاع مثلث قائم.

استخدم برنامج رسم هندسي على الحاسوب.

ارسم شعاعين $\overrightarrow{AS}$ ، $\overrightarrow{AV}$ يشكلان زاوية حادة $\hat{A}$ ص.

من نقطة د على $\overrightarrow{AS}$ ارسم شعاعاً متعامداً مع $\overrightarrow{AS}$ يقطع $\overrightarrow{AV}$ في ج.

بتحرك النقطة د تتحرك تبعاً لها النقطة ج محافظاً على جـ د قائمة، يكبر المثلث د ج أو

يصغر. وبتحرك النقطة ص يكبر أو يصغر قياس الزاوية $\hat{A}$.

١ - أوجد قياس الزاوية $\hat{A}$.

٢ - أوجد أطوال أضلاع المثلث د ج.

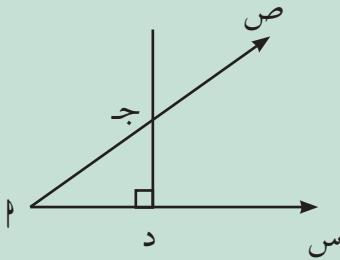
احسب النسبة $\frac{\text{دج}}{\text{جـ د}}$ (الضلع المقابل للزاوية $\hat{A}$ الوتر)

حرك $\overrightarrow{AS}$ بحيث يتغير قياس الزاوية $\hat{A}$.

ما الذي تلاحظه حول النسبة $\frac{\text{دج}}{\text{جـ د}}$ عندما يتغير قياس الزاوية $\hat{A}$.

من أي قيمة تقترب هذه النسبة عندما يقترب قياس $\hat{A}$ من 90° ومن 0° ؟

٣ - اصنع جدولاً يبين قيم الزاوية $\hat{A}$ والنسبة $\left(\frac{\text{الضلع المقابل للزاوية } \hat{A}}{\text{الوتر}}\right)$ يتضمن القياسات $10^\circ, 20^\circ, 30^\circ, \dots, 80^\circ$ للزاوية $\hat{A}$.



Solving Right Triangle

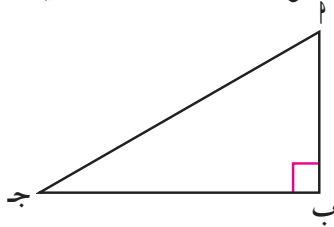
٣ - حل المثلث قائم الزاوية

نعلم أن للمثلث ستة عناصر هي أضلاعه الثلاثة وزواياه الثلاث. حلّ المثلث يعني إيجاد أطوال أضلاعه الثلاثة وقياسات زواياه الثلاث. سيقصر عملنا في هذا البند على المثلث قائم الزاوية.

في الشكل المقابل المثلث أ ب ج قائم الزاوية في ب.

الأضلاع: $\overline{AB}$ ، $\overline{AJ}$ ، $\overline{BJ}$

الزوايا: $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ، $\hat{J}$



غالباً ما تعطى ثلاثة عناصر في المثلث أحدها على الأقل طول أحد الأضلاع ويتعين علينا إيجاد الباقي.

مثال (١)

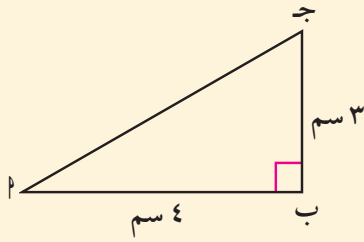
حلّ المثلث أ ب ج القائم في ب إذا علم أن: $\overline{AB} = 4$ سم، $\overline{BJ} = 3$ سم

الحل:

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$(\overline{AB})^2 + (\overline{BJ})^2 = (\overline{AJ})^2$$

$$4^2 + 3^2 = \overline{AJ}^2$$



$$\text{ظا } \hat{A} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{3}{4} = 0,75$$

استخدم حاسبة الجيب لإيجاد $\hat{A}$.

Shift

TAN

0.75

=

36.869897

$$\hat{A} \simeq 37^\circ - 90^\circ \simeq 53^\circ$$

$$\hat{A} \simeq 37^\circ$$

حاول أن تحل

١ حل المثلث Δ ب ج القائم الزاوية في ج حيث: ب ج = ١٥ سم، $\hat{A}$ ج = ١٢ سم

مثال (٢)

حلّ المثلث Δ ب ج القائم في (ج) إذا علم أن: $\hat{A}$ ب = ٤٠ سم، $\hat{B}$ = ٢٥°

الحل:

$$\hat{A} = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ$$

$$\text{جتا } \hat{B} = \frac{\text{ب ج}}{\hat{A} \text{ ب}}, \text{ جتا } 25^\circ = \frac{\text{ب ج}}{40}$$

$$\text{ب ج} = 40 \times \text{جتا } 25^\circ \simeq 36,25 \text{ سم}$$

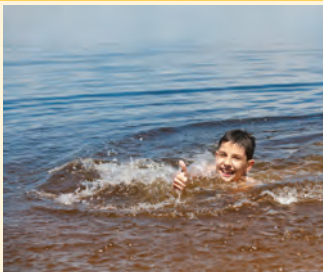
$$\text{ج ب} = \frac{\hat{A} \text{ ب}}{\hat{B}} = \frac{40}{\sin 25^\circ}$$

$$\hat{A} \text{ ب} = 40 \text{ جتا } 25^\circ \simeq 36,25 \text{ سم}$$

حاول أن تحل

٢ حل المثلث Δ ب ج القائم في ج حيث: $\hat{A}$ ج = ٢٠ سم، $\hat{B}$ = ٧٥°

مثال (٣)

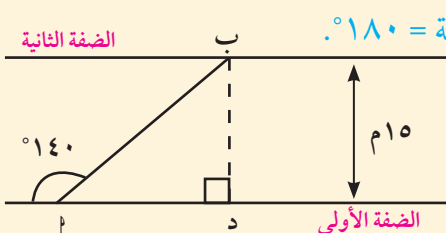


حاول أحد السباحين عبور النهر انطلاقًا من النقطة $\hat{A}$ الموضحة بالشكل المرسوم جرفه التيار ووصل إلى النقطة ب.

ما المسافة التي قطعها السباح؟

الحل: ليكن ب د البعد العمودي بين الضفتين

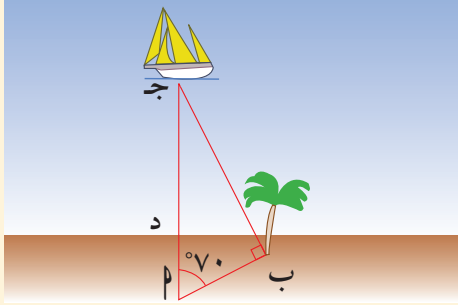
في المثلث Δ ب د، $\hat{D}$ ب = ١٨٠° - ٤٠° = ١٤٠° قياس الزاوية المستقيمة = ١٨٠°



بالتعويض

$$\frac{15}{\sin 40^\circ} = \frac{\text{ب د}}{\sin 140^\circ}$$

$$\frac{\text{ب د}}{\sin 140^\circ} = \frac{15}{\sin 40^\circ}$$



ب = $\frac{15}{\sin(40^\circ)} \approx 23,3$ أي أن السباح قطع حوالي ٢٣,٣ مترًا.

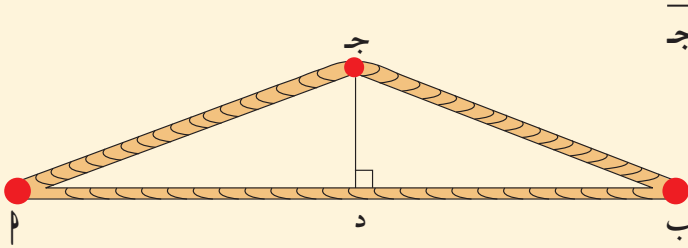
حاول أن تحل

٣ في الشكل المقابل إذا كان، $ا د = ١٠٠$ متر، $ا ب = ١٥٠$ متر. أوجد:

(أ) البعد بين الزورق والشجرة (ب) البعد بين الزورق والشاطئ

مثال (٤)

حبل طوله ١٠ أمتار مثبت في مسمارين عند النقطتين ا، ب. حبل آخر طوله ١١ مترًا مثبت في نفس النقطتين، شُدَّ من وسطه (النقطة ج) إلى أعلى.



ب أوجد طول د ج

أ أوجد $\angle د ا ج$

الحل:

$$ا د = \frac{ا ب}{2} = \frac{١٠}{2} = ٥ \text{ أمتار.}$$

$$ا ج = \frac{١١}{2} = ٥,٥ \text{ أمتار.}$$

$$\cos \angle د ا ج = \frac{ا د}{ا ج} = \frac{٥}{٥,٥} \approx ٠,٩١$$

$$\therefore \angle د ا ج (\hat{د ا ج}) \approx ٢٤'٢٩''٤١$$

$$\angle د ب ج (\hat{د ب ج}) \approx ٢٤'٢٩''٤١$$

باستخدام الآلة الحاسبة

ب باستخدام نظرية فيثاغورث $(ج د)^2 = (ا د)^2 + (ج ا)^2$

$$\text{أي } (ج د)^2 = (ج ا)^2 - (ا د)^2$$

$$(ج د)^2 = ٢٥ - (٥,٥)^2 = ٢٥ - ٣٠,٢٥$$

$$\therefore ج د = \sqrt{٢٥ - ٣٠,٢٥} \approx ٢,٣$$

طول القطعة ج د يساوي حوالي ٢,٣ متر.

حاول أن تحل

٤ في المثال السابق أوجد $\angle د ا ج (\hat{د ا ج})$ إذا كان طول الحبل من ا إلى ب والمار بالنقطة ج يساوي ١٢ مترًا.

زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض

Angles of Elevation and Angles of Depression

سوف تتعلم

- زوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض
- استخدام زوايا الارتفاع والانخفاض في حل مسائل حياتية

دعنا نفكر ونتناقش

- ١ - إذا رصد شخص (ج) نقطة (أ) أعلى من مستوى نظره الأفقي جـ ب فإن الزاوية التي يحددها جـ أ ، جـ ب تسمى **زاوية ارتفاع** أ عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ .
- ٢ - وإذا رصد الشخص جـ نقطة د أدنى من مستوى نظره الأفقي جـ ب فإن الزاوية التي يحددها جـ د ، جـ ب تسمى **زاوية انخفاض** د عن المستوى الأفقي لنظر الشخص جـ .

ملاحظة:

إذا كان (أ) شخصاً موجوداً على سطح الأرض، وكان ب شخصاً موجوداً في منطاد مرتفع عن سطح الأرض، ونظر كل منهما إلى الآخر فإن:

$\hat{\theta}$ هي زاوية ارتفاع ب عن المستوى الأفقي لنظر (أ).

$\hat{\phi}$ هي زاوية انخفاض (أ) عن المستوى الأفقي لنظر (ب)

ونلاحظ في هذه الحالة أن:

زاوية الارتفاع $(\hat{\theta})$ = زاوية الانخفاض $(\hat{\phi})$.

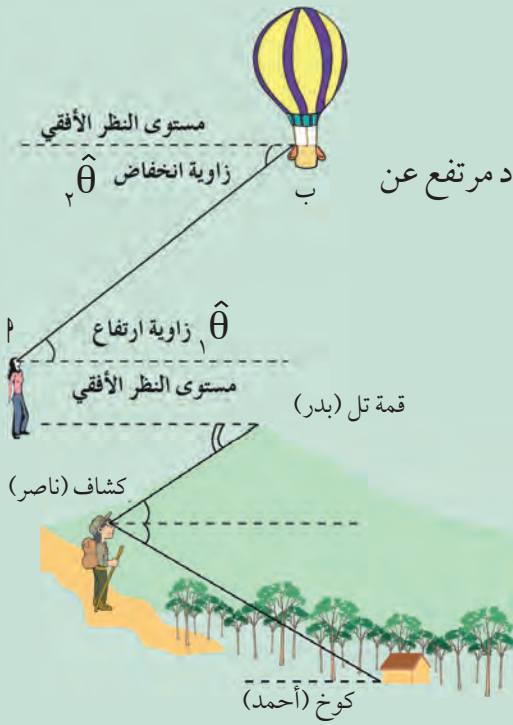
٣ - يقف بدر عند قمة التل ويقف ناصر عند الكشاف ويقف أحمد عند الكوخ.

صف كل زاوية في الشكل عندما ينظر:

(أ) بدر إلى ناصر

(ب) ناصر إلى أحمد

(ج) ناصر إلى بدر



مثال (١)

لقياس طول إحدى المسلات قام مرشد سياحي برصد قمة المسلة من خلال جهاز للرصد، فوجد أن قياس زاوية الارتفاع 48° . إذا كان الجهاز يبعد عن قاعدة المسلة مسافة ١٨ م فاحسب ارتفاع المسلة.

الحل:

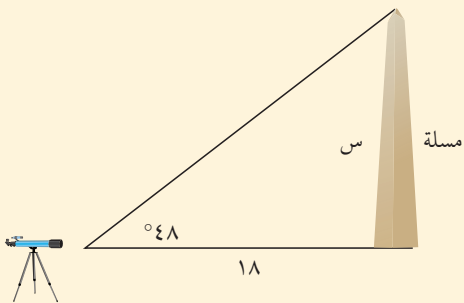
$$\frac{\text{س}}{18} = \tan(48^\circ)$$

$$\text{س} = 18 \times \tan(48^\circ) \approx 20 \text{ م تقريباً}$$

ارتفاع المسلة: ٢٠ م تقريباً

حاول أن تحل

- ١ من نقطة على سطح الأرض تبعد ١٠٠ متر عن قاعدة مئذنة، وجد أن قياس زاوية ارتفاع المئذنة 12° . أوجد ارتفاع المئذنة عن سطح الأرض.



مثال (٢)

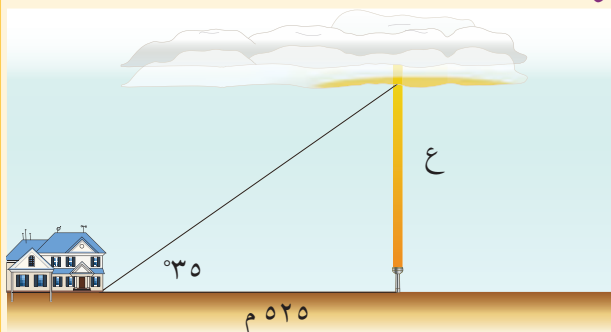
علم الأرصاد الجوية: لمعرفة ارتفاع طبقة من الغيوم عن سطح الأرض يستخدم علماء الفلك قياس زاوية الارتفاع في اللحظة التي يصل فيها البرق إلى الأرض. (يمكن نمذجة المسألة كما في الصورة).
أوجد قيمة تقريبية لارتفاع طبقة الغيوم عن سطح الأرض.

الحل:

$$\frac{ع}{٥٢٥} = \text{ظا } (٣٥^\circ)$$

$$ع = ٥٢٥ \times \text{ظا } (٣٥^\circ)$$

$$ع \approx ٣٦٧, ٦ \text{ مترًا}$$



مثال (٣)

تحلق مروحية فوق محمية طبيعية على ارتفاع ٢٥٠ مترًا وتواكبها على الأرض سيارة حرس المحمية. شاهد ربان المروحية قطعًا من الفيلة بزاوية انخفاض قياسها ٤٨° . ما المسافة بين المروحية والقطيع في تلك اللحظة علمًا بأن السيارة مباشرة تحت المروحية؟

الحل:

لتكن $م$ موقع المروحية، $ب$ موقع السيارة، $ج$ موقع القطيع.

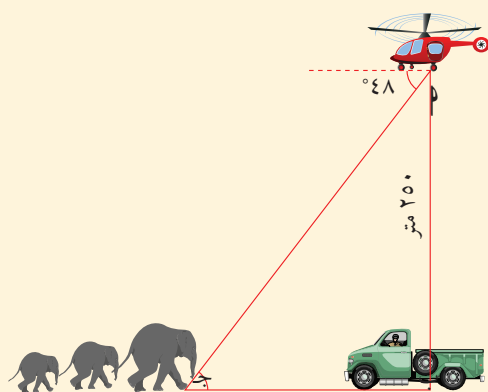
$$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \text{جا } ج$$

$$\frac{٢٥٠}{ج} = \text{جا } ٤٨^\circ$$

$$\frac{٢٥٠}{ج} = \text{جا } ٤٨^\circ$$

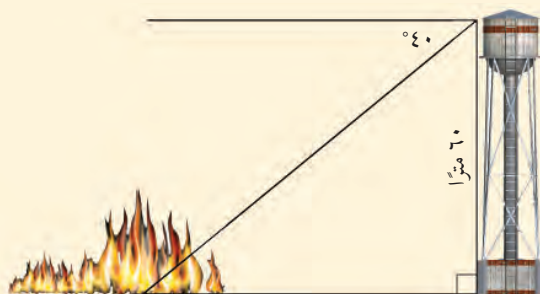
$$ج \approx ٣٣٦, ٤ \text{ مترًا}$$

يبعد قطيع الفيلة حوالي ٣٣٦ مترًا عن المروحية.



حاول أن تحل

٢ يقف مراقب فوق برج ارتفاعه ٦٠ مترًا. شاهد حريقًا بزاوية انخفاض قياسها ٤٠° . ما المسافة بين قاعدة برج المراقبة وموقع الحريق؟



مثال (٤) (إثرائي)

شاهد رجل إطفاء وهو يقف على سطح الأرض ألسنة النيران تنبعث من إحدى النوافذ القريبة من سطح البناء. وجد أن قياس زاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى القاعدة السفلية للنافذة (ب) حيث تندلع النيران هي 28° ، وزاوية الارتفاع من مستوى نظره إلى سطح البناء (ب) قياسها 42° . علمًا أن رجل إطفاء يقف على مسافة ٢٥ مترًا من قاعدة البناء. ما المسافة بين قاعدة النافذة (حيث ألسنة النيران) و سطح البناء؟

الحل: بفرض أن ع_١ هي البعد بين القاعدة السفلية للنافذة (ب) ومستوى النظر الأفقي.

$$\text{ظا } 28^\circ = \frac{ع_1}{25} \Rightarrow ع_1 = 25 \text{ ظا } 28^\circ$$

بفرض أن ع_٢ هي البعد بين سطح البناء والمستوى الأفقي للنظر.

$$\text{ظا } 42^\circ = \frac{ع_2}{25} \Rightarrow ع_2 = 25 \text{ ظا } 42^\circ$$

$$ع = ع_2 - ع_1 = 25 \text{ ظا } 42^\circ - 25 \text{ ظا } 28^\circ$$

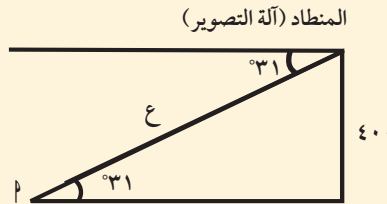
∴ المسافة المطلوبة $\approx 9,22$ أمتار

حاول أن تحل

٣

زُود منطاد بهوائي تلفزيون لنقل مباراة كرة القدم، حيث تراقب آلة التصوير الملعب عند النقطة ب بزاوية انخفاض 31° . يبلغ ارتفاع المنطاد عن سطح الأرض ٤٠٠ متر.

ما طول خط الضوء المرسل من آلة التصوير إلى الملعب؟



القطاع الدائري والقطعة الدائرية

Circular Sector and Circular Segment

تعريف:

القطاع الدائري هو جزء من سطح الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس.

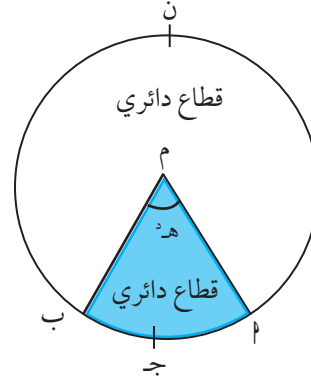
سوف تتعلم

- القطاع الدائري
- إيجاد مساحة القطاع الدائري
- القطعة الدائرية
- إيجاد مساحة القطعة الدائرية



تمثل قطعة الشطيرة قطاعًا دائريًا في الشكل المرسوم:

نصفا القطرين $\overline{مأ}$ ، $\overline{مب}$ يقسمان الدائرة إلى قطاعين دائريين. القطاع الأصغر $\overline{مأب}$ زاويته المركزية $\widehat{هـ}$ ، والقطاع الأكبر $\overline{مأب}$ زاويته المركزية $360^\circ - \widehat{هـ}$.



معلومة رياضية:

قياس القوس = قياس الزاوية المركزية التي تحصر القوس بين ضلعيها.

Area of Circular Sector

١ - مساحة القطاع الدائري:

لإيجاد مساحة القطاع الدائري نستخدم التناسب: نسبة طول القوس إلى طول الدائرة (محيط الدائرة) هي نسبة مساحة القطاع الدائري إلى مساحة الدائرة.

(البرهان غير مطلوب)

تذكر:

محيط الدائرة = $2\pi r$
مساحة الدائرة = πr^2
طول القوس $l = r \times \widehat{هـ}$

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\text{مساحة الدائرة}} = \frac{\text{طول القوس}}{\text{طول الدائرة}}$$

$$\frac{\text{مساحة القطاع الدائري}}{\pi r^2} = \frac{l}{2\pi r}$$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \pi r^2 \times \frac{l}{2\pi r}$$

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{2} l r$$

مثال (١)

أوجد مساحة القطاع الأصغر في الشكل المقابل:

الحل:

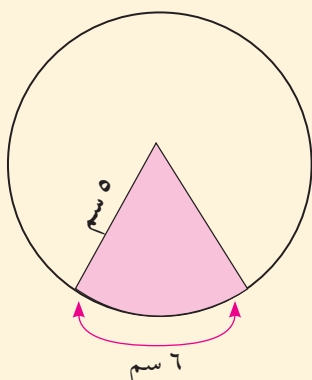
$$\text{مساحة القطاع} = \frac{1}{4} \text{ ل نه} = \frac{1}{4} \times 6 \times 5$$

$$= 15 \text{ سم}^2$$

مساحة القطاع الدائري تساوي ١٥ سم^٢

حاول أن تحل

١ أوجد مساحة القطاع الدائري الذي طول نصف قطره ١٠ سم وطول قوسه ٤ سم.



تعرفت في بداية الوحدة الثانية أن طول القوس ل يساوي قياس الزاوية المركزية بالراديان مضروباً في طول نصف القطر:
 $ل = هـ \times نه$

إذا عوضنا عن ل بـ $هـ \times نه$ نحصل على:

$$\text{مساحة القطاع الدائري} = \frac{1}{4} هـ \times نه \times نه = \frac{1}{4} هـ نه^2$$

مثال (٢)

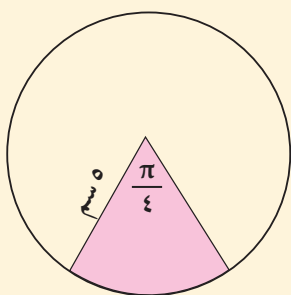
أوجد مساحة القطاع الدائري الأصغر في الشكل المقابل:

الحل:

$$\text{مساحة القطاع} = \frac{1}{4} هـ نه^2 = \frac{1}{4} \times \frac{\pi}{4} \times (5)^2$$

$$= \frac{\pi \times 25}{8} \approx 9,8 \text{ سم}^2$$

مساحة القطاع الدائري تساوي حوالي ٩,٨ سم^٢



٢- القطعة الدائرية: Circular Segment

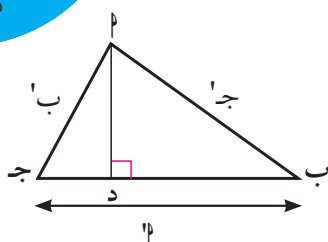
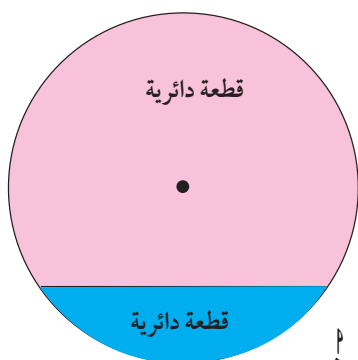
القطعة الدائرية هي جزء من سطح الدائرة محدود بقوس فيها ووتر.

٣- مساحة المثلث: Area of a Triangle

$$\text{مساحة المثلث } ا ب ج = \frac{1}{2} ب ج \times ا د$$

$$\text{لكن جاب} = \frac{ا د}{ا ب} \therefore ا د = ا ب \times جاب$$

$$\text{مساحة المثلث } ا ب ج = \frac{1}{2} ب ج \times ا ب \times جاب$$

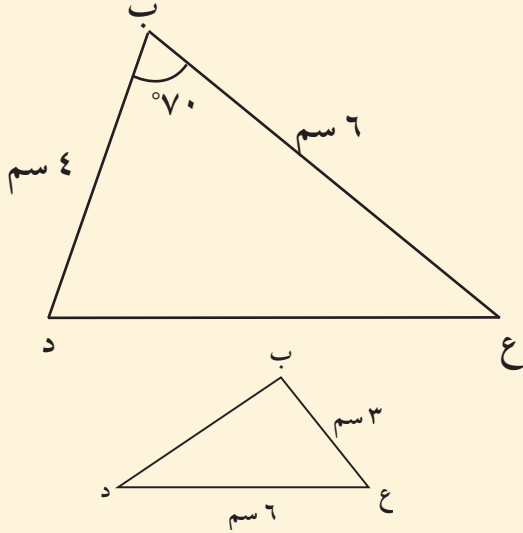


$$\begin{aligned} \text{مساحة المثلث } \Delta \text{ ب ج د} &= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ب د} \times \sin \angle \text{ب} \\ &= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ب د} \times \sin \angle \text{ب} \\ &= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ب د} \times \sin \angle \text{ب} \end{aligned}$$

أي أن مساحة المثلث = $\frac{1}{2}$ حاصل ضرب طولَي أي ضلعين $\times$ جيب الزاوية المحددة بهما

$$\begin{aligned} \text{وباختصار نكتب مساحة المثلث } \Delta \text{ ب ج د} &= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ب د} \times \sin \angle \text{ب} \\ &= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ب د} \times \sin \angle \text{ب} \\ &= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ب د} \times \sin \angle \text{ب} \end{aligned}$$

مثال (٣)



ب ج د مثلث فيه ب ج = ٦ سم، ب د = ٤ سم، $\angle \text{ب} = 70^\circ$
أوجد مساحة هذا المثلث.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{مساحة المثلث ب ج د} &= \frac{1}{2} \times \text{ب ج} \times \text{ب د} \times \sin \angle \text{ب} \\ &= \frac{1}{2} \times 6 \times 4 \times \sin 70^\circ \\ &= 11,276 \approx 11,276 \text{ سم}^2 \end{aligned}$$

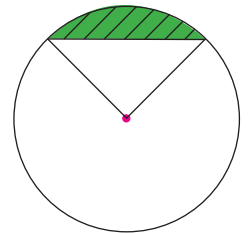
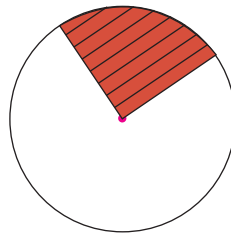
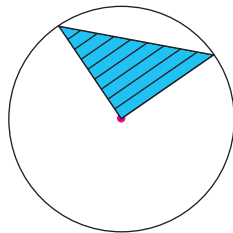
مساحة المثلث ب ج د هي حوالي ١١,٢٧٦ سم^٢.

حاول أن تحل

٢ في المثلث المقابل إذا كانت مساحته = ٧ سم^٢. فأوجد $\angle \text{ع}$.

٤- مساحة القطعة الدائرية: Area of a Circular Segment

مساحة القطعة الدائرية تساوي مساحة القطاع الدائري مطروحاً منه مساحة المثلث.



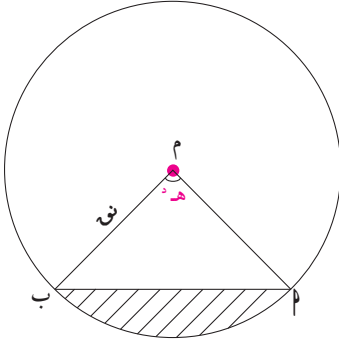
مساحة المثلث

-

مساحة القطاع الدائري

=

مساحة القطعة الدائرية



تذكر:

هـ هو قياس الزاوية بالراديان.
انتبه لوضع الآلة الحاسبة.

إيجاد مساحة القطعة الدائرية:

$$\text{مساحة القطاع الأصغر} = \frac{1}{2} \times \text{هـ} \times \text{ن}^2$$

$$\text{مساحة المثلث م أ ب} = \frac{1}{2} \times \text{م أ} \times \text{م ب} \times \text{جا}(\text{هـ})$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{ن}^2 \times \text{جا}(\text{هـ})$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \text{مساحة القطاع الأصغر} - \text{مساحة المثلث م أ ب}$$

$$= \frac{1}{2} \times \text{هـ} \times \text{ن}^2 - \frac{1}{2} \times \text{ن}^2 \times \text{جا}(\text{هـ})$$

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \times \text{ن}^2 (\text{هـ} - \text{جا}(\text{هـ}))$$

مثال (٤)

احسب مساحة قطعة دائرية زاويتها المركزية 60° وطول نصف قطر دائرتها ١٠ سم.

الحل:

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \times \text{ن}^2 [\text{هـ} - \text{جا}(\text{هـ})]$$

نحول 60° إلى القياس الدائري

$$\text{هـ} = 60^\circ \times \frac{\pi}{180} \approx 1.0472$$

نوجد جا (60°) بالآلة الحاسبة

$$\text{جا} (60^\circ) \approx 0.866$$

(لاحظ أن جا $0.866 \approx 1.0472$ أيضًا)

$$\text{مساحة القطعة الدائرية} = \frac{1}{2} \times \text{ن}^2 [\text{هـ} - \text{جا}(\text{هـ})]$$

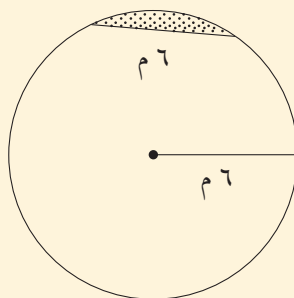
$$\approx \frac{1}{2} \times 100 \times [1.0472 - 0.866]$$

$$\approx 9.06 \text{ سم}^2$$

حاول أن تحل

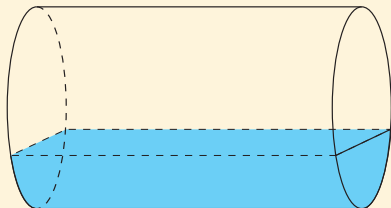


٣ أ حوض زهور دائري طول نصف قطره ٦ م (انظر الشكل المقابل)، وفي هذا الحوض وتر طوله ٦ م. احسب مساحة القطعة الدائرية الصغرى.

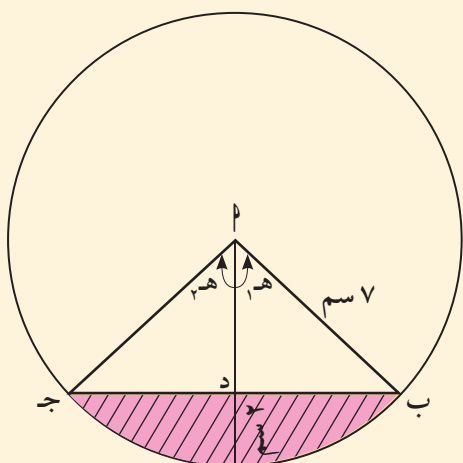


ب أوجد مساحة قطعة دائرية طول نصف قطرها ١٠ سم وقياس زاويتها المركزية ٧٠°.

مثال (٥)



يبيّن الشكل المقابل مقطعاً في أنبوب أسطوانى الشكل، ومياهًا متجمعة في القاع. إذا كان أقصى عمق الماء هو ٢ سم وطول نصف قطر الأنبوب ٧ سم، فأوجد مساحة الجزء المظلل باللون الوردي.



الحل: $د = ٥$ سم

$$هـ_١ \approx ٧٧٥, ٠٠$$

$$هـ = هـ_١ + هـ_٢ \approx ١, ٥٥$$

$$\text{مساحة القطاع الأصغر} = \frac{1}{4} \times د^2 \times \pi$$

$$= \frac{1}{4} \times ٢^2 \times \pi \approx ٣٧, ٩٧٥ \text{ سم}^2$$

$$\text{مساحة المثلث أ ب ج} = \frac{1}{2} \times أ ب \times ج د \approx \frac{1}{2} \times ٤٩ \times ١, ٥٥ \approx ٣٧, ٩٧٥ \text{ سم}^2$$

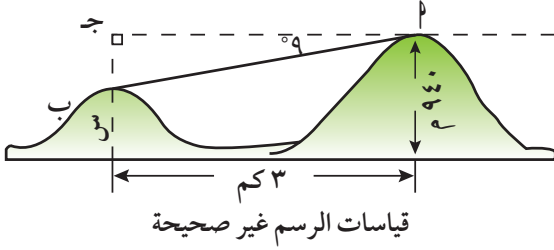
$$\text{مساحة الجزء المظلل} = ٣٧, ٩٧٥ - ٣٧, ٩٧٥ \approx ١٣, ٤٨ \text{ سم}^2$$

ملاحظة:

يمكن الحل باستخدام القانون

المرشد لحل المسائل

خلال بحثه على أحد المواقع الإنترنت وجد سلطان المسألة التالية:
يبعد تلان عن بعضهما ٣ كم. يبلغ ارتفاع القمة «أ» ٩٤٠ مترًا وقياس زاوية الانخفاض من القمة «أ» إلى القمة «ب» ٩°. أوجد ارتفاع القمة «ب».



كيف فكر سلطان لإيجاد ارتفاع القمة ب.

بداية، سوف أرسم مخططًا للمسألة.

البعد بين التلين = ٣ كم.

قياس زاوية الانخفاض = ٩°.

ارتفاع القمة «أ» = ٩٤٠ مترًا.

عليّ إيجاد ارتفاع القمة «ب». ليكون س هذا الارتفاع.

لإيجاد قيمة س، سوف أستخدم النسب المثلثية في المثلث أ ب ج. طول أحد ضلعي القائمة البعد بين القمتين وقياس إحدى زواياه الحادة ٩°. سوف أستخدم ظل هذه الزاوية أو مقلوبه إذا استطعت إيجاد طول أحد أضلاع الزاوية القائمة. إذا تمكنت في الرسم أجد أن:

$$\text{أ ب ج} = ٣ \text{ كم} = ٣٠٠٠ \text{ متر.}$$

∴ كانت الزاوية هي زاوية انخفاض، فارتفاع القمة: «ب» سوف يكون أصغر من ارتفاع القمة «أ».

$$\text{ظا } ٩^\circ = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب ج}}{٣٠٠٠}$$

سأكتب معادلة

$$\text{ب ج} = ٣٠٠٠ \times \text{ظا } ٩^\circ$$

سأحل المعادلة

$$\text{ب ج} = ٤٧٥ \text{ متر تقريبًا}$$

سأستخدم آلة حاسبة وأقرب

$$\text{س} = ٩٤٠ - ٤٧٥ = ٤٦٥$$

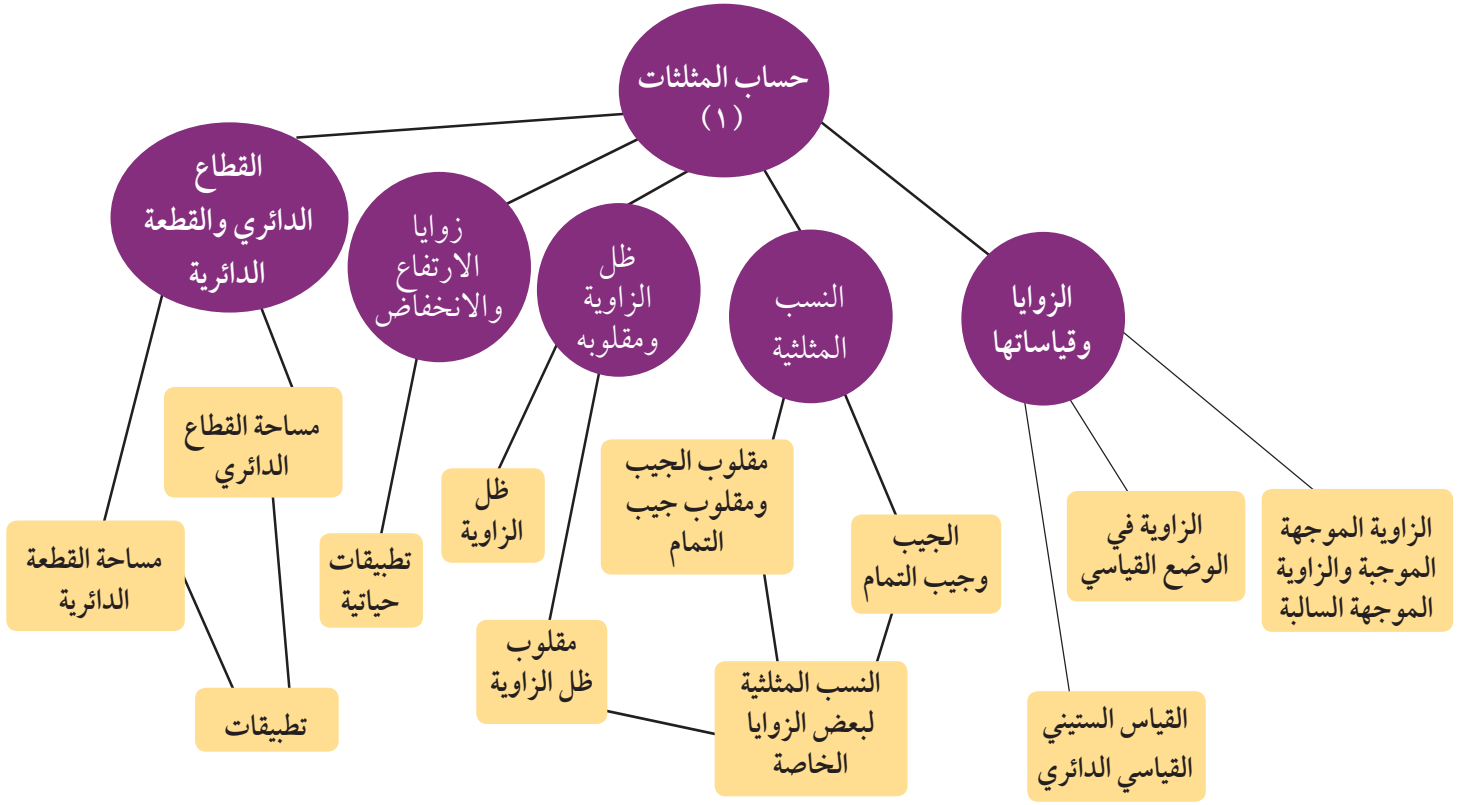
يبقى عليّ طرح هذه القيمة من ارتفاع القمة «أ»

لذا يكون ارتفاع القمة (ب) ٤٦٥ مترًا.

مسألة إضافية

في صف الطيران المظلي، وقف الطلاب على تل ارتفاعه ٤٧٠ مترًا يراقبون رفيقًا لهم يهبط بالمظلة. عندما وصل إلى الأرض كانت زاوية الانخفاض ٧٢°. ما بعد هذا المظلي عن قاعدة التل؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثانية



ملخص

- تكون الزاوية الموجهة موجبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي عكس دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة سالبة إذا كان الاتجاه من الضلع الابتدائي إلى الضلع النهائي مع دوران عقارب الساعة.
- تكون الزاوية الموجهة في الوضع القياسي إذا كان ضلعها الابتدائي على الجزء الموجب من محور السينات ورأسها في نقطة الأصل لمحاور الإحداثيات.
- تقاس الزاوية بالدرجات أو بالراديان.
- الزاوية نصف القطرية هي زاوية مركزية في دائرة تحصر قوساً طوله يساوي طول نصف قطر هذه الدائرة وقياسها يساوي ١ راديان.
- العلاقة: $\frac{س}{\pi} = \frac{هـ}{١٨٠}$ تربط بين القياس الستيني والقياس الدائري لزاوية.
- في المثلث قائم الزاوية جيب الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الوتر ويرمز إليه بـ $\sin$ أو $\sin$.
- جيب التمام للزاوية هو نسبة الضلع المجاور إلى الوتر ويرمز إليه بـ $\cos$ أو $\cos$.
- قاطع الزاوية هو مقلوب جيب تمام الزاوية قائم $\frac{1}{\cos}$ حيث $\cos \neq 0$.
- قاطع تمام الزاوية هو مقلوب جيب الزاوية قائم $\frac{1}{\sin}$ حيث $\sin \neq 0$.
- ظل الزاوية هو نسبة الضلع المقابل إلى الضلع المجاور ويرمز إليه بـ $\tan$ أو $\tan$.
- ظل تمام الزاوية هو نسبة طول الضلع المجاور إلى طول الضلع المقابل ويرمز إليه بـ $\cotan$ أو $\cotan$.

$$- \text{جا } ٤٥^\circ = \text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} ; \text{ظا } ٤٥^\circ = ١$$

$$\text{جا } ٣٠^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{جتا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{جا } ٦٠^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{جتا } ٦٠^\circ = \frac{1}{2} \quad \text{ظا } ٦٠^\circ = \sqrt{3}$$

- زاوية الارتفاع: إذا كانت نقطة ما أعلى من مستوى النظر الأفقي.

- زاوية الانخفاض: إذا كانت نقطة ما أدنى من مستوى النظر الأفقي.

- القطاع الدائري هو جزء من الدائرة محدود بنصفي قطرين وقوس على الدائرة.

- مساحة القطاع الدائري $= \frac{1}{2} \text{هـ}^2 \text{نم}^2$ حيث هـ^2 قياس الزاوية المركزية للقطاع الدائري بالراديان، نم هو نصف قطر الدائرة.

- القطعة الدائرية هي جزء من الدائرة محدودة بوتر وقوس على الدائرة.

- مساحة القطعة الدائرية $= \frac{1}{2} \text{نم}^2 (\text{هـ}^2 - \text{جاه}^2)$.

الجبر - التغير Algebra - Variation

مشروع الوحدة: تحويل التروس Shifting Gears في الدراجات الهوائية الرياضية.

١ مقدمة المشروع:

يستخدم الرياضيون في سباقات الدراجات الهوائية دراجات لها تروس متغيرة. يمكن للتروس والروافع أن تسهل العمل، لكن تبقى هناك مفاضلة للجودة. فالتروس العالية في الدراجة تسمح بالسير مسافة أكبر مع كل دورة من الدواسات ولكن بمجهود أكبر.

٢ الهدف:

كيف تختار التروس الملائمة خلال ركوب الدراجة: أماكن مسطحة، صعود الجبال، سباقات السرعة، أو المسافات الطويلة. سوف تستخدم ما تعلمه في الوحدة حول التغير والتناسبات في عملك.

٣ اللوازم:

أوراق، أوراق رسم بياني، آلة حاسبة.

٤ أسئلة حول التطبيق:

- ضع جدولاً يبين المسافات التي تقطعها على دراجتك مستخدماً تروسات مختلفة، ولمدة زمنية ثابتة وعلى الطريق نفسها.
- أعد التجربة واختر طريقاً غير مسطحة (صعوداً ثم نزولاً).
- اسأل أحد المحال التجارية عن خصائص الدراجات التي يستخدمها الرياضيون في السباقات وقارنها بخصائص الدراجة التي قمتها.
- التقرير: ضع تقريراً مفصلاً تبين فيه كيف استفدت من النسب والتناسب في تنفيذ المشروع.



دروس الوحدة

التغير العكسي	التغير الطردي	النسبة والتناسب
٣-٣	٢-٣	١-٣

أضف إلى معلوماتك

الجبر كلمة عربية استخدمها محمد بن موسى الخوارزمي (القرن التاسع الميلادي في عصر الخليفة العباسي المأمون) في كتابه الذي ألفه وكان عنوانه «الجبر والمقابلة» والذي وضع فيه طرقاً أصيلةً لحلّ المعادلات، وبذلك يعتبر الخوارزمي مؤسس علم الجبر بعد أن كان الجبر جزءاً من الحساب. وقد ترجم الكتاب إلى اللغات الأوروبية بعنوان «الجبر» ومنها أخذ العلم «الجبر» (algebra) هذا الاسم.

ويقول ابن الياسمين (أحد الرياضيين الشعراء):
على ثلاثة يدور الجبر
المال والأعداد ثم الجذر
فالمال كل عدد مربع
وجذره واحد تلك الأضلع
والعدد المطلق ما لم ينسب
للمال أو للجذر، فافهم تصب



محمد بن موسى الخوارزمي

أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت تمثيل العلاقات بيانياً باستخدام المتغيرات.
- استكشفت أنماط الدوال.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الأولى بمتغير واحد أو بمتغيرين.
- تعرفت طرائق حل معادلات ومتباينات من الدرجة الثانية بمتغير واحد ومثلت الحلول بيانياً.
- تعرفت التناسب وبعض خواص التناسب.

ماذا سوف تتعلم؟

- النسبة والتناسب واستخدامهما في حل مسائل حياتية.
- خواص التناسب المتسلسل.
- التغير الطردي.
- التغير العكسي.

المصطلحات الأساسية

النسبة - مقياس الرسم - التناسب - التناسب المتسلسل (الهندسي) - التغير الطردي - التغير العكسي.

سوف تتعلم

- بعض خواص التناسب
- تمارين وتطبيقات هندسيّة
- خواص التناسب المتسلسل

تعلم أن **النسبة** هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه يمكن تمثيلها بكسر.

فمثلاً: النسبة بين العدد ٣ (الحد الأول)، والعدد ٤ (الحد الثاني) هي $\frac{٣}{٤}$ ويمكن التعبير عن هذه النسبة بالصورة ٤:٣ وتقرأ ٣ إلى ٤.

يستخدم التناسب في تطبيقات حياتية، ومن أهمها مقياس الرسم الذي يستخدم في عمل الخرائط والرسوم الهندسية بمقاييس مصغرة للأشكال الحقيقية، وذلك بنسبة ثابتة بين الأبعاد في الرسم والأبعاد في الحقيقة.

تذکرہ:

۱ کم = ۱۰۰۰۰ سم

إذا كانت المسافة بين الكويت العاصمة والرياض هي ٥٥٠ كم، وكانت هذه المسافة ممثلةً في إحدى الخرائط بقطعة مستقيمة طولها ١١ سم. أوجد مقياس الرسم، ثم أوجد النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.

الحل:

$$\frac{\text{المسافة على الخريطة}}{\text{المسافة الحقيقية}} = \frac{\text{مقياس الرسم}}$$

$$\frac{11 \text{ سم}}{550000 \text{ سم}} = \frac{11 \text{ سم}}{550 \text{ كم}} =$$

حيث إن الكميتين من النوع نفسه يمكن كتابتها كنسبة بالصورة:

$\frac{11}{55} \text{ أو } 11:55$
 أي النسبة تساوي 1 : 5

حاول أن تحل

١ من مثال (١) استخدم مقياس الرسم على الخريطة لإيجاد المسافة الحقيقية بين الدمام والكويت العاصمة.



Proportion

التناسب

التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.

$$\text{فمثلاً: } \frac{3}{4} = \frac{12}{16} = \frac{15}{20} = \dots$$

ويمكن كتابة ذلك كالاتي: $3:4 = 12:16 = 15:20$
وتقرأ ٣ إلى ٤ هي نفسها ١٢ إلى ١٦ هي نفسها ١٥ إلى ٢٠ ...

خاصية التساوي:

ليكن أ، ب، ج، د، $\exists$ ح*، ك $\exists$ ح.

$$\text{إذا كان } \frac{أ}{ب} = \frac{ج}{د} \text{ فإن } \frac{أ}{ب} \times ك = \frac{ج}{د} \times ك ، \frac{أ}{ب} \times ك = \frac{ج}{د} \times ك$$

فمثلاً:

نعلم أن $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ بضرب الطرفين في ٢ نجد أن:

$$\frac{3}{4} \times 2 = \frac{15}{20} \times 2 \quad \text{أي أن } \frac{3}{2} = \frac{15}{10}$$

تذكر:

ح* هي مجموعة الأعداد
الحقيقية غير الصفرية

$$\{0\} - \text{ح} = \text{ح}^*$$

الرمز $\exists$ يقرأ ينتمي إلى

مثال (٢)

إذا كان $\frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$ فأوجد قيمة أ.

$$\text{الحل: } \frac{أ}{٩} = \frac{٥}{٦}$$

$$\frac{أ}{٩} \times ٩ = \frac{٥}{٦} \times ٩$$

$$\frac{أ}{٩} = ١$$

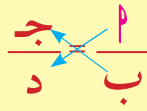
$$أ = ٩$$

حاول أن تحل

٢ إذا كان $\frac{٤}{٦} = \frac{ص}{٩}$ فأوجد قيمة ص.

بضرب الطرفين في ٩ (النظير الضربي لـ $\frac{١}{٩}$)

بالتبسيط



خاصية الضرب التقاطعي:

ليكن a, b, c, d ، ج، د $\exists$ ح *

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإن $ad = bc$

فمثلاً: $\frac{3}{4} = \frac{12}{16}$ من ذلك نجد أن:

$$3 \times 16 = 4 \times 12$$

$$48 = 48 \text{ عبارة صحيحة}$$

مثال (٣)

أوجد قيمة ص في التناسب: $\frac{3}{4} = \frac{ص}{٢,٥}$

الحل:

ضرب تقاطعي

$$٢,٥ \times ٣ = ٤ \times ص$$

$$٧,٥ = ٤ \times ص$$

بقسمة الطرفين على ٤

$$\frac{٧,٥}{٤} = ص$$

$$١,٨٧٥ = ص$$

حاول أن تحل

٣ أوجد قيمة ب في التناسب: $\frac{٨}{٢٠} = \frac{٢}{ب}$

تعريف:

ليكن a, b, c, d ، ج، د $\exists$ ح *

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ فإنه يقال أن a, b, c, d أعداد متناسبة.

وإذا كانت a, b, c, d ، ج، د أعداد متناسبة فإن $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$

ويسمى a, d طرفي التناسب، كما يسمى ج، ب وسطي التناسب.

ولأن في هذه الحالة $ad = bc$ خاصية الضرب التقاطعي

فإن: حاصل ضرب الطرفين = حاصل ضرب الوسطين.

مثال (٤)

أثبت أن ٤ ، ١,٥ ، ٨ ، ٣ أعداد متناسبة.

الحل:

تكون الأعداد ٤ ، ١,٥ ، ٨ ، ٣ أعدادًا متناسبة عندما تتساوى النسبتان $\frac{٨}{٣}$ ، $\frac{٤}{١,٥}$

$$\text{وحيث أن } \frac{٨}{٣} = \frac{٤٠}{١٥} = \frac{٤}{١,٥}$$

$$\text{أي أن } \frac{٨}{٣} = \frac{٤}{١,٥}$$

∴ الأعداد متناسبة.

حاول أن تحل

٤ أثبت أن ٤ ، ٣ ، ٧ ، ٢ ، ٠,٤ ، ٢ ، ٤ أعداد متناسبة.

تدريب

أعط أمثلة عددية توضح خواص التناسب التالية:
ليكن $\frac{١}{٢}$ ، $\frac{٣}{٤}$ ، $\frac{٥}{٦}$ ، $\frac{٧}{٨}$ أعدادًا حقيقية غير صفرية:

أمثلة عددية	خواص التناسب
	إذا كان $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$ ، فإن: ١ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$
	٢ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$
	٣ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$
	٤ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$
	٥ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$ $\frac{١}{٢} = \frac{٣}{٤}$

مثال (٥)

إذا كانت أ، ب، ج أعدادًا متناسبة مع الأعداد ٢، ٥، ٧. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ+٣}{ب+٢}$.

الحل:

∴ أ، ب، ج متناسبة مع ٢، ٥، ٧

$$\therefore \frac{أ}{٢} = \frac{ب}{٥} = \frac{ج}{٧} = م \text{ حيث } م \text{ عدد ثابت}$$

$$\therefore أ = ٢م، ب = ٥م، ج = ٧م$$

$$\therefore \text{المقدار} = \frac{أ+٣}{ب+٢} = \frac{٢م+٣}{٥م+٢} = \frac{١٧}{١٧} = ١$$

حاول أن تحل

٥ إذا كانت الأعداد أ، ب، ج متناسبة مع ٣، ٥، ١١. فأوجد القيمة العددية للمقدار $\frac{أ+٣}{ب+٥}$.

معلومة رياضية:

إذا كانت أ، ب، ج أعدادًا متناسبة مع الأعداد د، هـ، و، فإن:

$$\frac{أ}{د} = \frac{ب}{هـ} = \frac{ج}{و} = م \text{ حيث } م \text{ عدد ثابت}$$

مثال (٦) تطبيقات حياتية

تشارك سالم ومنصور بتنفيذ أعمال الدهان. إن نسبة الزمن الذي أمضياه في العمل هي ٤:٧. قبضا معًا ٨٨ دينارًا. كيف سيتوزع هذا المبلغ بينهما إذا عمل سالم فترة زمنية أطول من منصور؟

الحل: لتكن س نصيب سالم، م نصيب منصور من المبلغ.

$$\frac{س}{م} = \frac{٧}{٤}$$

كتابة التناسب

من خواص التناسب

$$\frac{س+٧}{٤} = \frac{م+٤}{٤}$$

$$\frac{١١}{٤} = \frac{٨٨}{م}$$

$$٣٢ = \frac{٨٨ \times ٤}{١١} = م$$

$$س = ٨٨ - ٣٢ = ٥٦$$

ينال سالم ٥٦ دينارًا، وينال منصور ٣٢ دينارًا.



حاول أن تحل

٦ في مثال (٧)، كيف سيتوزع المبلغ بين سالم ومنصور إذا كانت نسبة الزمن ٣:٥، إذا عمل منصور فترة زمنية أطول من سالم؟

مثال (٧) تطبيقات حياتية

النشاط لمدة ٦٠ دقيقة	السرعات المحروقة
المشي بسرعة ٤-٥ كم/ ساعة	٣٠٠
السباحة أو التزلج	٥٠٠
لعبة كرة قدم	٤٠٠

عند القيام بأنشطة رياضية فإن الشخص يفقد سرعات حرارية تتناسب تقريباً مع وزنه.

والجدول المجاور يبين ذلك لشخص وزنه ٦٥ كجم، عند قيامه بالنشاطات المذكورة لمدة ٦٠ دقيقة.

قام هذا الشخص بأحد هذه الأنشطة لمدة ٨٠ دقيقة. اكتب تناسباً تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السرعات الحرارية التي يفقدها (بالتقريب).

الحل: بفرض أن س عدد السرعات الحرارية التي يفقدها في كل نشاط عند المشي ٦٠ دقيقة يحرق ٣٠٠ سرعة حرارية عند المشي ٨٠ دقيقة يحرق س سرعة حرارية

$$\text{أي أن } \frac{٨٠}{٦٠} = \frac{س}{٣٠٠}$$

$$\text{باستخدام الضرب التقاطعي} \quad ٨٠ \times ٣٠٠ = ٦٠ \times س$$

$$\frac{٨٠ \times ٣٠٠}{٦٠} = س$$

$$س = ٤٠٠ \text{ سرعة حرارية تقريباً}$$

$$\text{وبالمثل السباحة: } \frac{٨٠}{٦٠} = \frac{س}{٥٠٠}, س = ٦٦٧ \text{ سرعة حرارية تقريباً.}$$

$$\text{وبالمثل كرة القدم: } \frac{٨٠}{٦٠} = \frac{س}{٤٠٠}, س = ٥٣٣ \text{ سرعة حرارية تقريباً.}$$

حاول أن تحل

٧ إذا مارست رياضة كرة السلة لمدة ٢٠ دقيقة، تفقد ٣٠٠ سرعة. اكتب تناسباً تستطيع بواسطته أن تحسب عدد السرعات الحرارية التي تفقدها إذا مارست هذه الرياضة لمدة ٥٠ دقيقة.

Geometric Proportion

التناسب المتسلسل الهندسي

ليكن a, b, c ج $\exists$ ح *

إذا كان $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$ فإنه يقال إن a, b, c ج في تناسب متسلسل (أو تناسب هندسي)

وبالعكس: إذا كانت a, b, c ج في تناسب متسلسل فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{c}$

ويسمى b الوسط المتناسب للعددين a, c ج أو الوسط الهندسي لهما كما يسمى a, c ج طرفي التناسب.

فمثلاً: ٢، ٤، ٨ في تناسب متسلسل لأن $\frac{2}{4} = \frac{4}{8}$.

ولاحظ أن ٨، ٤، ٢ كذلك في تناسب متسلسل لأن $\frac{8}{4} = \frac{4}{2}$.

إذا كان a, b, c ج $\exists$ ح * في تناسب متسلسل فإن ج، ب، a في تناسب متسلسل أيضاً.

مثال (٨)

أثبت أن الأعداد ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

الحل:

$$\frac{1}{3} = \frac{9 \div 9}{9 \div 27} = \frac{9}{27}, \frac{1}{3} = \frac{3}{9}$$

$$\frac{9}{27} = \frac{3}{9} \therefore$$

أي أن ٣، ٩، ٢٧ في تناسب متسلسل.

حاول أن تحل

٨ اكتب ٣ أعداد في تناسب متسلسل.

مثال (٩)

إذا كانت الأعداد ٥، س، ٢٠ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س، ثم تحقق.

$$\text{الحل: نكتب التناسب المتسلسل: } \frac{س}{٢٠} = \frac{٥}{س}$$

الضرب التقاطعي

$$س^2 = ١٠٠$$

$$س = ١٠ \text{ أو } س = -١٠$$

التحقق:

$$\begin{array}{l} س = -١٠ \\ \frac{س}{٢٠} = \frac{٥}{س} \\ \frac{-١٠}{٢٠} = \frac{٥}{-١٠} \\ \checkmark ١٠٠ = ١٠٠ \end{array}$$

$$\begin{array}{l} س = ١٠ \\ \frac{س}{٢٠} = \frac{٥}{س} \\ \frac{١٠}{٢٠} = \frac{٥}{١٠} \\ \checkmark ١٠٠ = ١٠٠ \end{array}$$

حاول أن تحل

٩ هل يمكن إيجاد قيمة س بحيث تكون الأعداد -٩، س، ٤ في تناسب متسلسل؟ فسّر.

Properties of Chaine Proportion

خواص التناسب المتسلسل

خاصية (١)

ليكن أ، ب، ج، $\exists$ ح*

إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج}$ (أي أن أ، ب، ج في تناسب متسلسل)

فإن $ب^2 = أ ج$ وذلك من خاصية الضرب التقاطعي

فمثلاً: في حالة ٣، ٩، ٢٧ نجد أن:

$$٢٧ \times ٣ = ٩(٩) \quad (\text{كل من الطرفين يساوي ٨١})$$

خاصية (٢)

ليكن a, b, c, d ، حيث $d \neq 0$ *

إذا كان:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{p}{q} = m \quad (\text{أي أن } a, b, c, d \text{ في تناسب متسلسل}) \quad \text{حيث } m \text{ عدد ثابت}$$

فإن:

$$a \times d = b \times c, \quad b \times d = c \times m, \quad c \times d = m \times q$$

فمثلاً: في حالة $\frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{8}{12}$ نجد أن:

$$2 \times 12 = 24, \quad 4 \times 6 = 24, \quad 8 \times 3 = 24$$

مثال (١٠)

إذا كانت الأعداد ٦، س، ٥٤، ١٦٢ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

الحل:

∴ الأعداد في تناسب متسلسل

$$\frac{6}{162} = \frac{S}{54} = \frac{S}{54}$$

$$\frac{6}{162} = \frac{S}{54}$$

الضرب التقاطعي

$$6 \times 54 = 162 \times S$$

$$S = \frac{6 \times 54}{162} = 2$$

قيمة س = ٢

حاول أن تحل

١٠ إذا كانت الأعداد ٤، س - ٢، ١، $\frac{1}{4}$ في تناسب متسلسل، أوجد قيمة س.

إذا كانت الأعداد أ، ب، ج، د في تناسب متسلسل، فأثبت أن $\frac{أ}{ب} = \frac{أ+ب+ج}{ب+ج+د}$

الحل:

∴ أ، ب، ج، د في تناسب متسلسل

$$\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج} = \frac{ج}{د} = م \quad \text{تناسب متسلسل}$$

$$\therefore ج = د \times م, \quad ب = د \times م^2, \quad أ = د \times م^3$$

$$\frac{أ}{ب} = م = \frac{أ+ب+ج}{ب+ج+د} = \frac{د \times م^3 + د \times م^2 + د \times م}{د \times م + د \times م^2 + د \times م^3} = \frac{د \times م(1 + م + م^2)}{د \times م(1 + م + م^2)}$$

حل آخر: من التناسب السابق أ = ب م، ب = ج م، ج = د م

$$\frac{أ}{ب} = م = \frac{أ+ب+ج}{ب+ج+د} = \frac{ب م + ج م + د م}{ب + ج + د} = \frac{م(ب + ج + د)}{ب + ج + د}$$

حاول أن تحل

١١ إذا كانت الأعداد أ، ب، ج، د في تناسب متسلسل

$$\text{فأثبت أن: } \frac{أ-ب}{ب-ج} = \frac{أ-٢ب}{٢ب-٣ج} \quad (\text{بشرط المقام } \neq ٠)$$

التغير الطردي Direct Variation

دعنا نفكر ونتناقش

التغير

التغير هو ظاهرة طبيعية في الحياة نلمسها ونشاهدها في العديد من المواقف والأشياء. فمثلاً:

- درجات الحرارة تتغير بالارتفاع والانخفاض في اليوم الواحد وفي الفصول المختلفة.
- وزن الطفل يتغير مع نموه.
- الزمن يتغير مع توالي الليل والنهار والأشهر والسنين.
- الأسعار تتغير.
- حجم الغاز يتغير بتغير درجة حرارته.
- المسافة التي يقطعها جسم متحرك تتغير بمرور الزمن.

سوف نتعلم

- التغير
- التغير الطردي
- دالة التغير الطردي
- ثابت التغير الطردي
- معدل التغير الطردي

تدريب

- ١ أذكر بعض الأشياء التي تتغير في حياتك.
- ٢ عدد بعض الأشياء التي تتغير بسبب تغير أشياء أخرى.
- ٣ هل تتغير مساحة المربع بتغير طول ضلعه؟
- ٤ عدد بعض الظواهر التي لا تتغير - أي الظواهر الثابتة.
- ٥ أذكر أمثلة لبعض الثوابت التي مرّت عليك في الرياضيات.

التغير الطردي

مثال توضيحي: الصورة المتحركة في السينما

عندما تشاهد فيلمًا سينمائيًا عاديًا، فإن ٢٤ صورة فردية تسطع سريعًا على الشاشة كل ثانية. في ما يلي ثلاث طرائق لبيان العلاقة بين عدد الصور (أو الإطارات التي تعرض) وعدد الثواني:

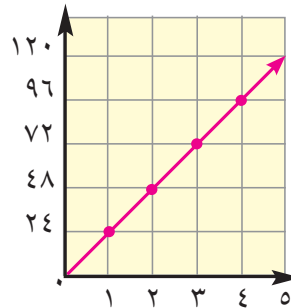
الطريقة الثالثة

العلاقة بين عدد الصور (ص) وعدد الثواني (س) هي:
ص = ٢٤ س



الطريقة الثانية

الشكل المرسوم



الطريقة الأولى

الجدول

ص عدد الصور	س عدد الثواني
٢٤	١
٤٨	٢
٧٢	٣
٩٦	٤
١٢٠	٥

معلومة مفيدة:

لتكن $P(s_1, v_1)$ ، $B(s_2, v_2)$ فإن ميل $\overleftrightarrow{AB} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} : s_1 \neq s_2$
وعندما يمر المستقيم بنقطة الأصل والنقطة (s_1, v_1)
يصبح ميل المستقيم $= \frac{v}{s} : s \neq 0$
ويسمى الميل في هذه الحالة ثابت التغير أو معدل التغير

من الطرائق الثلاث السابقة أجب عن التالي:

(أ) ما معدل التغير في البيانات المبينة في الجدول؟

(ب) ما ميل المستقيم في الشكل البياني؟

(ج) ما معامل s في العلاقة بين v ، s ؟

ما العلاقة التي تلاحظها بين: معدل التغير، ميل المستقيم، معامل s ؟

• نلاحظ في هذا المثال أن عدد الصور يتغير مع عدد الثواني التي تظهر فيها.

(كلما زاد عدد الثواني زاد عدد الصور التي تعرض بنفس النسبة) وفي هذه الحالة نقول إن العلاقة تمثل تغيرًا طرديًا.

Direct Variation

التغير الطردي

هو دالة خطية يمكن أن تكتب بالصورة: $v = ks$ حيث $k \neq 0$
ويسمى k ثابت التغير أو معدل التغير.
ويمكن التعبير عن العلاقة $v = ks$ على الصورة $v = \alpha s$.

ملاحظات

- 1 يمكن تمثيل دالة التغير الطردي: $v = ks$ بخط مستقيم يمر بنقطة الأصل.
- 2 يمكن كتابة المعادلة الخطية $v = ks$ بالصورة: $k = \frac{v}{s}$ حيث $s \neq 0$.
- 3 ثابت التغير k = معدل التغير في البيانات التي تصف التغير.
- 4 الثابت k = ميل الخط المستقيم الذي يمثل المعادلة بيانيًا.
- 5 في حالة التغير الطردي فإن: ثابت التغير = معدل التغير = ميل المستقيم الممثل لمعادلة التغير.
- 6 التغير قد يكون بالزيادة أو بالنقصان.
- 7 إذا كانت $v = \alpha s$ فمعنى ذلك أن $\frac{v}{s} = \frac{v_2 - v_1}{s_2 - s_1} = \frac{v_2}{s_2} = \frac{v_1}{s_1}$: المقام $\neq$ صفر

تعميم

إذا كانت v تتغير طرديًا مع s أي $v = \alpha s$ فإن:
 $v = ks$ حيث k ثابت لا يساوي الصفر
والعكس صحيح.

سنكتفي بدراسة التغير الطردي عندما $k < 0$.

مثال (١)

إذا كانت ص α س وكانت ص $30 =$ عندما س $10 =$ ، فأوجد قيمة ص عندما س $40 =$ ، ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

الحل: $\therefore$ ص α س

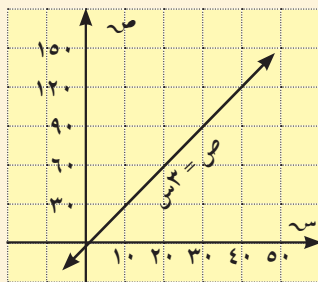
$\therefore$ ص $= ك س$

$\therefore 30 = ك \times 10$

$ك = 3$

$\therefore$ ص $= 3 س$

عندما س $40 =$ تكون ص $= 40 \times 3 = 120$



س	٠	١٠	٤٠
ص $= 3س$	٠	٣٠	١٢٠

حاول أن تحل

١ إذا كانت ص α س وكانت ص $5 =$ عندما س $1 =$ ، أوجد قيمة ص عندما س $15 =$

ثم مثل العلاقة بين س، ص بيانيًا.

مثال (٢)

في إحدى المناطق ترتفع درجة الحرارة بانتظام خلال النهار بمعدل 3° في الساعة. اكتب معادلة تغير طردي تمثل هذا الارتفاع.

الحل:

$\therefore$ درجة الحرارة ترتفع بانتظام

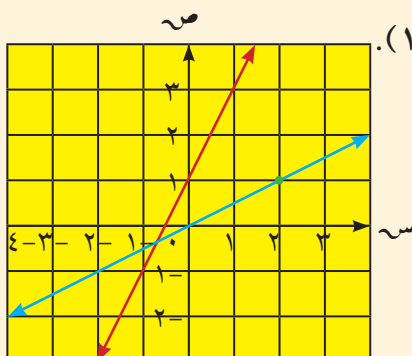
$\therefore$ معدل التغير $= 3$

المعادلة هي ص $= 3س$ حيث ص درجة الحرارة، س عدد الساعات.

مثال (٣)

في الشكل المقابل، أي من المستقيمين يمثل تغيرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

الحل:



المستقيم الذي يمر بنقطة الأصل يمثل تغيرًا طرديًا بين س، ص وهو يمر بالنقطة (١، ٢).

$$\text{ثابت التغير} = \frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{1}{2}$$

المستقيم الثاني لا يمر بنقطة الأصل فهو لا يمثل تغيرًا طرديًا.

حاول أن تحل

٢ هل المستقيم الذي يمر بالنقطتين: ١ (٢، ٣)، ب (٤، ٦) يمثل تغيرًا طرديًا بين س، ص. اشرح إجابتك

مثال (٤)

أي من المعادلتين التاليتين تمثل تغيرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

أ $٥س - ٣ص = ٣ص + ٥ص$ ب $٥س + ٢ص = ٩$

الحل:

أ $٥س - ٣ص = ٣ص + ٥ص$

$٨ص = ٢ص$

$ص = \frac{٢}{٨}س = \frac{١}{٤}س$ على الصورة $ص = كس$

هذه المعادلة تمثل تغيرًا طرديًا،

حيث ثابت التغير $\frac{١}{٤}$

ب $٥س + ٢ص = ٩$

$٢ص = ٩ - ٥س$

$ص = \frac{٩}{٢} - \frac{٥}{٢}س$

وهذه ليست على الصورة $ص = كس$

إذاً هذه المعادلة لا تمثل تغيرًا طرديًا.

حاول أن تحل

٣ أي من المعادلات التالية تمثل تغيرًا طرديًا؟ أوجد ثابت التغير في حالة التغير الطردي.

أ $٧ص = ٢س$

ب $٨ = ٣ص + ٤ص$

ج $٢(س + ٢ص) = ٣ص$

مثال (٥) تطبيقات حياتية

الطقس: الزمن الذي تستغرقه لسماع الرعد يتغير طرديًا مع المسافة بينك وبين موقع البرق. فإذا كنت على مسافة ٣ كم من موقع البرق فإنك سوف تسمع الرعد بعد ١٠ ثوانٍ من رؤية البرق.

أ) اكتب المعادلة التي توضح العلاقة بين المسافة والزمن.

ب) أوجد المسافة بينك وبين موقع البرق إذا سمعت الرعد بعد ١٨ ثانية من رؤية البرق.

الحل:

أ) لتكن s المسافة بالكيلومترات بينك وبين موقع البرق،

وليكن t الزمن بالثواني الذي يمر بين رؤية البرق وسماع الرعد.

بما أن الزمن يتغير طرديًا مع المسافة

∴ معادلة التغير الطردي:

$$s = kt$$

$$\text{وحيث إن } s = 3, t = 10$$

$$3 = k \times 10$$

$$k = \frac{3}{10}$$

= ثابت التغير

∴ المعادلة هي: $s = \frac{3}{10}t$ هي المعادلة المطلوبة

حيث s تقاس بالكيلومترات، t بالثواني.

$$\text{ب) } s = \frac{3}{10}t$$

$$18 = \frac{3}{10}t$$

$$s = \frac{3 \times 18}{10} = 5,4$$

المسافة المطلوبة = ٥,٤ كيلومتر.



مثال (٦)

البيولوجيا: تتغير كمية الدم في جسم الإنسان طرديًا مع وزنه. تبلغ كمية الدم في جسم رجل يزن ٧٥ كجم نحو ٥ لترات.

أ) أوجد ثابت التغير.

ب) اكتب معادلة تربط العلاقة بين كمية الدم والوزن.

الحل:

نفرض أن كمية الدم في جسم الإنسان هي v وزن الجسم هو s

أ) ثابت التغير $\frac{v}{s}$

$$\frac{1}{15} = \frac{5}{75} =$$

ب) معادلة التغير الطردي:

$$v = \frac{1}{15} s$$

المعادلة المطلوبة:

كمية الدم = ثابت التغير $\times$ الوزن

$$\text{كمية الدم} = \frac{1}{15} \text{ الوزن.}$$

حاول أن تحل

٤ السؤال المفتوح: قدر كمية الدم في جسمك مستخدماً مثال (٦).

التعبير عن التغير الطردي

في التغير الطردي تكون النسبة $\frac{v}{s}$ ثابتة لكل زوج مرتب حيث $s \neq 0$ في جميع الحالات. وبالتالي يمكن التعبير عن التغير الطردي باستخدام التناسب.

فيكون: $\frac{v_1}{s_1} = \frac{v_2}{s_2} = \dots$ لجميع الأزواج المرتبة $(s_1, v_1), (s_2, v_2), \dots$

حيث $s_1 \neq 0, s_2 \neq 0, \dots$

وكل من هذه النسب تساوي ثابت التغير k . (معدل التغير).

مثال (٧)

بيّن ما إذا كانت ص تتغيّر طرديًا مع س في كل من بيانات الجدولين أ، ب. اكتب معادلة التغيّر في حالة التغيّر الطرديّ.
الحل:

س	٣	١	٤
ص	٢,٢٥	٠,٧٥	٣
ص/س	٠,٧٥	٠,٧٥	٠,٧٥

ب

س	٢	٤	٦
ص	١-	١	٣
ص/س	٠,٥-	٠,٢٥	٠,٥

أ

- الجدول أ لا يمثل تغيّرًا طرديًا لأن $\frac{ص}{س}$ ليست ثابتة لكل البيانات.
- الجدول ب يمثل تغيّرًا طرديًا حيث ثابت التغيّر يساوي ٠,٧٥. معادلة التغيّر هي $ص = ٠,٧٥ س$.

حاول أن تحل

٥ هل تتغيّر ص طرديًا مع س في الجدول:

س	١	١-	٢	٣-
ص	٣	١-	٥	٥-

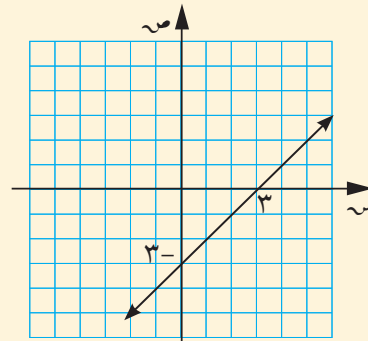
مثال (٨)

تفكير ناقد: هل كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ؟ فسر إجابتك.

الحل: لا: ليست كل معادلة خط مستقيم تعبّر عن تغيّر طرديّ.

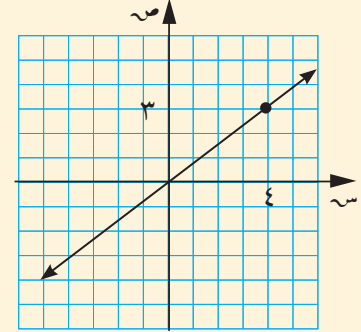
معادلة التغيّر الطرديّ تكون بالصورة $ص = ك س$ ، أي أن المستقيم الممثل لها يمر بنقطة الأصل.

مثلاً: البيانات في الشكل (أ) تمثّل بالمعادلة $ص = ٠,٧٥ س$ ، وهي معادلة تغيّر طرديّ، لأنها بالصورة $ص = ك س$ بينما البيانات في الشكل (ب) تمثّل بالمعادلة $ص = س - ٣$ وهي ليست بالصورة $ص = ك س$.



(ب)

معادلة خط مستقيم لا تمثّل تغيّرًا طرديًا



(أ)

معادلة خط مستقيم تمثّل تغيّرًا طرديًا

مثال (٩) تطبيقات حياتية

معلومة فيزيائية:

من قوانين الحركة : الوزن هو كمية فيزيائية لها نفس وحدة القوة (نيوتن) وهي ناتجة من تأثير عجلة الجاذبية الارضية على كتلة الجسم أي وزن ١ كجم = ١٠ نيوتن

الفيزياء: القوة التي تستخدمها لرفع جسم تتغير طردياً مع وزن الجسم.
فأنت تحتاج إلى استخدام قوة قدرها ٢٧٥ , ٠ نيوتن لتتمكن إحدى المعدات من رفع جسم وزنه ١٢ نيوتن. أوجد مقدار القوة اللازم استخدامه في هذه الآلة لرفع جسم وزنه ٤٥ نيوتن.

الحل:

لنرمز إلى القوة بالرمز U ، وإلى وزن الجسم بالرمز W .

$\therefore U \propto W$ و

$$\therefore \frac{U_1}{U_2} = \frac{W_1}{W_2}$$

$$\frac{U_1}{12} = \frac{275,0}{45}$$

$$U_1 = 12 \times 275,0 \div 45$$

$$U_1 = \frac{12 \times 275,0}{45} = 73,33 \text{ نيوتن}$$

أي أنك تحتاج إلى كيلوجرام تقريباً لرفع ٤٥ نيوتن.



حاول أن تحل

٦ اكتب معادلة التغير الطردي للمثال السابق، واستخدمها لإيجاد الوزن الذي يمكن أن ترفعه باستخدام

قوة قدرها ٣ , ٤ نيوتن في الرافعة نفسها.

التغير العكسي Inverse Variation

سوف نتعلم

- التغير العكسي
- ثابت التغير العكسي
- دالة التغير العكسي
- مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

عمل تعاوني

يرغب فريق من الشباب في استصلاح قطعة أرض لجعلها صالحة للزراعة، ويتطلب هذا العمل ١٦٠ يوم عمل. ويمكن لفريق مكون من ٢٠ شابًا أن ينجزوا هذا العمل في ٨ أيام؛ فإذا استمر العمل بالمعدل نفسه:

١ كم يومًا يتطلب العمل إذا كان عدد أعضاء الفريق مكونًا من ٤٠ شخصًا؟

٢ أكمل الجدول التالي:

عدد أعضاء الفريق (س)	عدد أيام العمل (ص)	س ص
٢	٨٠	١٦٠
٥	٣٢	١٦٠
٨		
....	١٦	
٢٠	٨	١٦٠
٤٠		

هل تعلم؟



روبرت بويل (١٦٢٧-١٦٩١)

عالم إيرلندي.

درس العلاقة بين حجم الغاز

وضغطه. اشتهر بقانونه:

حجم الغاز $\times$ ضغط الغاز =

مقدار ثابت.

يسمى القانون أيضًا قانون بويل ماريوت.

٣ يمثل الجدول العلاقة بين س، ص في هذا النوع من التغير.

٤ صف ما يحدث لعدد أيام العمل (ص) عندما يزداد عدد أعضاء الفريق (س).

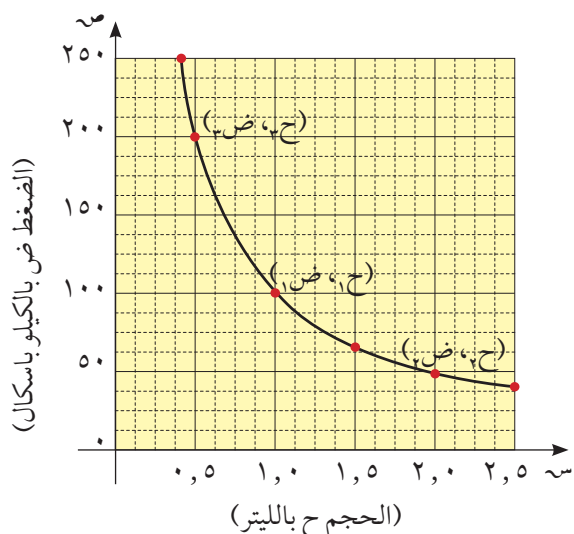
٥ ماذا تلاحظ على حاصل الضرب س ص في هذا النوع من التغير؟

قانون بويل

إن حاصل ضرب حجم الغاز في ضغطه يساوي مقدارًا ثابتًا.

$$\text{ح} \times \text{ض} = \text{مقدار ثابت}$$

في كل نقطة في الشكل المقابل حاصل الضرب ثابت.



١ - التغير العكسي

إذا تغيرت كمية س مع تغير كمية أخرى ص بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتاً، فإن هذا التغير يسمى تغيراً عكسياً. ويسمى حاصل الضرب س ص ثابت التغير، ويرمز إلى ذلك:

$$س ص = ك \text{ أو } ص = \frac{ك}{س}, ك \neq ٠$$

ويمكن التعبير عن التغير العكسي بالصورة $ص = \frac{١}{س}$

ففي العمل التعاوني السابق نجد أن:

$$س ص = ١٦٠$$

$$أي ص = \frac{١٦٠}{س}$$

حيث ثابت التغير هنا هو ١٦٠.

مثال (١)

أ) أكمل الجدول التالي حيث $س ص = ١٠٠$

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	...	...	...	...	...	...	...

الحل:

س	١	٢	٤	٥	١٠	٢٠	٥٠	١٠٠
ص	١٠٠	٥٠	٢٥	٢٠	١٠	٥	٢	١

ب) كيف تتغير قيم ص مع زيادة قيم س في الجدول السابق؟ وما نوع هذا التغير؟

الحل: نلاحظ أن كلما تزايدت قيمة س، تتناقص قيمة ص بحيث تحقق العلاقة $س ص = ١٠٠$. ∴ التغير عكسي.

ج) اذكر ثابت التغير ك في التغيرات العكسية الممثلة بالأشكال البيانية.

الحل: ثابت التغير ١٢، ٦، ٢.

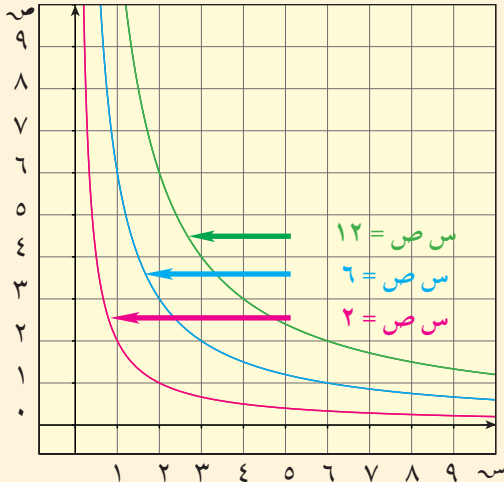
د) اذكر ثلاث نقاط تقع على كل من الأشكال البيانية المبينة.

الحل:

أ) (٢، ٦)، ب) (٤، ٣)، ج) (٣، ٤)

د) (٦، ١)، هـ) (٣، ٢)، و) (٢، ٣)

ح) (٢، ١)، ط) (١، ٢)، ي) (٤، ٥)، ٠



مثال (٢)

منطقة مستطيل مساحتها ٢٤ سم^٢، وطولها س سم، وعرضها ص سم. إذا كان كل من س، ص أعدادًا كلية، فأوجد القيم الممكنة لـ س، ص ثم حدد نوع التغير الذي يمثل هذه العلاقة.

الحل:

س	٢٤	١٢	٨	٦
ص	١	٢	٣	٤

مساحة المستطيل = س ص = ٢٤

أي س ص = ثابت ونعبر عن ذلك رياضياً:

س × ص = ك ثابت
أي أن ص = $\frac{ك}{س}$ ، ص $\propto \frac{1}{س}$
∴ التغير عكسي.

حاول أن تحل

س	٢	٣	٤	٥	٦	١٠
ص	٣٠	٢٠	١٥	١٢	١٠	٦

بالنظر إلى الجدول أعلاه، هل س × ص يعبر عن تغير عكسي؟ اشرح إجابتك.

٢ كَوْنْ جدولاً من س، ص على أن يكون س ص يعبر عن تغير عكسي.

ملاحظة: استخدام التناسب في التعبير عن التغير العكسي.
إذا كان (س_١، ص_١)، (س_٢، ص_٢) زوجين مرتبين في تغير عكسي.

ص_١ $\propto \frac{1}{س_١}$ ، أي ص = $\frac{ك}{س}$ فإن

س_١ ص_١ = س_٢ ص_٢ = ك

ومن ذلك نستنتج أن $\frac{ص_١}{س_١} = \frac{ص_٢}{س_٢}$

في مثال العمل التعاوني السابق نجد أن:

$$٢ \times ٨٠ = ٥ \times ٣٢$$

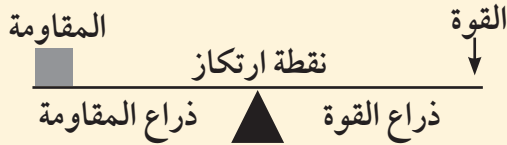
ومن ذلك نرى أن: $\frac{٣٢}{٨٠} = \frac{٢}{٥}$ ، $\frac{٣٢}{٢} = \frac{٨٠}{٥}$ ، $\frac{٨٠}{٣٢} = \frac{٥}{٢}$ ، ...

مثال (٣)

تطبيقات حياتية

معلومة فيزيائية: قانون الرافعة

ناتج ضرب القوة في المسافة العمودية بين نقطة تأثير القوة ونقطة الارتكاز (ذراع القوة) يساوي حاصل ضرب المقاومة في ذراع المقاومة.



الفيزياء: الوزن الذي تحتاج إليه لإحداث توازن في أرجوحة على شكل رافعة يتغير عكسيًا مع المسافة بين الوزن ونقطة الارتكاز. جاسم وزنه ٥١٠ نيوتن ويجلس على بعد ٢,٥ م من نقطة الارتكاز. أين يجلس وائل الذي وزنه ٧٥٠ نيوتن ليحدث التوازن؟

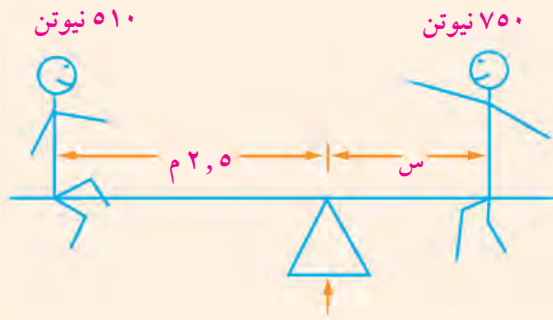
الحل: قانون الرافعة: القوة × ذراعها = المقاومة × ذراعها

من توازن الرافعة: الوزن_١ × المسافة_١ = الوزن_٢ × المسافة_٢

$$٥١٠ \times ٢,٥ = ٧٥٠ \times س$$

$$س = \frac{٢,٥ \times ٥١٠}{٧٥٠} = ١,٧$$

أي أن وائل يجلس على مسافة ١,٧ م بعيدًا عن نقطة الارتكاز.



حاول أن تحل

٣ أ في تغير عكسي ص $\propto \frac{1}{س}$ إذا كانت ص = ٢, ٠ عندما س = ٧٥. أوجد س عندما ص = ٣.

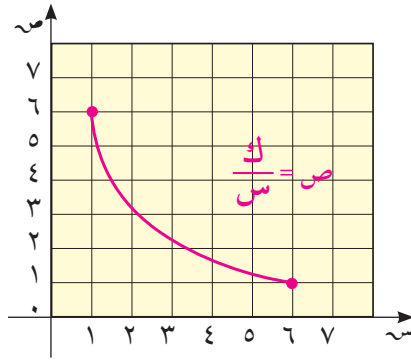
ب ما وزن جسم يوضع على مسافة ٣ م من نقطة ارتكاز رافعة، ليحدث توازنًا مع جسم وزنه ٤٠ نيوتن على بعد ٦ م من نقطة الارتكاز؟

ج رحلة تستغرق ٣ ساعات عندما تسير السيارة بسرعة ٧٥ كم/ساعة. كم تستغرق الرحلة إذا سارت السيارة بسرعة ٩٠ كم/ساعة.

مقارنة بين التغير الطردي والتغير العكسي

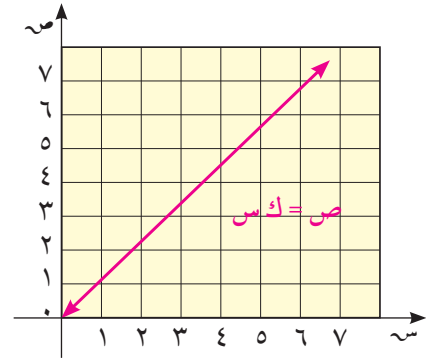
يوضح الشكلان البيانيان التاليان الفرق بين التغير الطردي والتغير العكسي.

تغير عكسي



$$\begin{aligned} \text{ص} &\propto \frac{1}{\text{س}} \\ \text{ص} &= \frac{\text{ك}}{\text{س}} : \text{ك} < 0 \\ \text{ك} &= \text{س} \times \text{ص} \\ &= \text{ثابت التغير} \end{aligned}$$

تغير طردي



$$\begin{aligned} \text{ص} &\propto \text{س} \\ \text{ص} &= \text{ك} \times \text{س} \\ \frac{\text{ص}}{\text{س}} &= \text{ك} \\ &= \text{ثابت التغير} \end{aligned}$$

مثال (٤)

أي من بيانات الجدولين (أ)، (ب) يمثل تغيرًا طرديًا؟ وأيها يمثل تغيرًا عكسيًا؟ اكتب المعادلة التي تمثل التغير في الحالتين:

س	٢	٤	١٠
ص	٥	١٠	٢٥

ب نبحث عن النسب $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ في جميع الحالات نجد أن:

$$\frac{\text{ص}}{\text{س}} = \frac{٥}{٢} = \frac{١٠}{٤} = \frac{٢٥}{١٠}$$

وهي نسبة ثابتة = ٥, ٢

إذاً التغير هنا طردي معادلته $\text{ص} = ٥, ٢ \text{ س}$

س	٥	١٠	٢٥
ص	٢٠	١٠	٤

الحل:

أ نلاحظ أن $\frac{\text{ص}}{\text{س}}$ ليست ثابتة.

نبحث س ص نجد أن

$$\text{س} \times \text{ص} = ١٠ \times ١٠ = ٢٠ \times ٥ = ١٠٠$$

$$١٠٠ = ٤ \times ٢٥ = \text{ثابت}$$

إذاً التغير هنا تغير عكسي معادلته $\text{س} \times \text{ص} = ١٠٠$

حاول أن تحل

- ٤ بيّن نوع التغيّر المناسب للموقف في كل من الحالات التالية، ثم اكتب رمز المعادلة التي تمثله: أ س ص = ٥
 (١) المبلغ الذي يأخذه كل شخص عند توزيع مبلغ ١٠٠ دينار على عدة أشخاص بالتساوي. ب ص = $\frac{١٠٠}{س}$
 (٢) تكلفة شراء عدد من الأقلام علمًا أن ثمن القلم ٢٠ فلسًا. ج ص = ٢٠ س
 (٣) أنت تمشي ٥ كم كل يوم. سرعتك في المشي والزمن يتغيران من يوم إلى يوم. د ص = ٥ س

مثال (٥) تطبيقات حياتية

توفي رجل وترك لزوجته وأبنائه مبلغ ٣ ٤٥٠ ٠٠٠ دينار. (والداه متوفيان).
 أوجد نصيب كل فرد إذا تألفت عائلته من:

- أ ٥ أولاد و ٤ بنات ب ٤ أولاد و ٣ بنات ج ولد واحد وابنتين

سورة النساء

ماذا تلاحظ؟

الحل:

للزوجة الثمن أي $\frac{١}{٨} \times ٣٤٥٠٠٠٠ = ٤٣١٢٥٠$

يبقى لأبنائه: $٣٠١٨٧٥٠ = ٣٤٥٠٠٠٠ - ٤٣١٢٥٠$

- أ عدد الحصص = عدد البنات $\times ١$ + عدد البنات $\times \frac{١}{٢}$
 $٧ = ٤ \times \frac{١}{٢} + ١ \times ١ =$

نصيب الولد = $٣٠١٨٧٥٠ \div ٧ = ٤٣١٢٥٠$ دينارًا.

نصيب الابنة = $٤٣١٢٥٠ \times \frac{١}{٢} = ٢١٥٦٢٥$ دينارًا.

- ب عدد الحصص = $١ \times ٤ + ٣ \times \frac{١}{٢} = \frac{١١}{٢}$

نصيب الولد = $٣٠١٨٧٥٠ \div \frac{١١}{٢} \approx ٥٤٨٨٦٣,٦$ دينارًا.

نصيب الابنة = $٥٤٨٨٦٣,٦ \div ٢ \approx ٢٧٤٤٣١,٨$ دينارًا.

- ج عدد الحصص = $١ \times ١ + ٢ \times \frac{١}{٢} = ٢$

نصيب الولد = $٣٠١٨٧٥٠ \div ٢ = ١٥٠٩٣٧٥$ دينارًا.

نصيب الابنة = $١٥٠٩٣٧٥ \div ٢ = ٧٤٥٦٨٧,٥$ دينارًا.

نلاحظ أنه كلما زاد عدد الحصص قل نصيب الفرد. أي أن نصيب كل فرد من البنات يتغير عكسيًا مع عدد الحصص.

حاول أن تحل

- ٥ هندسة: خصصت قطعنا أرض لبناء مجمعين سكنيين لهما المساحة نفسها، كل منهما على شكل مستطيل:
 أبعاد القطعة الأولى ٤٢ م $\times$ ٣٥ م، فإذا كان طول القطعة الثانية ٥ م، فاحسب عرضها.

المرشد لحل المسائل

يباع الحجر المصنوع من الإسمنت المعد سلفاً ويوزع في شاحنات تتسع كل منها لـ ٨,٥ م^٣.
أبعاد حجر الأسمنت المعتمدة هي ١٥ سم، ١٨ سم، ٢٠ سم.
يريد جاسم تغطية رقعة مساحتها ٢٨٠ متراً مربعاً ويريد معرفة عدد الشاحنات اللازم للعملية.
كيف فكر جاسم

- أ) كلما زاد عمق الرقعة المغطاة بالأسمنت قلت مساحتها. استنتج أن تغيّر عمق الرقعة مع تغيّر المساحة هو عكسي.
ب) قام بوضع جدول يبيّن الأمتار المكعبة من الأسمنت اللازمة وفق كل عمق.
إذا كان العمق ١٥ سم: ح = $١٥ \times ٢٨٠ = ٤٢٠٠$ م^٣.
يتغيّر عدد الشاحنات طردياً مع حجم الأسمنت: $٤٢ \div ٨,٥ \simeq ٥$ شاحنات.

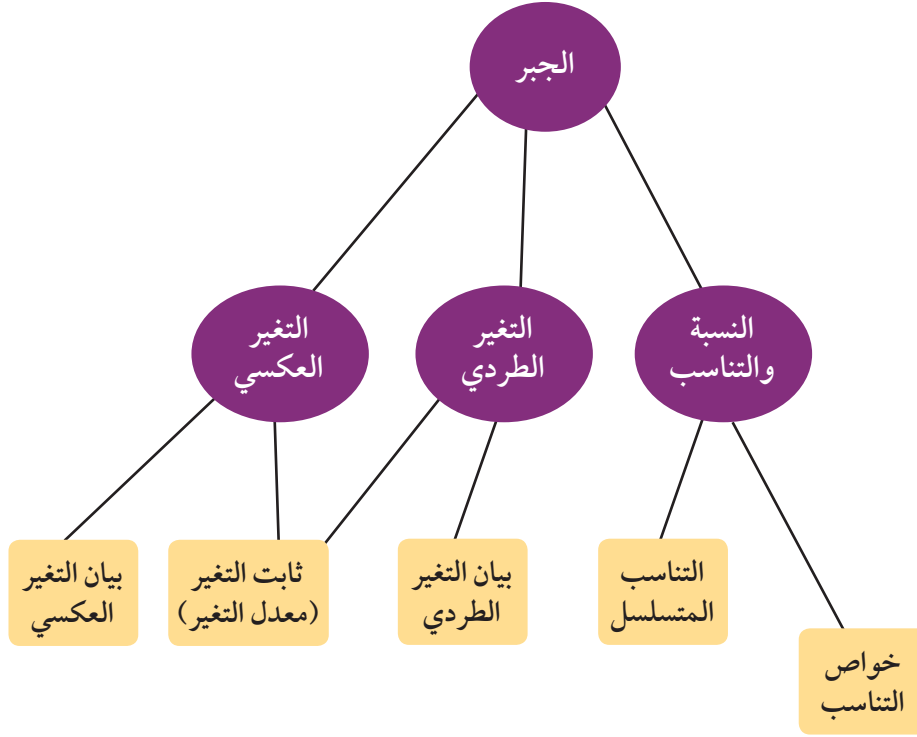
العمق بالأمتار	الأمتار المكعبة	عدد الشاحنات
١٥,٠	٤٢	٥
١٨,٠	٥٠,٤	٦
٢٠,٠	٥٦	٧

استشار جاسم أحد مهندسي الإنشاءات فأفاده أن عمق ٢٠ سم غير ضروري، ولكن يجب أن لا يقل عن ١٥ سم.
قرّر جاسم اعتماد عمق ١٨ سم.
برأيك، هل اختيار جاسم موفق؟ وهل كمية حجر الاسمنت المتبقية كبيرة (تشكل هدراً للمال؟) فسّر.

مسألة إضافية

- في أحد المهرجانات الرياضية، تقذف آلة كهربائية كراتاً إلى البعيد. تتغير المسافة التي تقطعها الكرة عكسياً مع وزنها.
أ) يريد عبدالله قذف الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ متراً بأقل وزن ممكن للكرة. وضع في الآلة كرة تزن ٢٠٠ جم فقذفها الآلة مسافة ١٢٠ م.
ب) ما الوزن المناسب لكي تقطع الكرة مسافة تزيد على ١٥٠ متراً؟

مخطط تنظيمي للوحدة الثالثة



ملخص

- النسبة هي مقارنة بين كميتين من النوع نفسه ويمكن تمثيلها بكسر .
- مقياس الرسم هو النسبة بين الطول على الخريطة والمسافة الحقيقية.
- التناسب هو تساوي نسبتين أو أكثر.
- إذا كان $\frac{أ}{ب} = \frac{ب}{ج}$ فإنه يقال إن الأعداد أ، ب، ج في تناسب متسلسل والعكس صحيح.
- بيان التغير الطردي هو دالة خطية تكتب بالصورة: $ص = ك س$ حيث $ك \neq ٠$ ، $ك$: ثابت التغير.
- في التغير الطردي: النسبة $\frac{ص}{س}$ ثابتة لكل زوج مرتب ($س \neq ٠$).
- إذا تغيرت كمية ص مع تغير كمية أخرى س بحيث كان حاصل ضرب الكميتين ثابتاً، فإن هذا التغير يسمى تغيراً عكسياً.
- في التغير العكسي: $س_١ \times ص_١ = س_٢ \times ص_٢$ أو $\frac{س_١}{ص_١} = \frac{س_٢}{ص_٢}$.
- حاصل الضرب هو ثابت التغير أي $س \times ص = ك$ (ثابت).

الهندسة المستوية Plane Geometry

مشروع الوحدة: هندسة الكسريات CTALS

١ مقدمة المشروع: خلال السنوات العشرين الأخيرة، تزايدت كثيرًا أهمية هندسة الكسريات fractal geometry كطريقة لوصف بعض ظواهر الحياة اليومية. استخدمت بعض الكسريات لوصف التكوينات الطبيعية مثل سلاسل الجبال والغيوم. في العام ١٩٠٤، وضع السويدي فون كوش (Von Kosh) منحنى استخدم لنمذجة السواحل. كثير من الأشكال تحتوي على أنماط تتكرر بمقاييس مختلفة مثل زهرة القرنبيط، حيث تهتم هندسة الكسريات بهذه الأشكال. ويعتبر عالم الرياضيات فون كوش من أهم الباحثين في هذا المجال.

٢ الهدف: دراسة الأشكال ذاتية التماثل التي تتغير.

٣ اللوازم: أوراق رسم بياني؛ حاسبة علمية أو حاسوب.

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ) ابحث عن الخصائص الثلاث المهمة للكسريات.

ب) ابحث عن العالم الرياضي فون كوش واعرض لبعض أعماله في

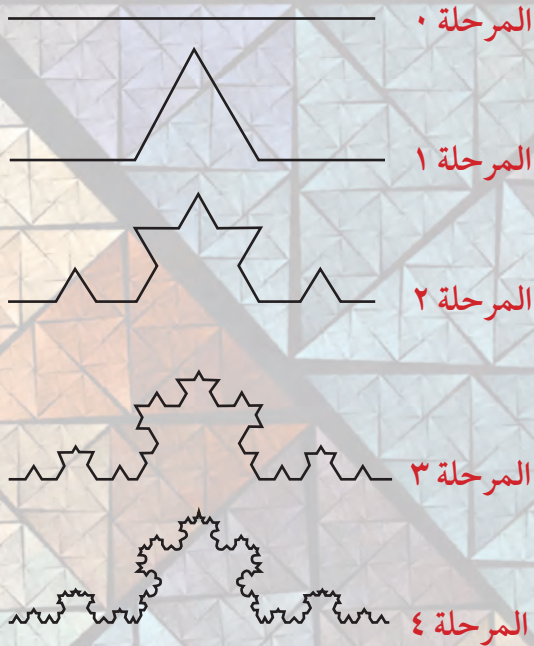
مجال الكسريات وخاصة «رقعة كوش» Koch snowflake

ج) طول القطعة المقابلة وحدة واحدة وتشكل المرحلة صفر من «منحنى كوش».

نفذ المراحل من ١ إلى ٤. في كل مرحلة، قسّم القطعة إلى ٣ قطع متطابقة واستبدل قطعة الوسط بقطعتين لهما القياس نفسه.

د) ارسم مثلثًا متطابق الأضلاع. عيّن نقطة المنتصف لكل ضلع. صل بين النقاط الثلاث. كرّر ذلك عدة مرات.

هـ) التقرير: ضع تقريرًا تبين فيه كيف نفذت المشروع وتجب عن الأسئلة.



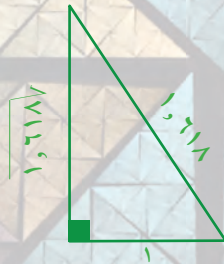
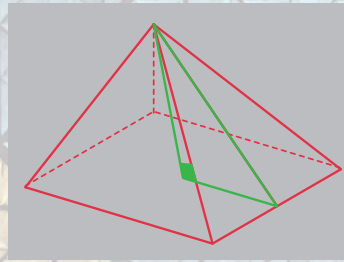
دروس الوحدة

المضلعات المتشابهة	تشابه المثلثات	التشابه في المثلثات قائمة الزاوية	التناسبات والمثلثات المتشابهة
١-٤	٢-٤	٣-٤	٤-٤

الوحدة الرابعة

أضف إلى معلوماتك

كان المصريون القدماء، على ما يبدو، على علم بوجود النسبة الذهبية وقد استخدموها في بناء بعض الأهرامات مثل الهرم الكبير في الجيزة (هرم خوفو).
في هرم خوفو، طول كل ارتفاع جانبي يساوي ١,٦١٨ مضروباً في نصف طول ضلع القاعدة.



أين أنت الآن (المعارف السابقة المكتسبة)

- تعلمت نظرية فيثاغورث وتطبيقاتها في المثلثات قائمة الزاوية.
- تعرفت على منصف الزاوية والمنصف العمودي للقطعة المستقيمة والقطعة المتوسطة في المثلث والعمود المرسوم من الرأس إلى الضلع المقابل في المثلث.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الأولى في متغيرين.
- تعلمت الحلول للمعادلات من الدرجة الثانية في متغير.
- تعرفت حلول المتباينات.
- تعرفت النسبة والتناسب.

ماذا سوف تتعلم؟

- التشابه: مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية وإيجاد مقياس رسم معين باستخدام التشابه وإيجاد النسبة الذهبية.
- حالات تشابه المثلثات والتطبيق في مواقف حياتية.
- تطبيق التشابه على المثلث قائم الزاوية والخصائص الناتجة من العمود المرسوم من رأس القائمة إلى الوتر المقابل.
- نظرية طاليس.
- خصائص منصف الزاوية الداخلي في المثلث.
- إدراك العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتهما.

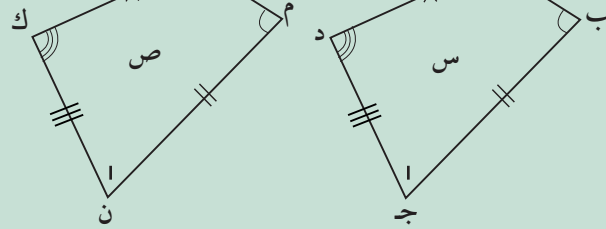
المصطلحات الأساسية

التشابه - مستطيل ذهبي - نظرية طاليس - عمود في المثلث - مساحة - مقياس رسم - نسبة ذهبية - منصف زاوية - محيط.

المضلعات المتشابهة Similar Polygons

دعنا نفكر ونتناقش

درسنا في ما سبق مفهوم تطابق المثلثات. بالنسبة إلى المضلعات، يكون المضلعان متطابقين إذا تحقق الشرطان التاليان معاً:

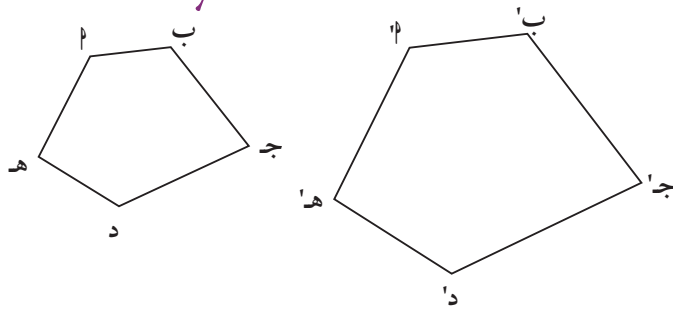


- أطوال أضلاعهما المتناظرة متساوية.
 - قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- في الشكل المرسوم:
المضلعان أ ب ج د، ل م ن ك متطابقان.

سوف نتعلم

- تحديد مفهوم التشابه بين الأشكال الهندسية المستوية
- تشابه مثلثين
- المستطيل الذهبي
- النسبة الذهبية

Similarity



١ - التشابه

يقال لشكلين هندسيين إنهما متشابهان إذا كان لهما الشكل العام نفسه وكان أحدهما تكبيراً أو تصغيراً للآخر أو مطابقاً له.

فكر معي: في ما يلي أجب بنعم أو لا.

وإذا كانت الإجابة (لا) أعط مثلاً مضاداً.



معلومة مفيدة:

في بعض الأحيان، لا يكون التخمين دائماً صحيحاً. يمكن إثبات أن تخميناً ما خطأ باستخدام مثال مضاد.

يكون المثال المضاد لتخمين معين طريقة لإثبات أن هذا التخمين هو خطأ.

يكفي إيجاد مثال مضاد واحد لإثبات أن تخميناً ما خطأ. فالقول أن الأعداد الأولية هي أعداد فردية صحيح لعدد لا متناهٍ من الأعداد. العدد ٢ هو أولي وزوجي (ليس عدداً فردياً) وهذا كافٍ لإثبات خطأ التخمين.

هل:

- كل مربعين متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقين الأضلاع متشابهان؟
- كل مثلثين متطابقين الضلعين متشابهان؟
- كل المثلثات قائمة الزاوية متشابهة؟



تعميم (١)

يقال لمضلعين (لهما العدد نفسه من الأضلاع) إنهما متشابهان إذا تحقق الشرطان التاليان معًا:

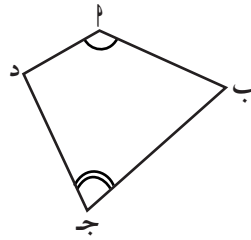
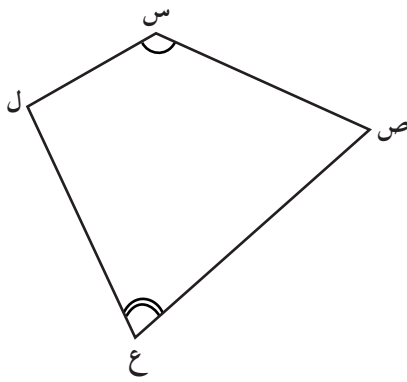
- قياسات زواياهما المتناظرة متساوية.
- أطوال أضلاعهما المتناظرة متناسبة.

والعكس صحيح.

وتسمى النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين **نسبة التشابه**.

تدريب (١)

أكمل:



إذا كان المضلعان أب ج د، س ص ع ل متشابهين فإن:

١ $\frac{ص}{س} = \frac{د}{ل} = \frac{ع}{ب} = \frac{ج}{م} = \dots$

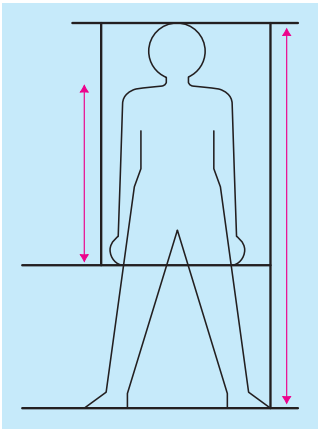
$\frac{ص}{س} = \frac{د}{ل} = \frac{ع}{ب} = \frac{ج}{م} = \dots$

٢ $\frac{ص}{س} = \frac{د}{ل} = \frac{ع}{ب} = \frac{ج}{م} = \dots$

تدريب (٢)

أجب عن الأسئلة التالية (أعط مثالاً مضاداً إذا كانت الإجابة لا):

٣ هل جميع المضلعات المنتظمة والتي لها العدد نفسه من الأضلاع متشابهة؟



٤ إذا نظرت إلى صورتك (الفوتوغرافية) هل النسبة بين طول ذراعك وطول ذراعك في الصورة تساوي النسبة بين طول جسمك وطول جسمك في الصورة؟

٥ هل النسبة بين طولي أي ضلعين متجاورين في مستطيل تساوي النسبة بين طولي ضلعين متجاورين مناظرين لهما في مستطيل آخر؟

تعميم (٢)

المضلعان المتطابقان يكونان متشابهين.

تذكر:

الرمز $\cong$ يعني تطابق

فمثلاً:

إذا كان المضلع أ ب ج د $\cong$ المضلع م ن ك ل فإن:

١ $\angle \hat{أ} = \angle \hat{م}$ ، $\angle \hat{ب} = \angle \hat{ن}$ ، $\angle \hat{د} = \angle \hat{ل}$

٢ $\frac{أ ب}{م ن} = \frac{ب ج}{ن ك} = \frac{ج د}{ك ل} = \frac{د ل}{ل م} = ١$

∴ المضلع أ ب ج د $\sim$ المضلع م ن ك ل

ومنه $\Delta أ ب ج \cong \Delta م ن ك$

ومنه $\Delta أ ب ج \sim \Delta م ن ك$.

ملاحظة:

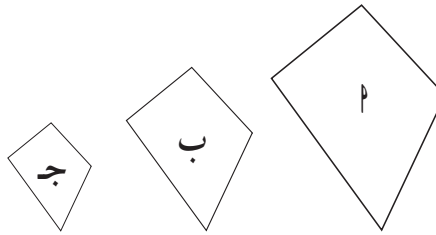
الرمز $\sim$ يعني تشابه

تعميم (٣)

إذا كان المضلع أ يشابه المضلع ب وكان المضلع ب يشابه المضلع ج، فإن المضلع أ يشابه المضلع ج.

أي أنه إذا كان: $أ \sim ب$ ، $ب \sim ج$

فإن $أ \sim ج$



مثال (١)

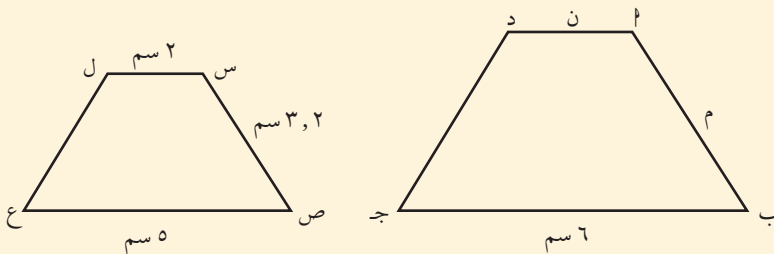
في الشكل المقابل: إذا كان أ ب ج د $\sim$ س ص ع ل، أوجد قيمة ن، م.

المعطيات: أ ب ج د، س ص ع ل متشابهين.

أد = ن، ب ج = ٦ سم، ص ع = ٥ سم،

ص س = ٢، ٣ سم، س ل = ٢ سم

المطلوب: إيجاد قيمة ن، م.



البرهان:

المضلع أ ب ج د ~ س ص ع ل.

$$\therefore \frac{أ ب}{س ص} = \frac{ب ج}{ص ع} = \frac{ج د}{ع ل} = \frac{د أ}{ل س}$$

$$\text{ومنه: } \frac{ن}{٢} = \frac{ج د}{ع ل} = \frac{٦}{٥} = \frac{٢}{٣,٢}$$

$$\frac{٦}{٥} = \frac{ن}{٢} \therefore ن = ٢,٤ \text{ سم}$$

$$\frac{٦}{٥} = \frac{٢}{٣,٢} \therefore م = ٣,٨٤ \text{ سم}$$

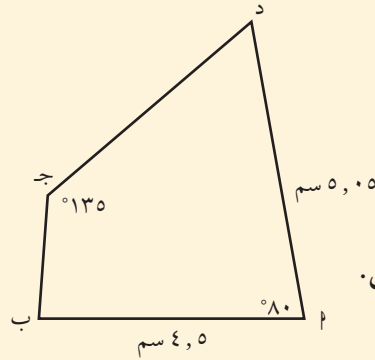
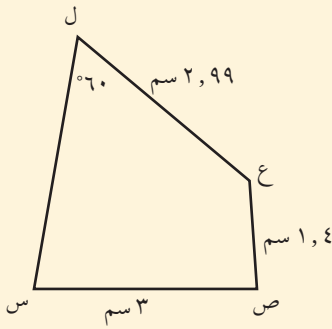
حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، المضلعان أ ب ج د،

س ص ع ل متشابهان.

أوجد قياسات الزوايا المجهولة

وأطوال الأضلاع المجهولة في كلا المضلعين.



مثال (٢)

حدّد فيما إذا كان المثلثان أ ب ج، ل م ن متشابهين.

إذا كان المثلثان متشابهين،

اكتب قاعدة التشابه ونسبة التشابه.

البرهان:

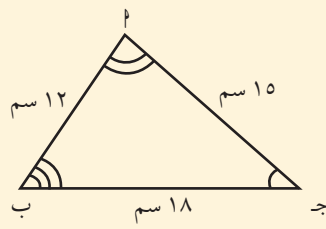
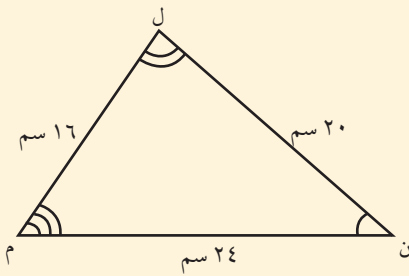
من المعطيات في الشكل: الزوايا المتناظرة متطابقة. (١)

بمقارنة أطوال الأضلاع المتناظرة نجد أن:

$$\frac{أ ب}{ل م} = \frac{١٢}{١٦} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{ب ج}{م ن} = \frac{١٨}{٢٤} = \frac{٣}{٤}$$

$$\frac{ج د}{ن ل} = \frac{١٥}{٢٠} = \frac{٣}{٤}$$



أي أن:

$$\frac{أب}{ل م} = \frac{ب ج}{م ن} = \frac{ج د}{ن ل} = \frac{د ه}{ل م}$$

بالتالي:

أطوال الأضلاع المتناظرة متناسبة. (٢)

من (١)، (٢) يتبين أن:

$$\Delta أ ب ج \sim \Delta ل م ن، \text{ وأن نسبة التشابه } \frac{٣}{٤}.$$

$$\text{كذلك نسبة التشابه } \frac{٤}{٣}$$

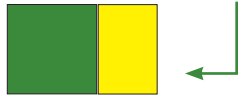
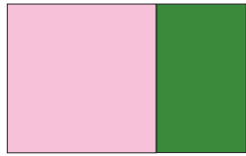
حاول أن تحل

٢ المثلثان أ ب ج، د ه و فيهما:

$$\hat{أ} = \hat{ل}، \hat{ب} = \hat{م}، \hat{ج} = \hat{ن}، \hat{د} = \hat{ل}، \hat{ه} = \hat{م}، \hat{و} = \hat{ن}$$

أ ب = ١٢ سم، ب ج = ١٤ سم، أ ج = ١٦ سم، د ه = ١٨ سم، ه و = ٢١ سم، د و = ٢٤ سم.
هل يمكنك استنتاج أن المثلثين متشابهان؟ وضح إجابتك.

ملاحظة مهمة: إن نسبة التشابه تقارن بين قياسين بالوحدات نفسها، فمثلاً أطوال أضلاع المثلثين في المثال (٢) هي بالسنتيمتر.



Golden Rectangle

المستطيل الذهبي

هو مستطيل يمكن تقسيمه إلى جزئين، أحدهما مربع والآخر مستطيل.
والمستطيل الناتج يكون مستطيلاً ذهبياً آخر ويكون مشابهاً للمستطيل الأصلي.

يبين الشكل المقابل نمطاً من المستطيلات الذهبية.

Golden Ratio

النسبة الذهبية

في كل مستطيل ذهبي، نسبة طول الضلع الأكبر إلى طول الضلع الأصغر

تسمى النسبة الذهبية وتساوي $\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ أي حوالي ١,٦١٨، ١:١.

مثال (٣)

استخدم المستطيل الذهبي المقابل والتناسب لإيجاد النسبة الذهبية.

الحل:

∴ المستطيل ^١ هو مستطيل ذهبي وتم تقسيمه إلى مربع ومستطيل ب.

∴ المستطيل ب مستطيل ذهبي

∴ المستطيل ^٢ ~ المستطيل ب.

$$\therefore \frac{\text{طول المستطيل } ١}{\text{عرض المستطيل } ١} = \frac{\text{طول المستطيل ب}}{\text{عرض المستطيل ب}} = \text{النسبة الذهبية}$$

ليكن س = طول المستطيل ^١.

س - ١ = عرض المستطيل ب.

$$\text{نحصل على } \frac{س}{١-س} = ١$$

$$\therefore س - ٢ = س - ١ = ١$$

$$س - ٢ = س - ١ = ٠$$

نستخدم القانون لحل المعادلة التربيعية.

$$\text{المميز} = ب - ٢ = ٤ - ٥ = -١$$

$$\therefore س = \frac{٥ \pm \sqrt{٥ - ١}}{٢} \text{ أو } س = \frac{٥ - \sqrt{٥ - ١}}{٢} \text{ مرفوضة}$$

$$س \approx ١,٦١٨$$

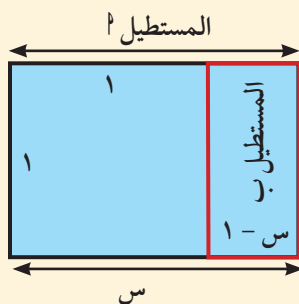
$$\text{أي أن النسبة الذهبية هي } ١ : \frac{٥ + \sqrt{٥ - ١}}{٢}$$

$$\text{أو حوالى } ١ : ١,٦١٨$$

حاول أن تحل

٣ قطعة نقدية ورقية مستطيلة الشكل أبعادها ١٠ سم، ٥ سم، ٦ سم.

هل نسبة طولها إلى عرضها تساوي النسبة الذهبية؟

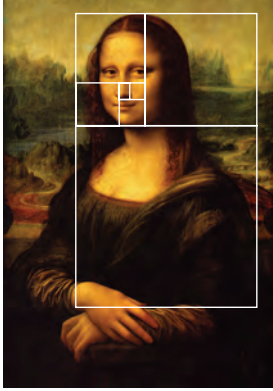


معلومة رياضية:

في أي مستطيل، البعد الأقصر يسمى العرض والبعد الأطول يسمى الطول.

هل تعلم:

العدد الذهبي يساوي تقريباً ١,٦١٨



لوحة موناليزا

التحدي: إذا كان العدد الذهبي ϕ هو الجذر الموجب للمعادلة التربيعية $\phi^2 = \phi + 1$

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \dots}}}$$

استخدم الرسامون كثيرًا المستطيل الذهبي في أعمالهم.

مثال (٤) تطبيقات حياتية

يخطط أحد الفنانين لرسم لوحة مستطيلة الشكل طولها ٦٠ سم. كم يجب أن يكون عرض اللوحة ليكون المستطيل ذهبيًا؟
(علمًا بأن النسبة الذهبية $\phi \approx 1.618$)

الحل:

حتى تكون اللوحة على شكل مستطيل ذهبي يجب أن يكون:

$$\frac{\text{طول اللوحة}}{\text{عرض اللوحة}} = \phi \approx 1.618$$

ليكن ه عرض اللوحة.

$$\frac{1.618}{1} \approx \frac{60}{h}$$

$$1.618 \approx \frac{60}{h}$$

$$\frac{60}{1.618} \approx h$$

$$h \approx 37$$

يجب أن يكون عرض اللوحة حوالي ٣٧ سم.

حاول أن تحل

٤ إذا كان عرض أحد المستطيلات الذهبية ٦٠ سم، فكم يجب أن يكون طوله؟



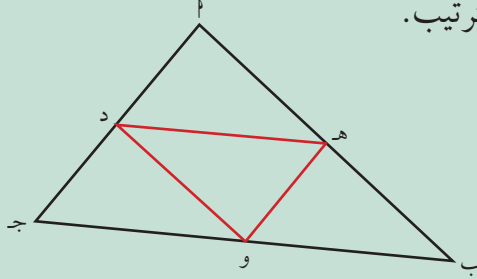
كتابة التناسب
الضرب التقاطعي

تشابه المثلثات

Similar Triangles

سوف تتعلم

- حالات تشابه المثلثات



دعنا نفكر ونتناقش

في المثلث $\triangle ABC$: هـ، د، و منتصفات $\overline{AB}$ ، $\overline{AC}$ ، $\overline{BC}$ على الترتيب.

١ هل قياسات زوايا المثلثين $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ متساوية؟

٢ هل أطوال أضلاع المثلثين $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ متناسبة؟

إذا كانت إجابتك نعم، فما قيمة هذه النسبة.

٣ برهن أن المثلثات $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ دج و، هـ و ب، هـ و د متطابقة.

٤ هل برأيك، المثلث $\triangle DEF$ هو تصغير للمثلث $\triangle ABC$ ؟ وهل هما متشابهان؟

سبق أن تعلمت عدة طرائق تبين بها تطابق مثلثين.

في أي مثلثين متشابهين تكون قياسات الزوايا المتناظرة متساوية،

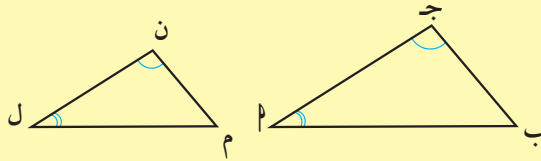
والنسب بين طولي كل ضلعين متناظرين متساوية؟

النظريات التالية تبين أن توفر أحد الشرطين يكفي لإثبات أن المثلثين متشابهان حيث إن الشرط الآخر سيكون محققاً أيضاً.

نظرية (١)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاويتان في أحد المثلثين مع زاويتين في المثلث الآخر.

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$ م ن.



مثال (١)

في الشكل المقابل $\triangle ABC$ ، ع ل د مثلثان، فإذا كان:

$$\angle A = 85^\circ, \angle B = 50^\circ, \angle C = 45^\circ$$

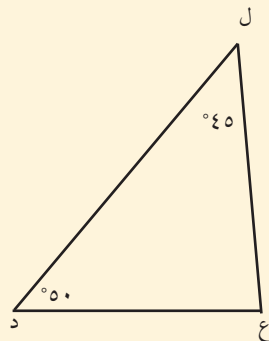
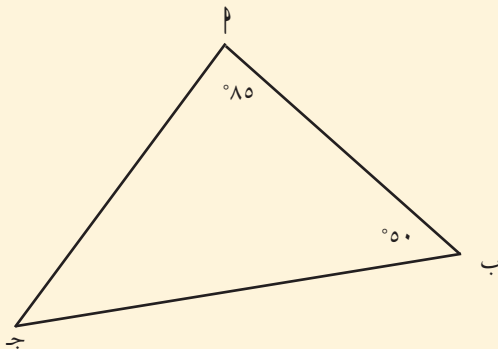
$$\angle D = 85^\circ, \angle E = 50^\circ, \angle F = 45^\circ$$

أثبت تشابه المثلثين $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$.

المعطيات:

$$\angle A = 85^\circ, \angle B = 50^\circ, \angle C = 45^\circ$$

$$\angle D = 85^\circ, \angle E = 50^\circ, \angle F = 45^\circ$$



من الاستخدامات:

يستخدم منفذو الحفر على المفروشات الخشبية التشابه بين المثلثات لوضع تصاميم لأعمالهم قبل تنفيذها.



المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين $\triangle ب ج د$.

البرهان: في المثلثين $\triangle ب ج د$:

$$\angle ب = \angle د = 50^\circ$$

$$\angle ج = 180^\circ - (85^\circ + 50^\circ)$$

$$= 180^\circ - 135^\circ = 45^\circ$$

$$\therefore \angle ج = \angle ل$$

من (١)، (٢)، نستنتج أن المثلثين $\triangle ب ج د$ ، $\triangle ل ج د$ متشابهان أي أن $\triangle ب ج د \sim \triangle ل ج د$.

حاول أن تحل

١ المثلث $\triangle ب ج د$ قائم الزاوية $\angle ب = 55^\circ$.

المثلث $\triangle م ل ح$ قائم الزاوية $\angle ل = 35^\circ$.

أثبت تشابه المثلثين $\triangle ب ج د$ ، $\triangle م ل ح$.

مثال (٢)

أثبت أن المثلثين في الشكل المقابل متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

الحل:

المعطيات:

$\triangle ب ج د$ ، $\triangle د ه ج$ فيهما:

$$\angle ب = 70^\circ، \angle د = 70^\circ$$

$\angle ج$ ، $\angle ه ج د$ متقابلتان بالرأس

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين $\triangle ب ج د$ ، $\triangle د ه ج$ ، وكتابة عبارة التشابه.

البرهان: المثلثان $\triangle ب ج د$ ، $\triangle د ه ج$ فيهما:

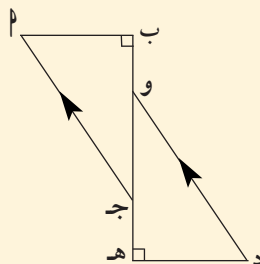
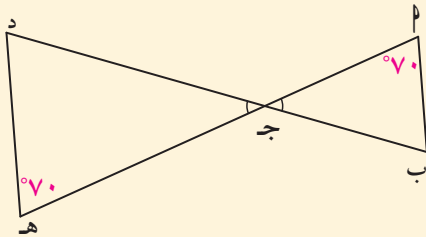
$$\angle ب = \angle د$$

$$\angle ج = \angle ه ج د$$

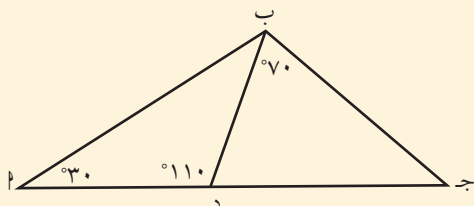
$\therefore \triangle ب ج د \sim \triangle د ه ج$ (المثلثان متشابهان) نظرية (١)

حاول أن تحل

٢ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين $\triangle ب ج د$ ، $\triangle د ه و$.



مثال (٣)



أثبت أن المثلثين $\triangle ABD$ ، $\triangle BDC$ متشابهان. اكتب عبارة التشابه.

المعطيات:

في الشكل:

$$\angle ABD = 70^\circ, \angle BDC = 110^\circ, \angle BAC = 30^\circ$$

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين $\triangle ABD$ ، $\triangle BDC$.

البرهان:

المثلثان $\triangle ABD$ ، $\triangle BDC$ لهما:

زاوية مشتركة

$$\angle ABD = \angle BDC = 70^\circ$$

$$\angle BDC = 110^\circ = 180^\circ - (\angle ABD + \angle BAC) = 180^\circ - (70^\circ + 30^\circ) = 80^\circ$$

$$\angle BDC = 80^\circ = 70^\circ + 10^\circ = \angle ABD + \angle BAC$$

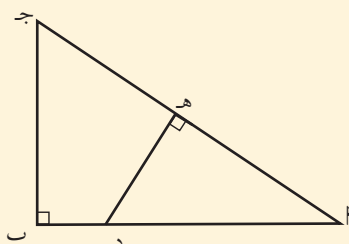
$$\therefore \angle BDC = \angle ABD + \angle BAC$$

(تطابق زاويتين)

المثلثان متشابهان

$$\triangle ABD \sim \triangle BDC$$

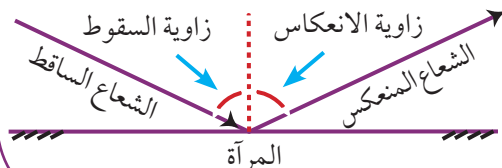
حاول أن تحل



٣ في الشكل المقابل، أثبت تشابه المثلثين $\triangle ABD$ ، $\triangle BDC$ ، و اكتب عبارة التشابه.

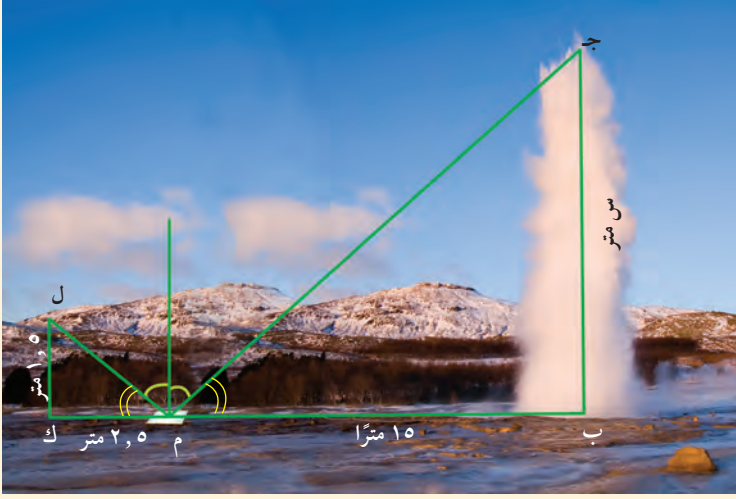
تذكر:

قياس زاوية السقوط =
قياس زاوية الانعكاس



في بعض الحالات، يصعب قياس مسافة أو ارتفاع معين مباشرة. في هذه الحالة، يمكنك استخدام تشابه المثلثات لإيجاد هذا القياس بطريقة غير مباشرة. إحدى الطرائق تستخدم خاصية انعكاس الضوء في المرآة المستوية. فكما تعرف في الفيزياء، إن قياس زاوية السقوط يساوي قياس زاوية الانعكاس.

مثال (٤) (إثرائي)



أراد سعيد أن يعرف ارتفاع المياه. وضع مرآة على مسافة ١٥ مترًا من موقع اندفاع المياه، ثم تحرك إلى الخلف حتى استطاع أن يرى أعلى نقطة بلغت المياه في وسط المرآة. عند هذه النقطة كان سعيد قد تحرك بعيدًا عن المرآة بمسافة ٢,٥ متر، وكانت عيناه على ارتفاع ١,٥ متر فوق الأرض. إذا كانت قدماء والمرآة وموقع اندفاع المياه على استقامة واحدة، فأوجد ارتفاع المياه المعطيات:

م ب = ١٥ مترًا، م ك = ٢,٥ متر، ك ل = ١,٥ متر
قدما سعيد، المرآة، موقع اندفاع المياه على استقامة واحدة.

المطلوب: معرفة ارتفاع المياه.

البرهان:

المثلثان م ب ج، م ك ل فيهما:

$$\angle (ب م ج) = \angle (ك م ل)$$

$$\angle (ب) = \angle (ك) = 90^\circ$$

المثلثان م ب ج، م ك ل متشابهان (تطابق زاويتين)

تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة

$$\therefore \frac{ب ج}{م ك} = \frac{ب م}{ك ل}$$

$$\frac{١٥}{٢,٥} = \frac{س}{١,٥}$$

$$١٥ \times ١,٥ = ٢,٥ \times س$$

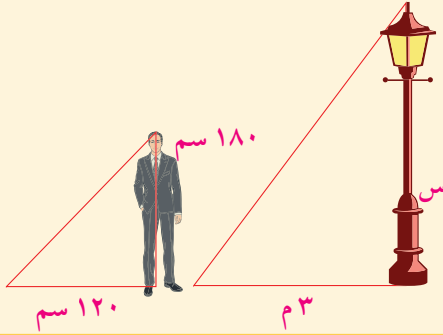
$$٩ = \frac{١٥ \times ١,٥}{٢,٥} = س$$

يبلغ ارتفاع المياه ٩ أمتار.

حاول أن تحل

- ٤ أ لإيجاد ارتفاع برج، وضع سالم مرآة مستوية على الأرض على بعد ١٢ مترًا من قاعدة البرج. وعندما كان سالم على بعد ١,٢ متر من المرآة استطاع أن يرى قمة البرج. إذا كان ارتفاع عين سالم عن الأرض ١,٨ متر في هذه النقطة، فكم يكون ارتفاع البرج؟ (علمًا بأن قاعدة البرج وقدمي سالم والمرآة على استقامة واحدة).

ب) عمود طول ظله ٣ م في الوقت نفسه الذي يكون فيه طول ظل محمد ١٢٠ سم. إذا كان طول محمد ١٨٠ سم، فكم سيكون طول العمود؟



نظرية (٢)

يتشابه المثلثان إذا تناسبت أطوال الأضلاع المتناظرة فيهما.

المعطيات: Δ أ ب ج، Δ م ك ل فيهما:

$$\frac{أ ب}{م ك} = \frac{أ ج}{م ل} = \frac{ب ج}{ك ل}$$

المطلوب: إثبات أن Δ أ ب ج $\sim$ Δ م ك ل.

العمل:

نأخذ س $\exists$ م ك حيث م س = أ ب ونرسم س ص // ل ك.

$\therefore \Delta$ م س ص، Δ م ك ل متشابهان. لماذا؟ (١)

تناسب الأضلاع المتناظرة

$$\frac{م س}{م ك} = \frac{م ص}{م ل} = \frac{س ص}{ك ل}$$

معطى

$$\frac{أ ب}{م ك} = \frac{أ ج}{م ل} = \frac{ب ج}{ك ل}$$

$$\frac{أ ب}{م ك} = \frac{م س}{م ك} \text{ إذا } أ ب = م س$$

$$\text{ومنه } \frac{م ص}{م ل} = \frac{أ ج}{م ل}, \frac{س ص}{ك ل} = \frac{ب ج}{ك ل}$$

تساوي التناسيب

م ص = أ ب، س ص = ب ج. لماذا؟

Δ م س ص، Δ أ ب ج متطابقان. (ض. ض. ض) فهما متشابهان (٢)

من (١)، (٢)

$\therefore \Delta$ أ ب ج $\sim$ Δ م ك ل وهو المطلوب.

لاحظ أن:

$$\hat{أ} = \hat{م}, \hat{ب} = \hat{ك}, \hat{ج} = \hat{ل}, \hat{أ} = \hat{م}, \hat{ب} = \hat{ك}, \hat{ج} = \hat{ل}$$

مثال (٥)

في الشكل المقابل، **أ** أثبت تشابه المثلثين $\triangle ج، م، ر$ ،
ب اكتب أزواج الزوايا متساوية القياس.

المعطيات:

$\triangle ج، م، ر$: $ج = ٥$ سم، $م = ٣$ سم، $ر = ٤$ سم
 $\triangle د، ب، ر$: $د = ٧$ سم، $ب = ٦$ سم، $ر = ٤$ سم

المطلوب:

أ إثبات تشابه المثلثين $\triangle ج، م، ر$.

ب كتابة أزواج الزوايا متساوية القياس.

البرهان:

$$(١) \quad \frac{ج}{م} = \frac{٥}{٣} = \frac{٣}{٤} = \frac{ر}{٤}$$

$$(٢) \quad \frac{ج}{ر} = \frac{٥}{٤} = \frac{٣}{٤} = \frac{م}{٤}$$

$$(٣) \quad \frac{ج}{م} = \frac{٥}{٣} = \frac{٣}{٤} = \frac{ر}{٤}$$

من (١)، (٢)، (٣) نستنتج أن $\frac{ج}{م} = \frac{م}{ر} = \frac{ر}{٤}$ ،
 $\therefore$ المثلثان متشابهان أي أن $\triangle ج، م، ر \sim \triangle د، ب، ر$.

ب $\hat{ج}$ هي الزاوية المقابلة للضلع $\overline{ج، م}$ ، $\hat{د}$ هي الزاوية المقابلة للضلع $\overline{د، ب}$.
 $\therefore \hat{ج} = \hat{د}$

الزاوية $\hat{م}$ مقابلة للضلع $\overline{ج، ر}$ ، الزاوية $\hat{ب}$ مقابلة للضلع $\overline{د، ر}$.
 $\therefore \hat{م} = \hat{ب}$

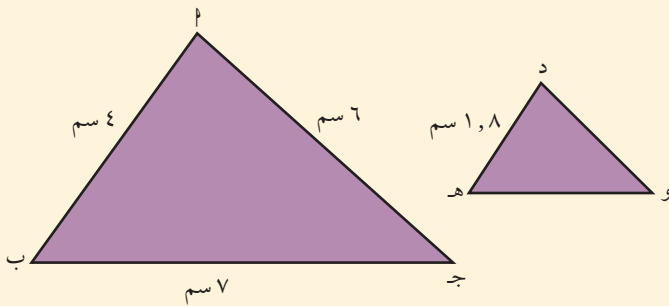
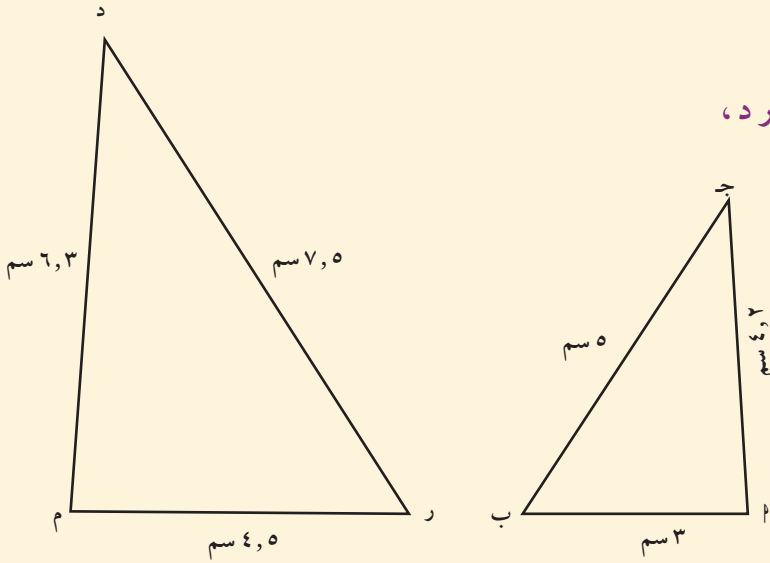
ويبقى: $\hat{ر} = \hat{ر}$

$\hat{ج} = \hat{د}$ ، $\hat{م} = \hat{ب}$ ، $\hat{ر} = \hat{ر}$

حاول أن تحل

٥ في الشكل المقابل المثلثان $\triangle ج، د، هـ$ ومتشابهان.

أوجد طول كل من $\overline{دو}$ ، و $\overline{وهـ}$.



مثال (٦)

في الشكل المرسوم،

أولاً: أثبت أن:

أ) $\Delta \text{أب ج} \sim \Delta \text{م ن}$.

ب) $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{م ن}}$.

ثانياً: أوجد النسبة بين محيطي المثلثين. ماذا تلاحظ؟

المعطيات:

$\text{أ} \text{م} = ٦, ٣$ ، $\text{أ} \text{ن} = ٧$ ، $\text{م ن} = ١٠, ٥$ ، $\text{م ب} = ٢, ٧$ ، $\text{ن ج} = ٣$ ، $\text{ب ج} = ١٥$

أولاً: المطلوب: أ) إثبات تشابه المثلثين $\Delta \text{أب ج}$ ، $\Delta \text{م ن}$. ب) $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{م ن}}$.

البرهان: أ) $\frac{\text{أب}}{\text{أ} \text{ب}} = \frac{٦, ٣}{٢, ٧ + ٦, ٣} = \frac{٦, ٣}{٩} = \frac{٢, ٣}{٣} = \frac{\text{أ} \text{ن}}{\text{أ} \text{م}} = \frac{٧}{١٠, ٥} = \frac{١, ٤}{١, ٥}$ ، $\dots = \frac{\text{م ن}}{\text{ب ج}} = \dots$ ماذا تلاحظ؟

استخدم نظرية (٢). $\Delta \text{أب ج} \sim \Delta \text{م ن}$ وهو المطلوب (أ).

ب) من تشابه المثلثين: $\widehat{\text{أ}} = \widehat{\text{م}}$ و $\widehat{\text{ب}} = \widehat{\text{ن}}$ وهما في وضع تناظر.

$\therefore \overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{م ن}}$.

ثانياً: المطلوب: إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين $\Delta \text{أب ج}$ ، $\Delta \text{م ن}$.

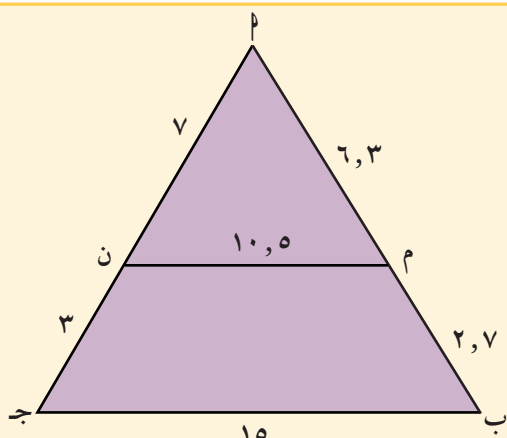
البرهان: $\frac{\text{محيط } \Delta \text{م ن}}{\text{محيط } \Delta \text{أب ج}} = \frac{٢٣, ٨}{٣٤} = \frac{١, ٤}{١, ٥}$ ، $\dots$

نلاحظ أن النسبة بين محيطي المثلثين تساوي نسبة التشابه.

حاول أن تحل

٦ في الشكل المقابل، أثبت أن المثلثين متشابهان.

ثم أوجد العلاقة بين نسبة مساحتي المثلثين ونسبة التشابه.



معلومة:

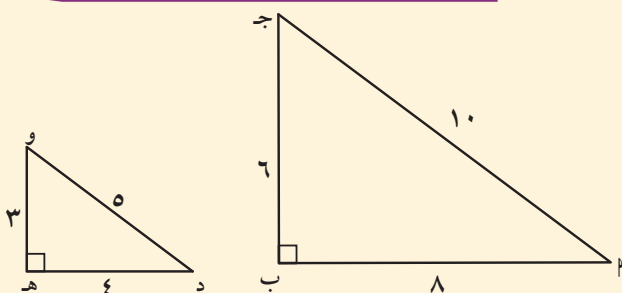
في أي شكلين متشابهين:

النسبة بين المحيطين = نسبة التشابه

النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه

نسبة التشابه بين محيطي دائرتين تساوي

النسبة بين طولي نصف قطري الدائرتين.



تطبيقات حياتية

مثال (٧)

يبين الشكل المقابل قسمًا من المنطقة العلوية في أحد الأهرات (مخازن الحبوب). أراد يوسف التحقق من توازي الدعامتين

ب ج، د هـ. هل يمكنك مساعدته؟

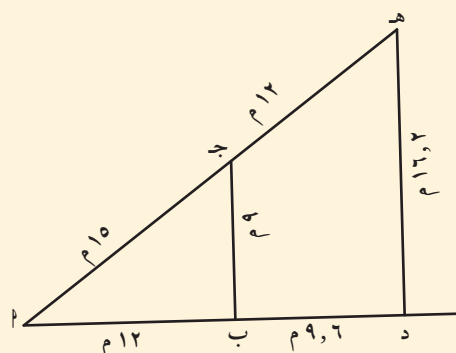
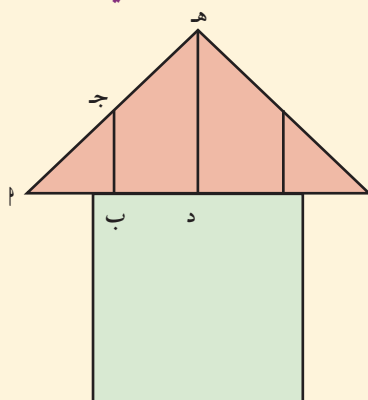
المعطيات: أ، ب، د على استقامة واحدة.

أ، ج، هـ على استقامة واحدة.

أب = ١٢ م، ب د = ٩ م، ب ج = ٩ م،

د هـ = ١٦ م، أ ج = ١٥ م، ج هـ = ١٢ م.

المطلوب: إثبات أن $\overline{\text{ب ج}} \parallel \overline{\text{د هـ}}$.



البرهان: Δ أ ب ج ، Δ د ه فيهما:

$$\frac{أ ب}{أ د} = \frac{١٢}{٩, ٦ + ١٢} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{أ ب}{أ د} = \frac{١٥}{١٢ + ١٥} = \frac{٥}{٩}$$

$$\frac{ب ج}{د ه} = \frac{٩}{١٦, ٢} = \frac{٥}{٩}$$

∴ المثلثان متشابهان (نظرية ٢)

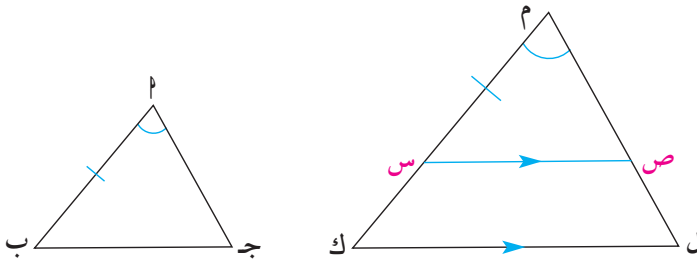
الزاويتان $\hat{أ ب ج}$ ، $\hat{أ د ه}$ متناظرتان ومتساويتان في القياس إذا $\overline{أ ب} \parallel \overline{د ه}$.

حاول أن تحل

٧ في المثال (٧)، أثبت أن Δ أ ب ج قائم الزاوية ب ثم أوجد قياس الزاوية أ.

نظرية (٣)

يتشابه المثلثان إذا تطابقت زاوية في أحدهما مع زاوية في المثلث الآخر، وتناسب طولوا الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين.



المعطيات: $\hat{أ} = \hat{م}$ ، $\frac{أ ب}{أ ج} = \frac{م ن}{م ل}$

المطلوب: إثبات أن: Δ أ ب ج $\sim \Delta$ م ن ل

العمل: نأخذ $\overline{س س} \parallel \overline{أ ب}$ حيث $\overline{س س} \parallel \overline{أ ب}$ ونرسم $\overline{س س} \parallel \overline{أ ب}$.

البرهان: نبدأ بإثبات تشابه Δ م ن ل ، Δ م ن ل.

∴ $\overline{س س} \parallel \overline{أ ب}$

∴ $\hat{أ} = \hat{م}$ ، $\hat{ب} = \hat{ن}$ زاويتان بالتوازي والتناظر،

$\hat{س} = \hat{ل}$ زاويتان بالتوازي والتناظر.

وبالتالي من نظرية (١) نستنتج أن: Δ م ن ل $\sim \Delta$ م ن ل متشابهان.

تناسب أطوال الأضلاع المتناظرة.

$$\frac{م ن}{م ل} = \frac{س ن}{س ل} \quad (١)$$

سببت الآن أن Δ أ ب ج ، Δ م ن ل متطابقان.

$$\frac{أ ب}{أ ج} = \frac{م ن}{م ل} \quad (٢)$$

بما أن $\overline{أ ب} = \overline{م ن}$ وبمقارنة التناسيب (١)، (٢) نحصل على $\overline{أ ج} = \overline{م ل}$.

∴ Δ أ ب ج ، Δ م ن ل متطابقان (ض. ز. ض.) فهما متشابهان.

Δ أ ب ج $\sim \Delta$ م ن ل ، Δ م ن ل $\sim \Delta$ م ن ل. ∴ Δ أ ب ج $\sim \Delta$ م ن ل.

معلومة مفيدة:

عندما نقول (بالتوازي والتناظر) نعني وجود مستقيمين متوازيين وقاطع لهما، وزاويتان في وضع تناظر.

مثال (٨)

في الشكل المقابل أ ب ج، ن ه م مثلثان، فإذا كان:

$$\angle \hat{P} = \angle \hat{N} = 50^\circ$$

أ ب = ٩ سم، أ ج = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، ن ه = ٣ سم.

أثبت تشابه المثلثين أ ب ج، ن ه م.

المعطيات:

$$\angle \hat{P} = \angle \hat{N} = 50^\circ$$

أ ب = ٩ سم، أ ج = ١٢ سم، م ن = ٤ سم، ن ه = ٣ سم

المطلوب:

إثبات تشابه المثلثين أ ب ج، ن ه م.

البرهان:

المثلثان أ ب ج، ن ه م فيهما

(معطى) (١)

$$\angle \hat{P} = \angle \hat{N} = 50^\circ$$

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{ن ه}} = \frac{9}{3} = 3$$

$$\frac{\text{أ ج}}{\text{م ن}} = \frac{12}{4} = 3$$

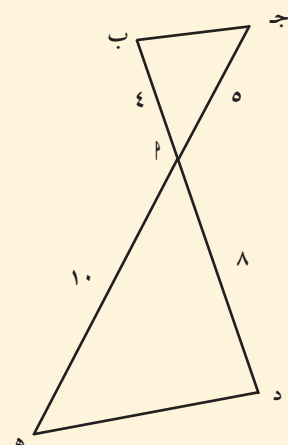
$$\therefore \frac{\text{أ ب}}{\text{ن ه}} = \frac{\text{أ ج}}{\text{م ن}}$$

(٢)

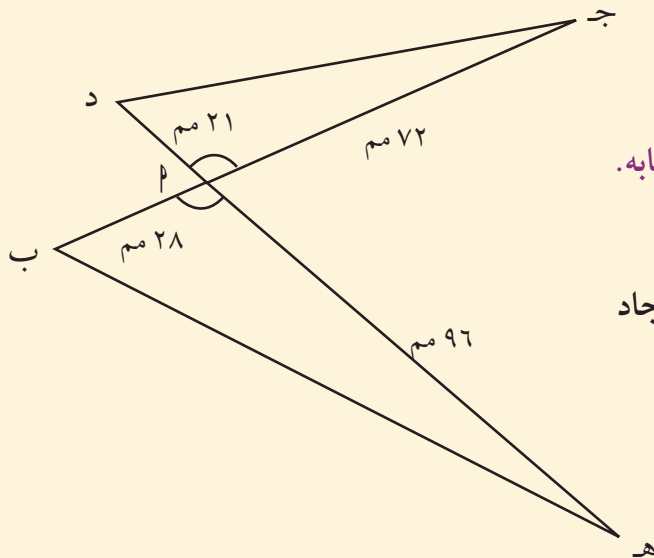
من (١)، (٢) نستنتج أن المثلثين أ ب ج، ن ه م متشابهان.

حاول أن تحل

٨ في الشكل المقابل ب د $\cap$ ج ه = {م}، أثبت أن المثلثين أ ب ج، أ د ه متشابهان.



مثال (۹)



في الشكل المقابل هـ ب، ا ج د مثلثان. فإذا كان

له = ۹۶ مم، اب = ۲۸ مم، ج = ۷۲ مم، د = ۲۱ مم

أثبت أن المثلثين $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ متشابهان، وأوجد نسبة التشابه.

المعطيات: $h = 96$ مم، $b = 28$ مم.

۲ ج = ۷۲ مم، ۲ د = ۲۱ مم.

المطلوب: إثبات أن المثلثين: $\triangle ABC$ ، $\triangle DEF$ متشابهان، وإيجاد

نسبة التشابه.

البرهان: $\mathcal{U}(\hat{J}^A_D) = \mathcal{U}(\hat{H}^A_B)$ معطى

$$\frac{۳}{۴} = \frac{۲۵}{۱۰۰} = \frac{ج۲}{ه۲}$$

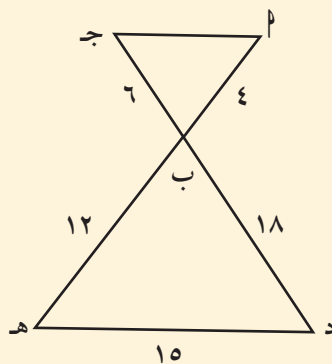
∴ المثلثان متشابهان. نسبة التشابه: $\frac{3}{4}$ أو $\frac{4}{3}$.

حاول أن تحل

٩ في المثلثين $\triangle$ ب ج، ف دي: $\triangle$ ب = ٧ سم، ب ج = ٦ سم، $\angle$ ب = 63° .

دي = ٤, ٥ سم، $\hat{D} = ٦٣^\circ$ ، ف د = ٣, ٦ سم. هل المثلثان أ ب ج، د ي ف متشابهان؟

مثال (۱۰)



في الشكل $\overline{ah} \cap \overline{jd} = \{b\}$ ، برهن أن: **أ** $\overline{aj} // \overline{dh}$. **ب** أوجد طول $\overline{aj}$.

المعطيات: أ، ب، هـ على استقامة واحدة. ج، ب، د على استقامة واحدة.

ا ب = ۴، ب ه = ۱۲، ب ج = ۶، ب د = ۱۸، د ه = ۱۵.

المطلوب: أ إثبات توازي $\overline{AC}$ ، $\overline{DE}$.
 ب إيجاد طول $\overline{AC}$.

البرهان: ① $\mathcal{U}(\hat{A} \hat{B} \hat{C}) = \mathcal{U}(\hat{A} \hat{B} \hat{D})$

$$\frac{۱}{۳} = \frac{ب}{هـ} = \frac{ج}{د}$$

∴ المثلثان متشابهان ومنه نستنتج أن الزوايا المتناظرة متساوية القياس.

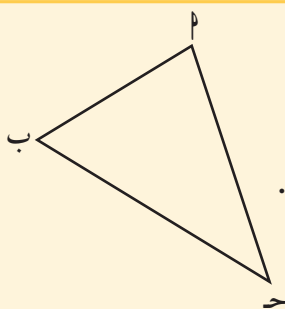
وبالتالى $\text{ج} = \text{ج}(\text{ج})$ وهما فى وضع تبادل. إذا ج / / ده.

ب) لإيجاد طول $\overline{أج}$ نكتب تناسب: $\frac{أج}{ده} = \frac{١}{٣}$

$$\frac{1}{2} = \frac{\text{أب}}{15}$$

$$5 = \frac{15}{3} = 5 \text{ ج}$$

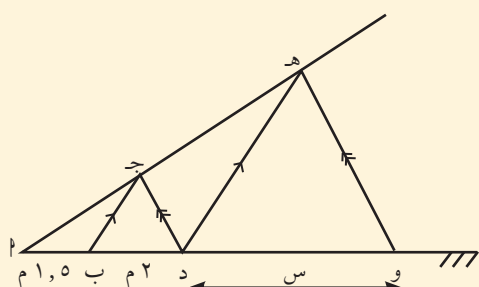
حاول أن تحل



١٠ ارسم بشكل تقريبي د هـ في المثلث ب ج د توازي ب ج حيث د تنتمي إلى بـج، هـ تنتمي إلى بـج على أن تكون نسبة التشابه بين المثلثين ب ج د هـ، ب ج د تساوي $\frac{2}{3}$.

مثال (١١) تطبيقات حياتية

يبين الرسم المقابل حلبة منحدر مدعّمة تستخدم في لعبة التزلج (سكيت بورد Skateboard). إذا كان ب ج د هـ، د ج // د هـ، أوجد قيمة س.



حيث ب، د، و على استقامة واحدة، ج، هـ على استقامة واحدة. المعطيات: ب ج د هـ، د ج // د هـ، ب د = ٢ م، ب ج = ١,٥ م، د و = س.

المطلوب: إيجاد س.

البرهان: المثلثان ب ج د، د هـ فيهما:

$$\angle \text{ب ج د} = \angle \text{د هـ ج} \quad (\text{زاوية مشتركة})$$

$$\angle \text{ب د ج} = \angle \text{د هـ ج} \quad (\text{زاوية متناظرة بالتوازي})$$

$$\therefore \triangle \text{ب ج د} \sim \triangle \text{د هـ ج}$$

$$\text{ومنه } \frac{\text{ب ج}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$$

$$(١) \quad \frac{\text{ب ج}}{\text{د هـ}} = \frac{١,٥}{٢ + ١,٥}$$

نثبت بالطريقة نفسها أن المثلثين ب ج د، د هـ متشابهان.

$$\text{ومنه } \frac{\text{ب ج}}{\text{د هـ}} = \frac{\text{ب د}}{\text{د ج}}$$

$$(٢) \quad \frac{\text{ب ج}}{\text{د هـ}} = \frac{٣,٥}{٣,٥ + س}$$

$$\text{من (١)، (٢) نستنتج: } \frac{٣,٥}{٣,٥ + س} = \frac{١,٥}{٢ + ١,٥}$$

$$\text{الضرب التقاطعي } (٢ + ١,٥) ٣,٥ = (٣,٥ + س) ١,٥$$

$$٣,٥ - \frac{٣,٥ \times ٣,٥}{١,٥} = س$$

$$س = \frac{١٤}{٣} = ٤,٦$$

حاول أن تحل

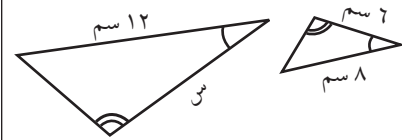
١١ في المثال (١١) إذا كان طول هـ ج يساوي ٣ م، أوجد طول بـج.



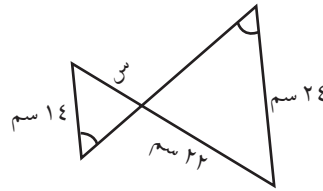
تدريب (١)

اكتب نسبة تشابه المثلثين، ثم أوجد قيمة x في كل مما يلي:

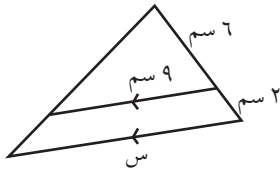
(أ)



(ب)



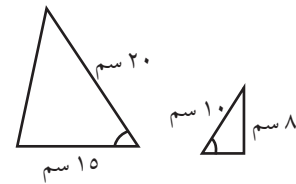
(ج)



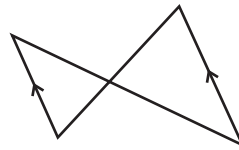
تدريب (٢)

اذكر أي الحالات يكون فيها المثلثان متشابهين، وأيها يكونان فيها غير متشابهين. وفي حالة التشابه، اذكر النظرية التي تثبت تشابههما.

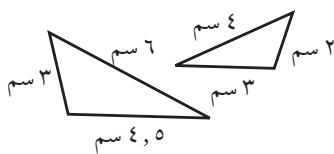
(أ)



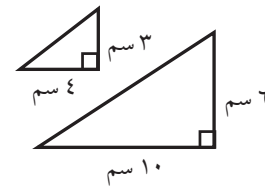
(ب)



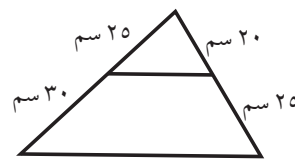
(ج)



(د)



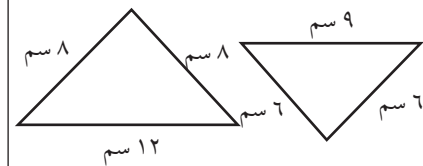
(هـ)



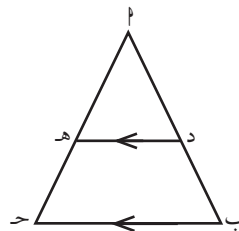
(و)



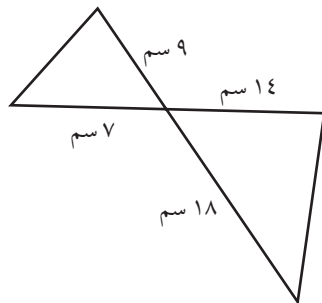
(ز)



(ح)



(ط)

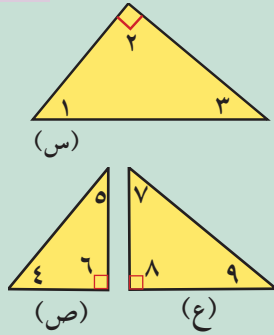
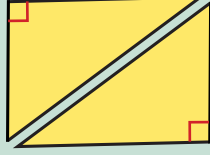


التشابه في المثلثات قائمة الزاوية

Similarity in Right Triangles

سوف تتعلم

- خصائص العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية



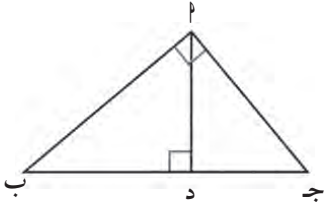
عمل تعاوني

اشترك مع أحد زملائك في التالي:

- أحضر قطعة ورق مستطيلة الشكل. ارسم قطرًا للمستطيل.
- اقطع الورقة كما في الشكل لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية متطابقين.
- خذ أحد المثلثين. اقطع المثلث لتحصل على مثلثين قائمي الزاوية صغيرين كما في الشكل.
- في المثلثات الثلاثة: س، ص، ع.
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{1}$ ؟
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{2}$ ؟
- أي الزوايا لها نفس قياس $\hat{3}$ ؟
- معتمدًا على نتائجك، ماذا تستنتج بالنسبة إلى المثلثات الثلاثة؟

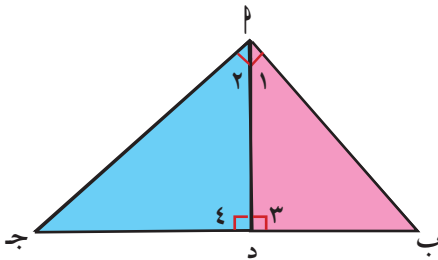
تدريب (١)

أكمل العبارة: $\Delta \text{أب ج} \sim \Delta \dots \sim \Delta \dots$



نظرية (١)

العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يقسم المثلث إلى مثلثين متشابهين وكل منهما يشابه المثلث الأصلي.



- المعطيات: أب ج مثلث قائم الزاوية أ، $\overline{أد} \perp \overline{ب ج}$.
- المطلوب: ١ إثبات تشابه المثلثين أب د، ج د.
- ٢ إثبات تشابه المثلثين أب د، ج د.
- ٣ إثبات تشابه المثلثين أب د، ج د.

تاريخ الرياضيات:

إقليدس EUCLID

هو عالم رياضيات لقب بأبي الهندسة.

اشتهر بكتابة «العناصر» عرض فيه مجموعة بديهيات وتطرق للعديد من مجالات الرياضيات.

البرهان:

١ المثلثان $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$ ، جاد فيهما:

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$$

$$\triangle ADB \sim \triangle ADC$$

معطى

معطى

لماذا؟

نظرية

تدريب (٢)

أكمل إثبات ٢، ٣.

نتيجة (١)

مربع طول العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر في مثلث قائم الزاوية يساوي ناتج ضرب طولي القطعتين المستقيمتين اللتين ينقسم إليهما الوتر بهذا العمود.

المعطيات: $\triangle ADB$ و $\triangle ADC$ قائم الزاوية $\angle ADB = \angle ADC = 90^\circ$ ، $AD \perp BC$.

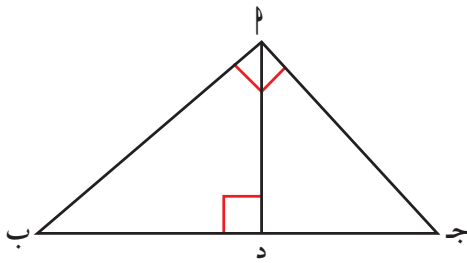
المطلوب: إثبات أن: $AD^2 = BD \times DC$.

(نظرية ١)

البرهان: $\triangle ADB \sim \triangle ADC$

$$\frac{AD}{BD} = \frac{AD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

$$AD^2 = BD \times DC$$



نتيجة (٢)

إذا كان Δ $أب ج$ قائم الزاوية $أ$ ، $أد \perp ج ب$:

١ $(أب)^2 = ب د \times ج$

٢ $(أج)^2 = ج د \times ج ب$

٣ $أب \times أج = أ د \times ج ب$

المعطيات: Δ $أب ج$ مثلث قائم الزاوية $أ$.

$أد \perp ج ب$.

المطلوب: ١ إثبات $(أب)^2 = ب د \times ج$.

٢ $(أج)^2 = ج د \times ج ب$.

البرهان:

(نظرية ١)

١ Δ $أب د \sim \Delta$ $أب ج$

$$\therefore \frac{ب د}{أب} = \frac{أب}{ج ب}$$

ومنها $(أب)^2 = ب د \times ج$.

(نظرية ١)

٢ Δ $أج د \sim \Delta$ $أب ج$

$$\therefore \frac{ج د}{أج} = \frac{أج}{ج ب}$$

ومنها $(أج)^2 = ج د \times ج ب$

(نتيجة ٢)

٣ $(أب)^2 \times (أج)^2 = ب د \times ج \times ج د \times ج ب$

$$= (ب د \times ج) \times (ج د \times ج ب)$$

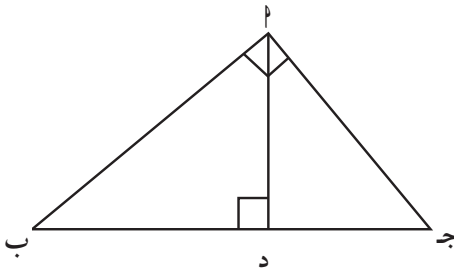
(نتيجة ١)

$$= (أب)^2 \times (أج)^2$$

$$\therefore أب \times أج = أ د \times ج ب$$

طريقة أخرى: مساحة المثلث $أب ج = \frac{1}{2} \times أب \times أج = \frac{1}{2} \times ب د \times ج$

$$\therefore أب \times أج = أ د \times ج ب$$



مثال (١)

أوجد س، ص بحسب المعطيات في الشكل.

المعطيات:

$\triangle$ أ ب ج قائم الزاوية د، $\overline{أد} \perp \overline{ب ج}$.

المطلوب: إيجاد س، ص.

البرهان:

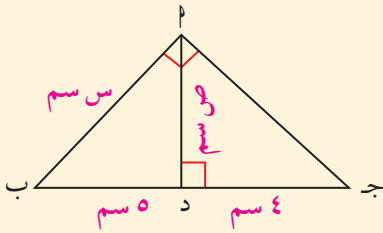
باستخدام نتائج النظرية (١):

$$س^2 = (٤ + ٥) \times ٥ = ٤٥$$

$$س = \sqrt{٤٥} = ٣\sqrt{٥}$$

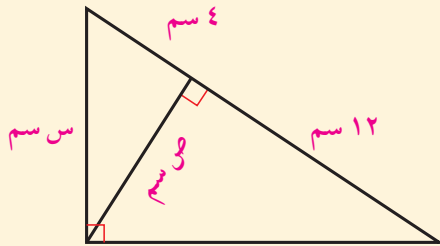
$$ص \times ٤ = ٥$$

$$ص = \frac{٥}{٤} = ١.٢٥$$



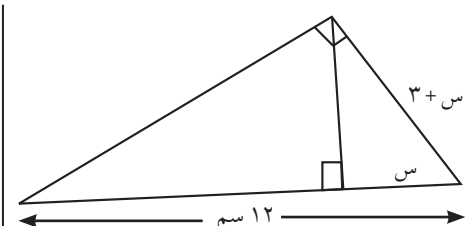
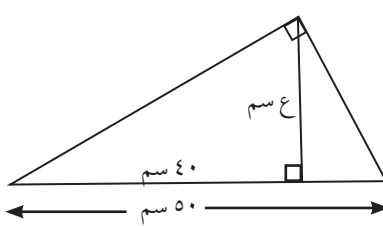
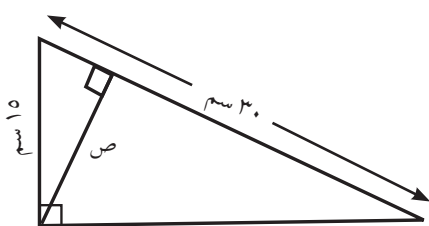
حاول أن تحل

١ أوجد من الشكل المرسوم س، ص في أبسط صورة.



تدريب (٣)

أوجد قيمة س، ص، ع في أبسط صورة في كل من الحالات التالية:



مثال (٢) تطبيقات حياتية

في إحدى الحدائق العامة، التي تقيمها الدولة على الشاطئ للترويح عن المواطنين، كان طول الممر المرصوف داخل الحديقة حتى المقصف يساوي ٣٠٠ م، وطول الممر حتى كشك المجلات ٤٠٠ م، وكان الممران يتقابلان في زاوية قائمة كما في الشكل أمام موقف السيارات. سار جاسم من موقف السيارات على مسار مستقيم عمودي على الشاطئ حتى وصل إلى الشاطئ. كم متراً على جاسم أن يسير من مكانه على الشاطئ الذي وصل إليه ليشتري شطائر من المقصف؟

المعطيات:

أب = ٣٠٠ م، ب ج = ٤٠٠ م، $\angle \text{ب ج د} = 90^\circ$ ، $\overline{\text{أ د}} \perp \overline{\text{ب ج}}$.

المطلوب:

إيجاد د ج.

البرهان:

$\triangle \text{أ ب ج}$ قائم الزاوية ب.

بتطبيق نظرية فيثاغورث

$$(\text{ب ج})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{أ ج})^2$$

$$(\text{ب ج})^2 = 250000$$

$$\text{ب ج} = 500 \text{ م}$$

بتطبيق نتائج التشابه

$$\frac{\text{أ ب}}{\text{أ ج}} = \frac{\text{ب ج}}{\text{ب د}}$$

$$\frac{300}{400} = \frac{500}{\text{ب د}}$$

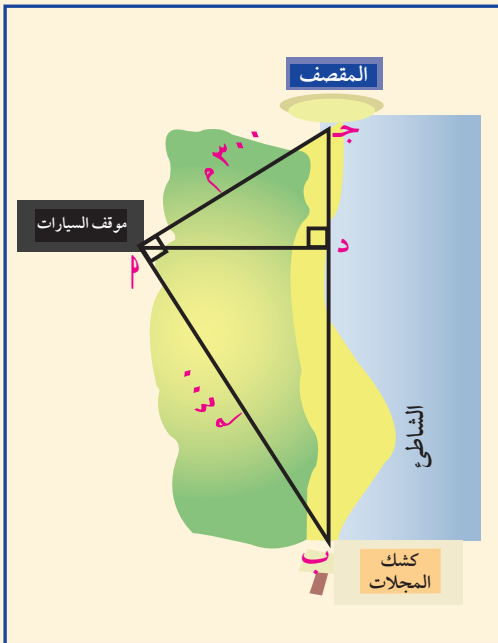
$$\text{ب د} = \frac{300 \times 400}{500} = 240$$

أي أن جاسم سيسير من مكانه ٢٤٠ م ليصل إلى المقصف.

حاول أن تحل

٢ أ احسب أ د المسافة من موقف السيارات إلى الشاطئ بطريقتين مختلفتين.

ب هل يمكنك حل المثال (٢) بطريقة أخرى؟



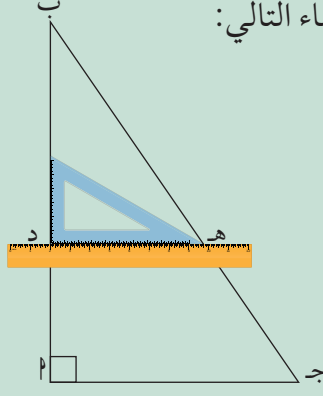
التناسب والمثلثات المتشابهة

Proportions and Similar Triangles

عمل تعاوني

سوف نتعلم

- خصائص الخط الموازي لأي ضلع في المثلث
- نظرية طاليس
- خصائص منصفات الزوايا الداخلية في المثلث



استخدم الأدوات الهندسية (المسطرة والمثلث القائم) في إنشاء التالي:

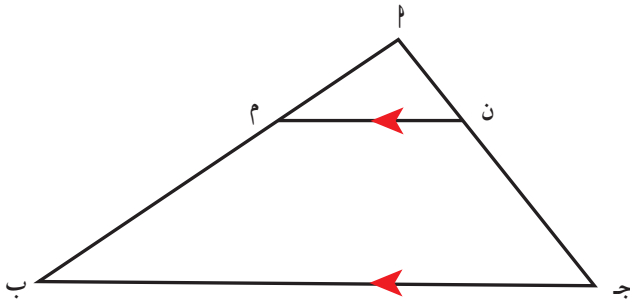
- ارسم $\triangle ABC$. خذ نقطة د على $\overline{AB}$.
- ارسم خطاً مستقيماً يمر بنقطة د ويوازي $\overline{BC}$.
- لتكن ه هي نقطة تقاطع $\overleftrightarrow{DE}$ مع $\overline{AC}$.
- أوجد بالقياس طول كل من: $\overline{BD}$ ، $\overline{AD}$ ، $\overline{BE}$ ، $\overline{AE}$.
- احسب النسبتين: $\frac{BD}{AD}$ ، $\frac{BE}{AE}$.
- قارن بين النسبتين: $\frac{BD}{AD}$ ، $\frac{BE}{AE}$.
- قارن بين عدد من الحالات يتحرك فيها موقع $\overleftrightarrow{DE}$ محافظاً على توازيه مع $\overline{BC}$.

Parallel Line Theory

نظرية المستقيم الموازي

نظرية (١)

إذا وازى مستقيم أحد أضلاع مثلث وقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.



المعطيات: $\overline{AB}$ جـ مثلث، $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$.

المطلوب: إثبات أن $\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$.

البرهان:

$\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$

لماذا؟

$\triangle AMN \sim \triangle ABC$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AB}{AC}$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{AM + MB}{AN + NC}$$

$$\frac{AM}{AN} + 1 = \frac{AM + MB}{AN + NC} + 1$$

$$\frac{AM}{AN} = \frac{MB}{NC}$$

$$\therefore \frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}$$

معلومة رياضية:

إذا كان $\overleftrightarrow{MN} \parallel \overleftrightarrow{BC}$
فإن $\overline{MN} \parallel \overline{BC}$
والعكس صحيح.

مثال (١)

استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.

المعطيات:

في المثلث $\triangle$ د هـ ، $\overline{ب ج} \parallel \overline{د هـ}$

$\text{أج} = ٥ \text{ سم}$ ، $\text{ج هـ} = ١٠ \text{ سم}$ ، $\text{ب د} = ١٦ \text{ سم}$ ، $\text{أ ب} = \text{س}$.

المطلوب: إيجاد س.

البرهان:

$\therefore \overline{ب ج} \parallel \overline{د هـ}$ وباستخدام نظرية المستقيم الموازي نكتب التناسب:

الأجزاء المتناسبة

$$\frac{\text{س}}{١٦} = \frac{٥}{١٠}$$

باستخدام الضرب التقاطعي

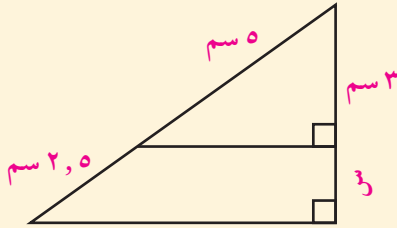
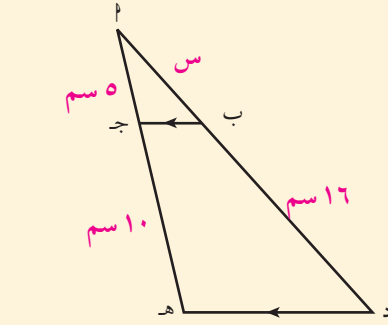
$$١٠ \text{ س} = ٨٠$$

بالقسمة على ١٠

$$\text{س} = ٨$$

حاول أن تحل

١ في الشكل المقابل، استخدم نظرية المستقيم الموازي السابقة لإيجاد قيمة س.



Thales Theory

نظرية طاليس

نظرية (٢)

إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

أولاً: إذا كان المستقيمان القاطعان متوازيان.

- ارسم ثلاثة مستقيمات متوازية م، ن، ز.
- ارسم مستقيمين متوازيين ك، س بحيث يقطعان المستقيمات م، ن، ز.
- أثبت تناسب أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.

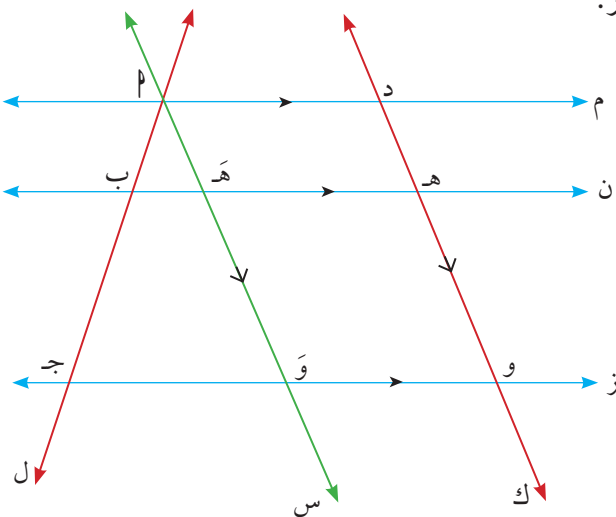
ثانياً: إذا كان المستقيمان القاطعان غير متوازيين.

المعطيات: لدينا المستقيمات م، ن، ز حيث $\overline{م} \parallel \overline{ن} \parallel \overline{ز}$.

المستقيم ل يقطع م، ن، ز بالنقاط ل، ب، جـ على الترتيب.

المستقيم ك يقطع م، ن، ز بالنقاط د، هـ، و على الترتيب.

$$\frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} \text{ إثبات أن: } \frac{\text{د هـ}}{\text{ب جـ}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$$



العمل:

نأخذ من النقطة Γ خطاً مستقيماً $س$ موازياً للمستقيم $ك$ حيث يقطع $ن$ بالنقطة $هـ$ ويقطع $ز$ بالنقطة $و$.

البرهان:

في الشكل: Γ $هـ$ $د$ متوازي أضلاع

$$\therefore \overline{\Gamma هـ} // \overline{د هـ}$$

$$\overline{\Gamma هـ} = \overline{د هـ}$$

وبالمثل $هـ و$ $و هـ$ متوازي أضلاع

$$\therefore \overline{هـ و} = \overline{و هـ}$$

في Δ $\Gamma و ج$ ، $\overline{هـ ب} // \overline{و ج}$

$$\therefore \frac{\overline{\Gamma هـ}}{\overline{هـ و}} = \frac{\overline{\Gamma ب}}{\overline{ب ج}}$$

نظرية (١)

بالتعويض

$$\text{ومنه نستنتج: } \frac{\overline{د هـ}}{\overline{هـ و}} = \frac{\overline{\Gamma ب}}{\overline{ب ج}}$$

مثال (٢)

من الشكل المقابل أوجد قيمة $س$.

المعطيات: لدينا مستقيمان غير متوازيين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية.

أطوال القطع الناتجة هي $س$ ، $٢س + ١٠$ ، ١٢ ، ٣٠ بالترتيب.

المطلوب: إيجاد قيمة $س$.

البرهان:

بما أن المستقيمين يقطعان ثلاثة مستقيمات متوازية وباستخدام نظرية طاليس

$$\frac{١٢}{٣٠} = \frac{س}{١٠ + ٢س}$$

$$٣٠س = (١٠ + ٢س)١٢$$

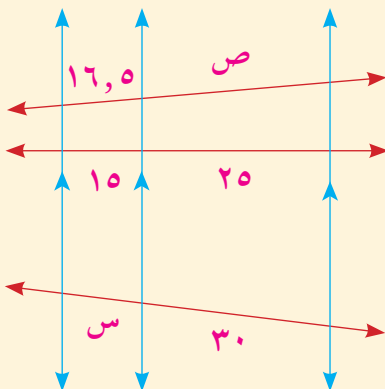
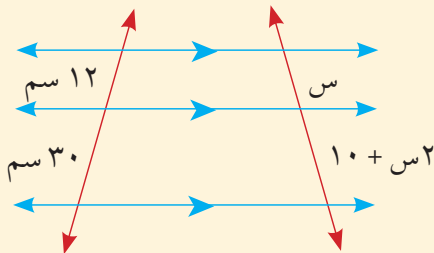
$$٣٠س = ١٢٠ + ٢٤س$$

$$٦س = ١٢٠$$

$$س = ٢٠ \text{ سم}$$

حاول أن تحل

٢ أوجد في الشكل المقابل $س$ ، $ص$ في أبسط صورة.



مثال (۳)

في الشكل المقابل: د مركز الدائرة، طول نصف قطر الدائرة = ٤ سم.

أب = ١٠ سم ، أ د = ٨ سم ، ب ج = ٥ سم ، و، ف نقطتان على الدائرة.

قال فهد: النقاط أ، د، ب على استقامة واحدة كذلك النقاط ل، و، ج وبالترتيب نفسه.

$$\frac{4}{5} = \frac{\text{ود}}{\text{جب}} \quad , \quad \frac{4}{5} = \frac{8}{10} = \frac{\text{اد}}{\text{اب}} \therefore$$

∴ وِد // جِب

أجابه سلطان: في هذه الحالة، $\overline{f}$ ، $\overline{g}$ متوازيتان أيضًا.

أ اشرح علام ارتکز سلطان في إجابته.

ب أين الخطأ في الحل الذي أعطاه فهد؟

الحل:

١ كيف فكر سلطان:

∴ $\overline{FD}$ نصف قطر في الدائرة.

∴ ف د = ٤ سم

$$\frac{4}{5} = \frac{\text{ف د}}{\text{ب ج}} \therefore$$

أي أن $\frac{٤}{٥} = \frac{\text{ف د}}{\text{ب ج}} = \frac{\text{د}}{\text{ب}}$

واستناداً على ما اقترحه فهد يكون $\overline{f} // \overline{g}$ جب وهذا خطأ

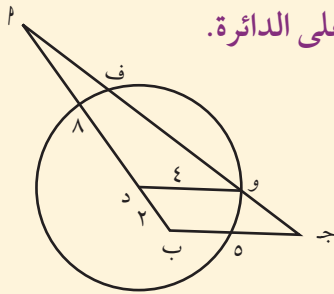
(نظرية طاليس)

ب يجب أن يكون ود // جب

توازي المستقيمات يعطي قطعاً أطوالها متناسبة وليس العكس.

حاول أن تحل

٣ في المثال (٣)، إذا كان أيضًا $\overline{ود} // \overline{جب}$ ، وج = ٣ سم، فأوجد طول $\overline{لو}$.



المطلوب:

إيجاد س، ص.

البرهان:

من توازي القطع المستقيمة واستنادًا إلى نظرية طاليس، نكتب التناسب:

$$\frac{45}{135} = \frac{30}{س}$$

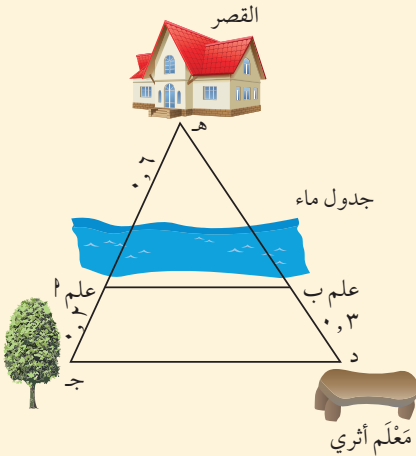
باستخدام نظرية طاليس

$$90 = س$$

$$\frac{90}{90} = \frac{ص}{135}$$

$$\therefore ص = 135 \text{ سم.}$$

حاول أن تحل



٤ باستخدام نظام إشارة (طبوغرافيا)، وضع علمان عند النقطتين 'ب' و 'د'.

كما في الشكل المقابل

بحيث يكون $\overline{أب} // \overline{جـد}$.

إذا كان $ب د = ٣٠$ كم، $هـ د = ٦٠$ كم، $ب هـ = ٩٠$ كم.

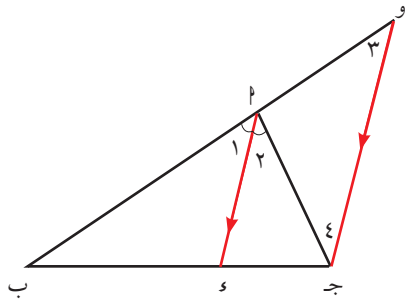
فأوجد المسافة بين القصر هـ والمعلم الأثري د.

نظرية منصف الزاوية في مثلث

نظرية (٣)

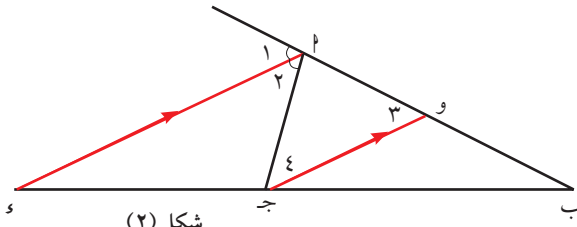
إذا نصفت زاوية رأس مثلث أو الزاوية الخارجة للمثلث عند هذا الرأس، قسم المنصف قاعدة المثلث من الداخل أو من الخارج إلى جزئين النسبة بين طوليهما تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.

المعطيات: $\triangle أ ب ج$ فيه، $\overrightarrow{أ هـ}$ ينصف $\angle ب$ من الداخل شكل (١)، ينصف الزاوية الخارجة عن المثلث عند $ب$ شكل (٢).



شكل (١)

(١) نظرية



شكل (٢)

(٢)

المطلوب: إثبات أن: $\frac{PB}{PA} = \frac{BQ}{QA}$

العمل: نرسم $JO \parallel PQ$ ويقطع AB في نقطة O .

البرهان: $\therefore JO \parallel PQ$

$$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{BQ}{QA}$$

$$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{BQ}{QA}$$

$$\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{BQ}{QA}$$

$\therefore \angle(1) = \angle(2)$ بالتناظر، $\angle(3) = \angle(4)$ بالتبادل

$$\therefore \angle(1) = \angle(2) \quad \angle(3) = \angle(4)$$

$$\therefore PO = OQ$$

وبالتعويض من (٢) في (١) $\therefore \frac{PB}{PA} = \frac{BQ}{QA}$

ملاحظة: سنكتفي بدراسة الحالة التي ينصف فيها شعاع زاوية داخلية في مثلث.

مثال (٥)

أوجد JB في الشكل المبين حيث B د ينصف AB .

المعطيات: B د منتصف AB .

$$AB = 6 \text{ سم}, AD = 5 \text{ سم}$$

$$JD = 8 \text{ سم}$$

المطلوب: إيجاد JB .

البرهان:

في المثلث ABD ، B د منتصف AB .

$$\therefore \frac{JB}{JD} = \frac{AB}{AD}$$

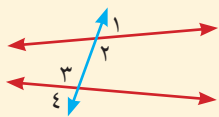
$$\frac{JB}{8} = \frac{6}{5}$$

$$JB = \frac{6 \times 8}{5} = \frac{48}{5} = 9.6 \text{ سم}$$

حاول أن تحل

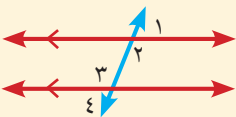
٥ AB د مثلث حيث $AB = 6 \text{ سم}$ ، $AD = 5 \text{ سم}$ ، ثم رسم AD منتصف AB د ويقطع B د في D . إذا كان $AB = 3 \text{ سم}$ ، أوجد JD .

معلومة رياضية:



$\angle(1)$ ، $\angle(2)$: زاويتان متبادلتان داخلياً

$\angle(3)$ ، $\angle(4)$: زاويتان متبادلتان خارجياً



$\angle(1) = \angle(2)$: التوازي والتبادل الداخلي

$\angle(3) = \angle(4)$: التوازي والتبادل الخارجي

مثال (٦)

في الشكل المرسوم تبين لمراقب موجود في المنارة (م) أن قياسي الزاويتين (١)، (٢) المكونتين من كل من الجزيرتين (أ)، (ب) والمنارة (م) والسفينة (س) متساويان.
أوجد بعد السفينة عن كل من الجزيرتين إذا كانت السفينة والجزيرتين على استقامة واحدة.

الحل:

المعطيات:

تكوّن المنارة والجزيرتان مثلثاً م أ ب أبعاده: م أ = ٢١٧،

م ب = ٢٨٥، م ب = ٣١٢

المستقيم المار بالمنارة والسفينة ينصف الزاوية م أ ب.

السفينة والجزيرتان على استقامة واحدة.

المطلوب:

إيجاد س أ، س ب.

البرهان:

∴ م س منتصف م أ ب

نظرية منصف الزاوية

من خواص التناسب

$$\begin{aligned} \therefore \frac{م أ}{س ب} &= \frac{م ب}{س أ} \\ \frac{م أ + م ب}{س ب} &= \frac{م ب + س أ}{س ب} \\ \frac{٢٨٥ + ٢١٧}{س ب} &= \frac{٣١٢}{س ب} \end{aligned}$$

$$\therefore س ب = \frac{٢٨٥ \times ٣١٢}{٢٨٥ + ٢١٧} = ١٧٧$$

$$س أ = ١٧٧ - ٣١٢ = ١٣٥$$

تبعد السفينة عن الجزيرة أ حوالي ١٣٥ كم وتبعد عن

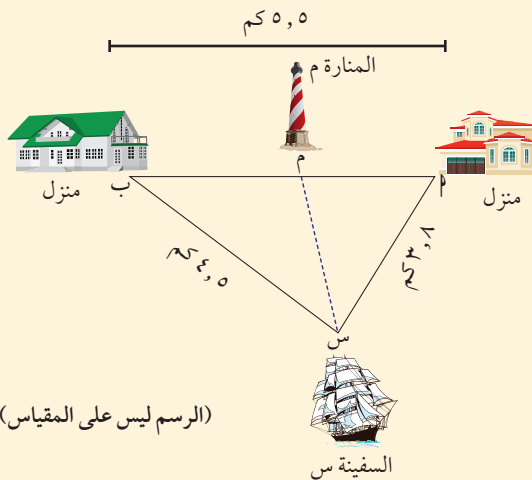
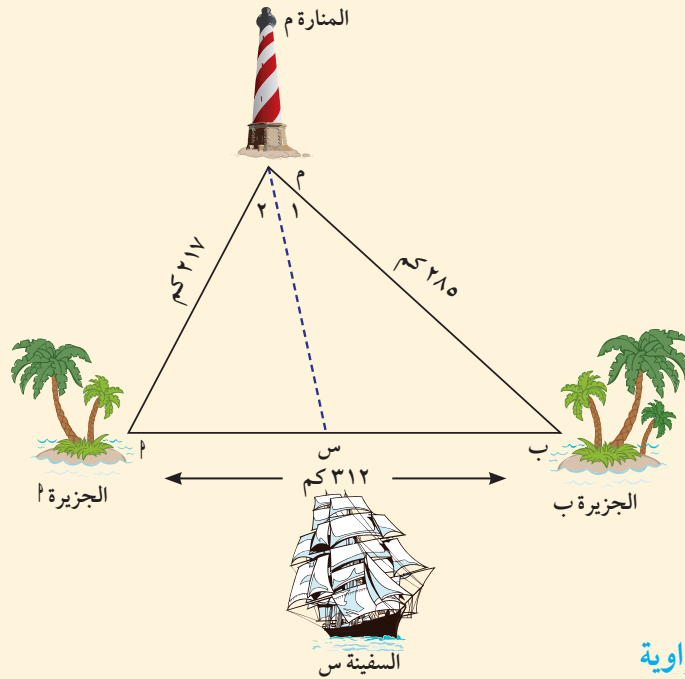
الجزيرة ب حوالي ١٧٧ كم.

حاول أن تحل

٦ في الشكل المرسوم أوجد المسافة بين المنارة وكل من المنزلين

إذا علمنا أن المنزلين والمنارة على استقامة واحدة، وأن المستقيم

المار بالسفينة والمنارة ينصف الزاوية م س ب.



(الرسم ليس على المقياس)

العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتهما Relation Between Perimeters and Areas of Two Similar Figures

عمل تعاوني

اعمل مع زميل لك لبحث العلاقة بين محيطي شكلين متشابهين والعلاقة بين مساحتهما.

خطوات العمل:

- سوف تتعلم
- العلاقة بين محيطات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه
 - العلاقة بين مساحات الأشكال المتشابهة ونسبة التشابه

١ على ورقة المربعات حدّد مستطيلاً أبعاده ٣ وحدات، ٤ وحدات.

٢ حدد ثلاثة مستطيلات مشابهة للمستطيل الأصلي.

٣ استخدم الرسم في ملء الجدول (١).

٤ استعن بالمعلومات التي حصلت عليها في الجدول (١) لتكمل الجدول (٢).

٥ ماذا تعني النسب التي حصلت عليها مقارنة بنسبة التشابه؟

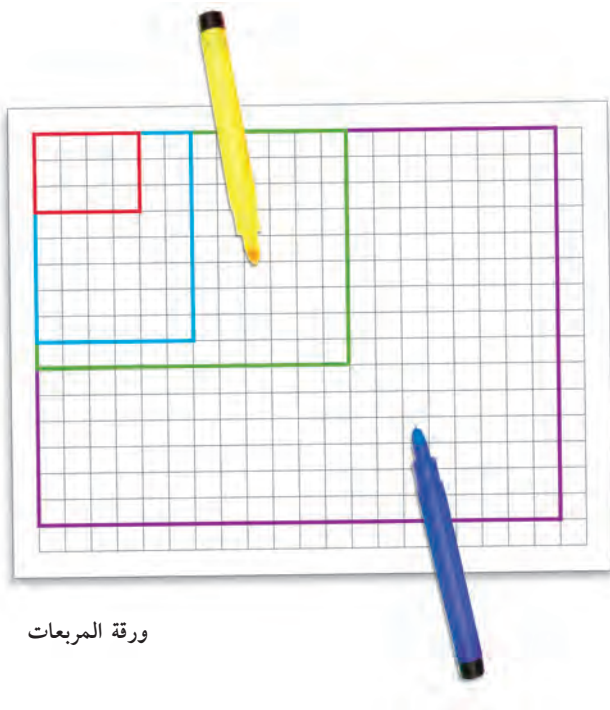
٦ قارن بين النتائج التي حصلت عليها والنتائج التي حصل عليها زملاؤك في الفصل.

جدول (١)

المستطيل	العرض	الطول	المحيط	المساحة
الأصلي				
I				
II				
III				

جدول (٢)

المستطيل	النسبة بين العرضين	النسبة بين الطولين	النسبة بين المحيطين	النسبة بين المساحتين	نسبة التشابه
	١:٢	١:٢			٢
I: الأصلي					
II: الأصلي					
III: الأصلي					



ورقة المربعات

نظرية العلاقة بين محيطات أو مساحات الأشكال المتشابهة

Relation Theory Between Perimeters or Areas of Similar Figures

نظرية (١)

معلومة مفيدة:

$$\text{مساحة شبه المنحرف} = \frac{\text{مجموع طولي القاعدتين المتوازيتين} \times \text{الارتفاع}}{2}$$

إذا كانت نسبة التشابه لأي شكلين متشابهين هي $\frac{p}{b}$ فإن:

١ النسبة بين محيطي الشكلين = $\frac{p}{b}$ = نسبة التشابه.

٢ النسبة بين مساحتي الشكلين = $\left(\frac{p}{b}\right)^2 = \frac{p^2}{b^2}$ = مربع نسبة التشابه.

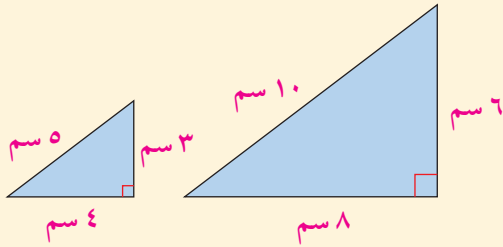
نسبة التشابه بين أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفَي قطريهما.

مثال (١)

تحقق من صحة النظرية السابقة بإيجاد نسبة التشابه والنسبة بين محيطي ثم بين مساحتي:

أ المثلثين المتشابهين.

ب شبهي المنحرف المتشابهين.



المعطيات: مثلثان قائمي الزاوية متشابهان، أطوال أضلاعهما ٣ سم، ٤ سم، ٥ سم و ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم بالترتيب.

المطلوب:

إيجاد نسبة التشابه.

إيجاد النسبة بين محيطي المثلثين وبين مساحتيهما.

البرهان:

أ نسبة التشابه = النسبة بين طولي أي ضلعين متناظرين $\frac{1}{2} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$

النسبة بين محيطي المثلثين = $\frac{1}{2} = \frac{12}{24}$ = نسبة التشابه.

النسبة بين مساحتي المثلثين = $\frac{4 \times 3 \times \frac{1}{2}}{24} = \frac{6}{24} = \frac{1}{4} = \left(\frac{1}{2}\right)^2$ = مربع نسبة التشابه.

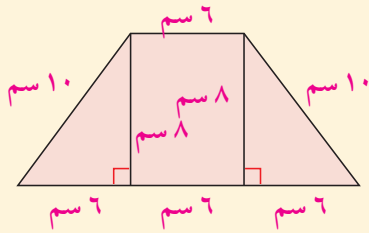
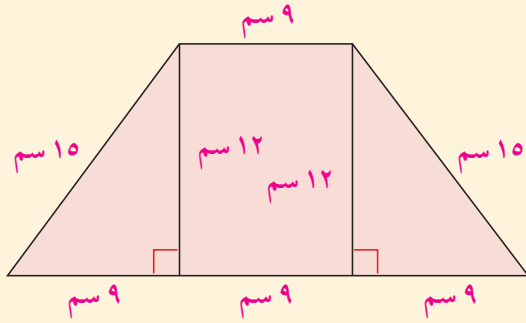
ب المعطيات:

شبهي منحرف متطابقي الضلعين، أطوال أضلاعها ٦ سم، ١٠ سم، ١٨ سم، ١٠ سم و ٩ سم، ١٥ سم، ٢٧ سم، ١٥ سم بالترتيب.

المطلوب: إيجاد نسبة التشابه.

إيجاد النسبة بين محيطي شبهي المنحرف والنسبة بين مساحتيهما.

البرهان:



$$\text{نسبة التشابه} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{20 + 18 + 6}{9 + 27 + 30} = \text{النسبة بين محيطي شبهي المنحرف}$$

$$\text{نسبة التشابه} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6} = \frac{44}{66}$$

$$\frac{12 \times 8}{18 \times 12} = \text{النسبة بين مساحتي شبهي المنحرف}$$

$$\text{مربع نسبة التشابه} = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9} = \frac{8}{18}$$

حاول أن تحل

١ لدينا مثلثان متشابهان بنسبة $\frac{2}{3}$. إذا كان محيط المثلث الأكبر ٤٥ سم، فأوجد محيط المثلث الأصغر.

مثال (٢)

مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر محيطه ٤٨ سم، أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

المعطيات: مضلعان متشابهان

أطوال أضلاع الأول: ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم.

محيط المضلع الثاني = ٤٨ سم.

المطلوب: إيجاد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

البرهان:

محيط المضلع الأول = ٣ + ٥ + ٦ + ٨ + ١٠ = ٣٢ سم.

$$\text{النسبة بين محيطي المضلعين} = \frac{32}{48} = \frac{2}{3}$$

لتكن أ، ب، ج، د، هـ على التوالي أطوال أضلاع المضلع الثاني المناظرة للأطوال ٣، ٥، ٦، ٨، ١٠ في المضلع الأول. النسبة بين ضلعين متناظرين = النسبة بين محيطي المضلعين.

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \quad \therefore \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \quad \text{ب} \quad \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \text{د} \\ \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \quad \therefore \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \quad \text{أ} \quad \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \quad \text{ج} \\ \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \quad \therefore \frac{2}{3} = \frac{5}{8} \quad \text{هـ} \end{aligned}$$

حاول أن تحل

٢ مضلعان متشابهان أحدهما أطوال أضلاعه ٣ سم، ٥ سم، ٦ سم، ٨ سم، ١٠ سم والآخر ينقص محيطه ٨ سم عن محيط المضلع الأول. أوجد أطوال أضلاع المضلع الثاني.

مثال (٣)

ليكن لدينا دائرتان م، ن: الأولى طول نصف قطرها r_1 ، والثانية طول نصف قطرها r_2 .

أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتهما.

المعطيات:

دائرتان طول نصف قطر الأولى r_1 وطول نصف قطر الثانية r_2 .

المطلوب:

إيجاد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتهما.

البرهان:

$$\frac{r_1}{r_2} = \text{نسبة التشابه}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \text{النسبة بين المحيطين}$$

$$\left(\frac{r_1}{r_2}\right)^2 = \frac{\pi r_1^2}{\pi r_2^2} = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \text{النسبة بين المساحتين}$$

حاول أن تحل

٣ دائرتان م، ن، طول نصف قطر الأولى = ٥ سم وطول نصف قطر الثانية = ٨ سم. أوجد النسبة بين محيطي الدائرتين والنسبة بين مساحتهما.

النسبة بين محيطي دائرتين تساوي نسبة التشابه بين الدائرتين.
النسبة بين مساحتي دائرتين تساوي مربع نسبة التشابه بين الدائرتين.

مثال (٤)

لدينا شكلان رباعيان متشابهان بنسبة تشابه $\frac{5}{4}$. إذا كانت مساحة الشكل الرباعي الأكبر ٣٠ سم^٢، فما مساحة الشكل الرباعي الأصغر؟
المعطيات: رباعيان متشابهان.

نسبة التشابه = $\frac{5}{4}$ = مساحة الشكل الرباعي الأكبر = ٣٠ سم^٢

المطلوب: إيجاد مساحة الشكل الرباعي الأصغر.

البرهان: النسبة بين المساحتين = مربع نسبة التشابه

$$\frac{\text{مساحة الشكل الرباعي الأكبر}}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}} = \left(\frac{5}{4}\right)^2 = \frac{25}{16}$$

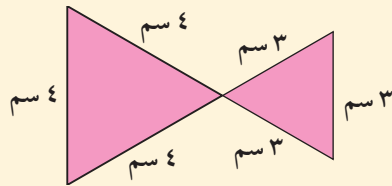
$$\frac{25}{16} = \frac{30}{\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر}}$$

$$\text{مساحة الشكل الرباعي الأصغر} = \frac{16 \times 30}{25} = 19,2 \text{ سم}^2$$

حاول أن تحل

٤ النسبة بين مساحتي مضلعين متشابهين هي $\frac{16}{9}$. ما محيط المضلع الأكبر إذا كان محيط المضلع الأصغر ٢٤ سم؟

مثال (٥) تطبيقات حياتية



رسم يوسف ربطة عنق على شكل عقدة فراشة. لاحظ أن قسمي الربطة غير متطابقين.
أوجد النسبة المئوية لمساحة المنطقة التي عليه أن يقطعها من المثلث الأكبر ليصبح القسمان متطابقين؟

الحل:

طريقة أولى للحل:

المثلثان كل منهما متطابق الأضلاع.

∴ المثلثان متشابهان

$$\text{نسبة التشابه} = \frac{3}{4}$$

$$\text{∴ النسبة بين مساحتي المثلثين} = \left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$$

إذا فرضنا أن مساحة Δ الأكبر = س

فإن مساحة Δ الأصغر = $\frac{9}{16}س$

وعليه يكون الفرق بين المساحتين = س - $\frac{9}{16}س = \frac{7}{16}س$

النسبة المئوية لمساحة المنطقة المطلوبة = $\frac{\frac{7}{16}س}{س} \times 100\% = 43,75\%$

يجب أن يقطع $43,75\%$ من مساحة المثلث الأكبر.

طريقة ثانية للحل:

مساحة المثلث الأصغر = $\frac{1}{4}$ حاصل ضرب طولي أي ضلعين $\times$ جيب الزاوية المحددة بهما

$$= \frac{1}{4} \times 3 \times 3 \times \sin 60^\circ \text{ لماذا؟}$$

$$= \frac{3\sqrt{9}}{4} \text{ وحدة مربعة}$$

$$= \frac{1}{4} \times 4 \times 4 \times \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ وحدة مربعة} \text{ مساحة المثلث الأكبر}$$

$$= 4\sqrt{3} \text{ وحدة مربعة}$$

$$= \frac{3\sqrt{9}}{4} - 4\sqrt{3} \text{ الفرق بين مساحتي المثلثين وحدة مربعة}$$

$$= \frac{3\sqrt{7}}{4} \text{ وحدة مربعة}$$

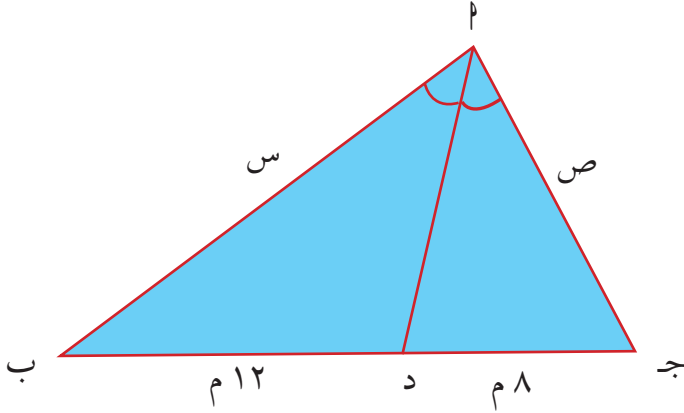
$$= \frac{3\sqrt{7}}{4} \div (4\sqrt{3}) \times 100\% = 43,75\% \text{ النسبة المئوية للفرق بين المساحتين}$$

حاول أن تحل

- ٥ هل تبقى النسبة المئوية دون تغيير إذا كان طول ضلع المثلث الأصغر ٤ سم، وطول ضلع المثلث الأكبر ٥ سم؟
فسّر إجابتك.

المرشد لحل المسائل

١ محيط المثلث المقابل يساوي ٥٠ مترًا. $\overline{AD}$ منصف داخلي للزاوية $\angle A$. أوجد قيم s ، v .



ما الذي أعرفه؟ يجب عرض المعطيات
محيط المثلث $\triangle ABC$ يساوي ٥٠ مترًا، أي أن:

$$AB + AC + BC = 50 \text{ م.}$$

ثم $BD = 12$ م، $DC = 8$ م أي أن:

$$BC = 12 + 8 = 20$$

$\overline{AD}$ منصف داخلي للزاوية $\angle A$.

ما الذي أريد معرفته؟

قيمة s ، قيمة v .

كيف سأحل المسألة؟

استخدم المعطيات، اكتب:

$$\left. \begin{aligned} s + v + 20 &= 50 \text{ أي: } s + v = 30 \\ \frac{s}{v} &= \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \end{aligned} \right\} \text{أي: } s = \frac{3}{2}v$$

$$\left. \begin{aligned} s + v &= 30 \\ \frac{3}{2}v + v &= 30 \end{aligned} \right\}$$

أوجد حل نظام المعادلتين باستخدام طريقة التعويض أحصل على:

$$\frac{3}{2}v + v = 30 \text{ ومنه } v = 12 \text{ وبالتالي } s = 18$$

أي أن $v = 12$ م، $s = 18$ م.

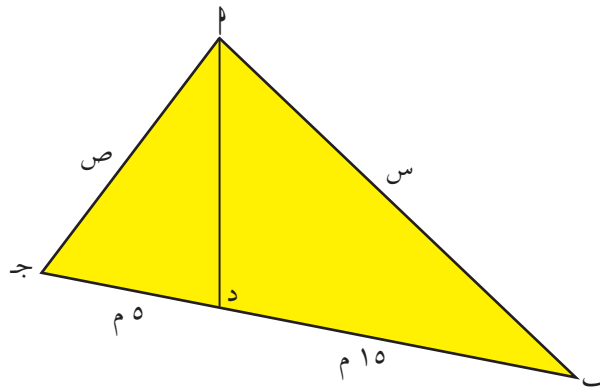
سوف أتأكد من صحة الحل:

$$s + v + BC = 18 + 12 + 20 = 50 \text{ محيط المثلث يساوي } 50 \text{ م.}$$

مسألة إضافية

محيط المثلث أذناه يساوي ٤٤ مترًا، $\overline{AD}$ منصف داخلي للزاوية $\angle A$.

أوجد قيم s ، v .



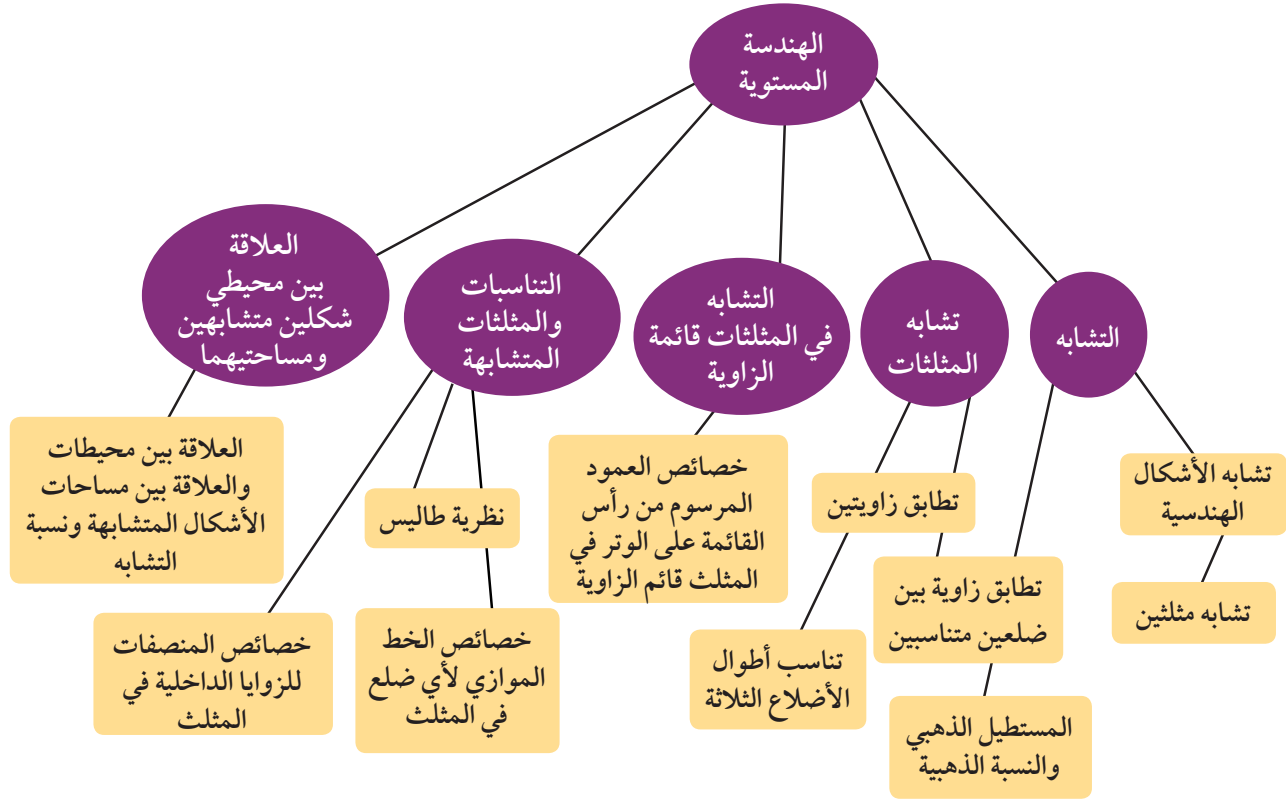
معلومة مفيدة:

يمكنك استكمال الحل بطرق أخرى ومنها:

$$\frac{s}{v} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} \text{، } \frac{s + v}{8} = \frac{30}{8} \text{، } \frac{s + v}{8} = \frac{30}{8}$$

$$\frac{30}{8} = \frac{30}{8} \text{ ومنها } v = 12 \text{، } \therefore s = 18$$

مخطط تنظيمي للوحدة الرابعة



ملخص

- يكون شكلان متشابهين عندما يكون لهما الشكل نفسه وأحدهما تكبيراً أو تصغيراً للآخر أو متطابقاً معه.
- يوجد في شكلين متشابهين أزواج من الزوايا متساوية القياس وأزواج من الأضلاع متناسبة الأطوال.
- يستخدم التناسب في الأشكال المتشابهة للتطبيق على مقياس الرسم.
- عند تطابق زاويتين في مثلث مع زاويتين في مثلث آخر يكون المثلثان متشابهين.
- عند تطابق زاوية في مثلث مع زاوية في مثلث آخر وتناسب طولي الضلعين المحددين لهاتين الزاويتين، يكون المثلثان متشابهين.
- عند تناسب أطوال الأضلاع الثلاثة المتناظرة في مثلثين، يكون المثلثان متشابهين.
- يقسم العمود المرسوم من رأس القائمة على الوتر، المثلث قائم الزاوية إلى مثلثين متشابهين وكل منهما مشابه للمثلث الأصلي.
- عندما يوازي مستقيم أحد أضلاع مثلث ويقطع ضلعيه الآخرين، فإنه يقسم هذين الضلعين إلى أجزاء أطوالها متناسبة.
- تنص نظرية طاليس على أنه إذا قطع مستقيمان ثلاثة مستقيمات متوازية أو أكثر مع بعضها بعضاً، فإن أطوال القطع المستقيمة الناتجة على أحد القاطعين تكون متناسبة مع أطوال القطع الناتجة على القاطع الآخر.
- يقسم المنصف للزاوية الداخلية في المثلث الضلع المقابل لها إلى جزئين النسبة بين طوليها تساوي النسبة بين طولي الضلعين الآخرين للمثلث.
- إذا كانت نسبة التشابه بين مضلعين متشابهين هي $\frac{1}{b}$ فإن:
 - (١) النسبة بين محيطي مضلعين $= \frac{1}{b}$
 - (٢) النسبة بين مساحتي مضلعين $= \left(\frac{1}{b}\right)^2$
- نسبة التشابه بين محيطي أي دائرتين هي النسبة بين طولي نصفَي قطريهما.

المتتاليات (المتتابعات) Sequences

مشروع الوحدة: استخدام المتتابعات في الرسوم الهندسية والتصاميم.



عباد الشمس (تباع الشمس)



كوز صنوبر



أناناس

١ مقدمة المشروع: يدعى كل حد في متتالية فيبوناتشي عدد فيبوناتشي. في العديد من النباتات والزهور والثمار عدد البتلات هو من أعداد فيبوناتشي.

٢ الهدف: دراسة بعض أنواع النباتات والزهور والثمار وتبيان توافق عدد بتلاتها مع أعداد فيبوناتشي.

٣ اللوازم: أوراق رسم بياني، آلة حاسبة، صور: زنبق، قزحية زهور على شكل نجمة، مخروط صنوبر، عباد الشمس (تباع الشمس).

٤ أسئلة حول التطبيق:

أ ابحث عن إحدى النباتات التي يتوافق نمو ساقها مع متتالية فيبوناتشي. ضع مخططاً وجدولاً يبينان هذا التوافق.

ب ابحث عن بعض الزنبق وعشب الحوزان والقزحية والأقحوانات. اعرض هذه الصور وبين كيف أن عدد بتلات كل منها هو عدد فيبوناتشي.

ج ابحث عن صورة لزهرة الآلام (PASSI FLORA) واعرض صورتها من الجهتين الأمامية والخلفية، ثم بين أن أعداد مجموعتي بتلاتها الخضراء هي أعداد فيبوناتشي. كذلك من الجهة الخلفية، بين العلاقة بين الأوراق الخضراء والبتلات و متتالية فيبوناتشي.

د اعرض صورة لزهرة إشنسا فرفرية Echinacea Purpurea وصورة لقرص عباد الشمس Sun Flower. بين توافق المنحنيات الحلزونية مع أعداد فيبوناتشي.

هـ اجمع بعض مخاريط الصنوبر. عد الحلزونات في الاتجاهين في كل مخروط. ماذا تلاحظ؟ وماذا عن ثمرة الأناناس؟

٥ التقرير: ضع تقريراً مفصلاً تبين فيه كيف استفدت من المتتاليات للإجابة عن الأسئلة فيما تنفذ المشروع.

دروس الوحدة

الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتتابعات)	المتتالية الحسابية	المتتالية الهندسية
١-٥	٢-٥	٣-٥

الأنماط الرياضية والمتتاليات (المتابعات)

Mathematical Patterns and Sequences

سوف تتعلم

- النمط الرياضي
- المتتالية الحقيقية
- الحد النوني للمتتالية

عمل تعاوني

افتراض أن كل طالبين من الفصل تجري بينهما مكالمات هاتفية. ما أقل عدد من المكالمات الهاتفية التي يمكنك الحصول عليها بحيث يتحدث كل طالب من فصلك مع الآخر هاتفياً؟ ثم أجب عن الأسئلة التالية باستخدام الشكل المجاور:

- ١ كم مكالمات يمكن أن تجري بين طالبين؟
- ٢ كم مكالمات يمكن أن تجري بين ٣ طلاب أو ٤ طلاب؟
- ٣ استخدم الشكل المجاور لتحديد عدد المكالمات الممكنة بين ٥ طلاب، ثم أكمل الجدول التالي:

عدد الطلاب (ن)	١	٢	٣	٤	٥
عدد المكالمات (م)	٠	١			

٤ النمط الرياضي: أي من الصيغ التالية تمثل النمط الموجود في الجدول السابق؟

أ $م = ٢ن - ٣$ ب $م = ن(ن - ١) - ٥$ ج $م = \frac{ن(ن - ١)}{٢}$

حيث ن عدد الطلاب، م عدد المكالمات.

٥ أوجد عدد المكالمات م اللازم لمجموعة من ٧ طلاب مستخدماً الصيغة المناسبة.

٦ ما عدد المكالمات اللازم ليتحدث كل طلاب صفك مع بعضهم بعضاً؟

مثال (١)

سقطت كرة من ارتفاع ٥, ١٢ مترًا عن سطح الأرض وكانت ترتفع إلى ٨٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الرابع.



الحل:

الارتفاع الأصلي ١٢, ٥ م.

- بعد الاصطدام الأول بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨, ٥ × ٠, ٨ = ١٢, ٥ أمتار.
 - بعد الاصطدام الثاني بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨, ٨ × ٠, ٨ = ٨ أمتار.
 - بعد الاصطدام الثالث بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨, ٨ × ٠, ٨ = ٤, ٦ أمتار.
 - بعد الاصطدام الرابع بالأرض، يكون ارتفاع الكرة: ٨, ٤ × ٠, ٨ = ٦, ٤ أمتار.
- وبالتالي يكون الارتفاع ١٢, ٥ م بعد الاصطدام الرابع للكرة بالأرض.
- لاحظ تتابع الارتفاعات (٥, ١٢, ٨, ٤, ٦, ١٢, ٥, ...)

حاول أن تحل

- ١ سقطت كرة من ارتفاع ١٠ أمتار، وكانت ترتفع إلى ٦٠٪ من الارتفاع السابق في كل مرة نتيجة اصطدامها بالأرض. احسب ارتفاع الكرة بعد الاصطدام الثالث.

تدريب (١)

صف النمط التالي ثم أكمل بكتابة الحدود الثلاثة التالية:

أ ٢، ٤، ٦، ٨، —، —، —

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، —، —، —

مثل الأنماط الرياضية السابقة تسمى متتابعات أو متتاليات ويمكننا إيجاد الحدود

التالية باتباع قاعدة النمط.

اعتبر متتالية الأعداد في (أ):

الحد الأول	الحد الثاني	الحد الثالث	الحد الرابع	...	الحد النوني
$ح_١$	$ح_٢$	$ح_٣$	$ح_٤$	...	$ح_n$
$ح_١ = ٢$	$ح_٢ = ٤$	$ح_٣ = ٦$	$ح_٤ = ٨$	...	...

ويرمز إلى الحد النوني في المتتابعة بالرمز $ح_n$ حيث $n \in \mathbb{N}$ وهي تعبر عن رتبة الحد.

تعريف:

المتتالية الحقيقية هي دالة حقيقية مجالها مجموعة الأعداد الصحيحة الموجبة أو مجموعة جزئية منها مرتبة على الصورة $\{١، ٢، ٣، ٤، \dots، م\}$ ومجالها المقابل مجموعة الأعداد الحقيقية $ح$.

ملاحظة: يمكن التعبير عن المتتالية بكتابة حدودها $(ح_١، ح_٢، ح_٣، \dots)$

ويمكن الحصول على حدود المتتالية من صور عناصر مجال المتتالية.

هل تعلم:

ليس من الضروري أن تكون جميع حدود المتتالية مختلفة. فمثلاً المتتابعة ٢، ٢، ٢، ٢، ... حيث $ح_n = ٢$ جميع حدودها متساوية وهذه تسمى متتابعة ثابتة.

معلومة رياضية:

يستخدم الرمز $(ح_n)$ للتعبير عن المتتابعة. بينما يعبر $ح_n$ عن الحد النوني لهذه المتتابعة.

مثال (٢)

لتكن الدالة $t: \{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $t(n) = n^2$
بين في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.
الحل:

ت دالة مجالها مجموعة جزئية مرتبة من $\mathbb{R}$ وتبدأ بالعدد ١ وبالصورة $\{1, 2, 3, \dots, m\}$.
ت متتالية.

٥	٤	٣	٢	١	ن
٢٥	١٦	٩	٤	١	ت(ن)

حدود المتتالية هي: ١، ٤، ٩، ١٦، ٢٥

حاول أن تحل

٢ لتكن الدالة $t: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \mathbb{R}$ حيث $t(n) = n^3 + 1$
بين في ما إذا كانت هذه الدالة متتالية، ثم أوجد حدودها.

تسمى المتتالية في مثال (٢) متتالية منتهية لأنه يمكن حصر عدد حدودها.

مثال (٣)

لتكن $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة بالقاعدة $t(n) = \frac{1}{n}$.
بين في ما إذا كانت t متتالية، ثم اكتب المتتالية مكتفياً بالحدود الثلاثة الأولى منها.
الحل:

ت دالة مجالها $\mathbb{N}$. ت متتالية.

ت(١) = ١، ت(٢) = $\frac{1}{2}$ ، ت(٣) = $\frac{1}{3}$.

أي أنه يمكن كتابة المتتالية على الصورة $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots)$

حاول أن تحل

٣ لتكن $t: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ دالة معرفة بالقاعدة $t(n) = \frac{n}{n+1}$.
بين في ما إذا كانت t متتالية، ثم أوجد الحدود الثلاثة الأولى منها.

تسمى المتتالية في مثال (٣) متتالية غير منتهية لأن مجالها $\mathbb{R}^+$.

الصيغة الارتدادية Recursive Formula

تعرف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة ويمكن اعتبارها حد عام للمتتالية. في مثال (١) كان النمط ارتدادياً لأن ارتفاع الكرة بعد كل اصطدام بالأرض يساوي ٨٠٪ من الارتفاع الذي يسبقه مباشرة. الصيغة الارتدادية التي تصف ارتفاع الكرة هي $ح_n = ٠,٨ \times ح_{n-١}$ مع $ح_١ = ١٢,٥$ حيث n عدد طبيعي أكبر من ١.

مثال (٤)

أ صف النمط الذي يسمح بإيجاد الحد التالي من المتتالية (٦، ١، -٤، -٩، ...).

ب أوجد الحدين الخامس والسادس ($ح_٥$ ، $ح_٦$) من هذه المتتالية.

الحل:

أ نحصل على أي حد من المتتالية بطرح ٥ من الحد الذي يسبقه مباشرة.

$$١ = ٥ - ٤، \quad ٤ = ٥ - ١، \quad ٩ = ٤ - ٥، \quad \dots$$

∴ النمط ارتدادي

∴ الصيغة الارتدادية هي: $ح_n = ح_{n-١} - ٥$ مع $ح_١ = ٦$

ب بما أن $ح_١ = ٦$ ، $ح_٢ = ١$ ، $ح_٣ = ٤$ ، $ح_٤ = ٩$ ، $ح_٥ = ١٤$ ، $ح_٦ = ١٩$.

$$ح_٦ = ح_٥ - ٥ = ١٤ - ٥ = ٩$$

حاول أن تحل

٤ اكتب الصيغة الارتدادية (الحد العام) مما يلي ثم أوجد الحد التالي:

ب (٤٣، ٤١، ٣٩، ٣٧، ٣٥، ...)

أ (-٢، -١، ٠، ١، ٢، ...)

د $\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \dots\right)$

ج (٤٠، ٢٠، ١٠، ٥، $\frac{5}{2}$ ، ...)

الصيغة الصريحة (الحد النوني للمتتالية) Explicit Formula

يمكنك أحياناً معرفة قيمة الحد في متتالية دون معرفة الحد الذي يسبقه. بدلاً منه يمكنك استخدام عدد الحدود لحساب قيمة الحد. الصيغة التي تعبر عن الحد النوني بدلالة n تسمى صيغة صريحة.

مثال (٥) الهندسة

يمثل الجدول التالي أطوال أضلاع المربعات ومحيطاتها.

الحد	ح _١	ح _٢	ح _٣	ح _٤	ح _٥	ح _٦	ح _٧
طول ضلع المربع	١	٢	٣	٤	٥	٦	...
المحيط	٤	٨	١٢	١٦	٢٠	٢٤	...

أ في كل متتالية، أوجد الحد التالي (ح_٧) والحد الرابع والعشرين (ح_{٢٤}).

ب اكتب صيغة صريحة لكل متتالية.

الحل:

أ في المتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع، كل حد يساوي قيمة رتبته، وبالتالي ح_٧ = ٧، ح_{٢٤} = ٢٤.

في المتتالية الخاصة بالمحيط، كل حد يساوي أربعة أمثال قيمة رتبته، وبالتالي ح_٧ = ٧ × ٤ = ٢٨.
ح_{٢٤} = ٢٤ × ٤ = ٩٦.

ب الصيغة الصريحة للمتتالية الخاصة بأطوال أضلاع المربع هي ح_ن = ن،

والصيغة الصريحة الخاصة بالمحيط هي: ح_ن = ٤ن.

حاول أن تحل

٥ أ في المثال (٥) اكتب الحدود الستة الأولى للمتتالية التي تبين مساحة المربع.

ب اكتب الصيغة الصريحة لهذه المتتالية.

٦ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) لكل متتالية في ما يلي، ثم أوجد ح_{١٢}.

أ (٣، ٧، ١١، ١٥، ١٩، ٢٣)

ب (٤، ٧، ١٠، ١٣، ١٦، ...)

ج $\left(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{4}, -1, -\frac{5}{4}, \dots\right)$

مثال (٦)

اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٢، ٥، ١٠، ١٧، ٢٦، ...).
الحل:

$$\begin{aligned} 1 + 2^2 &= 5 = {}_2C \\ 1 + 2^4 &= 17 = {}_4C \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 1 + 2^1 &= 2 = {}_1C \\ 1 + 2^3 &= 10 = {}_3C \\ 1 + 2^5 &= 26 = {}_5C \end{aligned}$$

الصيغة الصريحة هي ${}_nC = 1 + 2^n$.

حاول أن تحل

٧ اكتب الصيغة الصريحة (الحد النوني) للمتتالية (٠، ٣، ٨، ١٥، ٢٤، ...).

مثال (٧) صنع متتالية

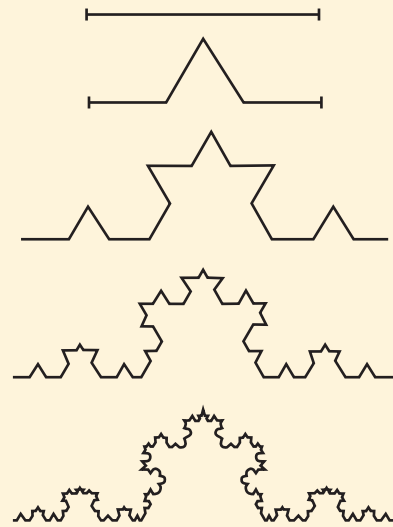
لايجاد ضلع من «رقعة كوش» Koch snowflake، استبدل كل --- بـ --- .

أ ارسم الأشكال الأربعة الأولى من النمط.

ب اكتب عدد القطع في كل شكل من أ أعلاه على صورة متتالية.

ج توقع الحد التالي من المتتالية ثم فسر اختيارك.

الحل:



أ

ب في الشكل الأول قطعة واحدة (١)

في الشكل الثاني ٤ قطع (٤)

في الشكل الثالث ١٦ قطعة (١٦)

في الشكل الرابع ٦٤ قطعة (٦٤)

∴ المتتالية (١، ٤، ١٦، ٦٤، ...)

ج كل حد يساوي ٤ أمثال الحد السابق.

الحد التالي = $64 \times 4 = 256$. يوجد ٢٥٦ قطعة في الشكل

التالي أي الحد الخامس من المتتالية = ٢٥٦.

حاول أن تحل

٨ صف كل نمط وأوجد الحدود الثلاثة التالية.

أ ٢٧، ٣٤، ٤١، ٤٨، ...

ب ٢٤٣، ٨١، ٢٧، ٩، ...

مثال (٨) متتالية فيبوناتشي Fibonacci Sequence

الصيغة الارتدادية لمتتالية فيبوناتشي هي: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ حيث $F_1 = 1$ ، $F_2 = 1$.
استخدم الصيغة الارتدادية لإيجاد الحدود السبعة الأولى من المتتالية ثم اكتب المتتالية.

استخدم الصيغة الارتدادية لإيجاد الحدود السبعة الأولى من المتتالية ثم اكتب المتتالية.

الحل:

ف = ۱

ف = ۱

۲ = ۱ + ۱ = ف + ف = ف

$$3 = 2 + 1 = \text{ف} + \text{ف} = \text{ف}$$

$$5 = 3 + 2 = \text{ف} + \text{ف} = \text{ف}$$

$$8 = 5 + 3 = \text{ف} + \text{ف} = \text{ف}$$

$$۱۳ = ۸ + ۵ = \text{ف} + \text{ف} = \text{ف}$$

∴ متتالية فیوناتشی هی $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, 610, 987, 1597, 2584, 4181, 6765, 10946, 17711, 28657, 46368, 75025, 121393, 196418, 317811, 514229, 832040, 1346269, 2178309, 3524578, 5702887, 9227465, 14930352, 24157817, 39088352, 63245985, 102334152, 165580147, 267914299, 433494446, 701408745, 1134903191, 1836311936, 2971215127, 4807527163, 7778732280, 12586269025, 20365538144, 32951285171, 53317014906, 86267571277, 139583544753, 225851433717, 365435296160, 591286729877, 956722026585, 1553509220762, 2511235467797, 4064744688562, 6576000235660, 10638501350687, 17214700576447, 27853201812137, 45067921687824, 72923782680961, 118087733566645, 191015028144226, 309083801495447, 500147050391413, 809114913091210, 1309060535469358, 2119176147560569, 3428336682651827, 5547507720221386, 8966664397872213, 14473835974494099, 23437501659886316, 37911337634378415, 61348839494264731, 99260137068742147, 160608976562911878, 260868613681476525, 421476590244388362, 682345566826304887, 1103824161468793212, 1786169728195108099, 2890093889663901311, 4676263617859009410, 7566357496054110721, 12242621163813119131, 19808978660672129542, 32051599824485248673, 51864220988298367804, 83915819648883616377, 135767440627414815021, 219683652276295931398, 355450862925180746420, 575134515201476661419, 930618178126662592839, 1505752693328138254258, 2436370871454800846097, 3942123564782938440936, 6378494436241079287195, 10314865307703917708131, 16693359743944996149326, 27008225051648915436521, 43691584795592913585847, 70700810437241909732368, 114392395232834823318215, 185093205669076732950583, 299485598098318642682900, 484577993330153466001115, 784061198999472398951698, 1268539192329625864952813, 2052601190328098262904411, 3321140382657724161856004, 5373741574987350026808815, 8694881967645074188764819, 14068623542632324215573634, 22763405510319674398382453, 36832229452951998614147267, 59595634963271672812530420, 96427864416223667030677687, 156023499379495665644818107, 252451364242719337657395527, 408474863622215003688073114, 660926262961710671345468641, 1069399126584425679002863755, 1730325389546145682650232396, 2799724516130570701653100151, 4529950895676716384253332547, 7329676411807287066903564700, 11859627307483997768556897247, 19189581199290713853760461947, 31049208506778000622314059194, 50238835814261914390870956441, 81388444321039912159425015635, 131627280135301826550239072076, 213015724456341740941103987517, 344643004591643557491343059593, 557658729047945298432547047110, 902281733639588855923690106696, 1459939962687534054415237153805, 2362121696327122910338777260401, 3821903429014657004753967414297, 6184025125341780915092644674700, 10005928554356437919846611835096, 16188053679698218835139579100000, 26193982234054655754986246514896, 42382035893753093674125825614992, 68575989562851312430112072129888, 110958025456604406104237897744884, 179533915019455718534350019874780, 290491940476060124638587917619664, 469925855495464532742837937464544, 760417765971524657381425857339524, 1230343621467089190124263794804068, 1990761387438613814505701732143612, 3221105008905703004629965526952680, 5211866396344316819135667259096292, 8432967405250019823765632785948952, 13644833701594336643901300045045244, 22077799096844356463036932804141536, 35722632798438693286938233049186780, 57799431895333050130974165853328316, 93522164693771743417912398892515096, 151321606589104793548886564745843412, 244843771282876536965800963638358508, 396165377871981330504687528484173604, 640987049154858024470488492123017016, 1037150426026839355475176020607190620, 1678137475181697380245664512730207636, 2715287891208536735720840533337398256, 4393425366390234116196505046067605892, 7108712257598831845917345579405004148, 11502137623989065962113850625472610040, 18605559881587897778030396194877614188, 30107697505576963740144246820349624228, 48712835387166029702258142915227238416, 78820532992744893442396389735576862604, 127528368379910863144654532650804001020, 206348901372654892847050822386380863624, 333877269362565756001705355037184864644, 540226170735220648848756177423565865668, 87410$

حاول أن تحل

٩ اختر عددين متساويين غير العدد ١، ١ واكتب الحدود الخمسة الأولى لمتتالية مشابهة لمتتالية فيبوناتشي.

غالبًا ما نجد أعداد فيوناتشي في الطبيعة.



زهرة البق
٨ بتلات: الحد السادس



الحوذان الزاحف

٥ بتلات: الحد الخامس



التريليوم
٣ بتلات: الحد الرابع

بالنسبة إلى زهرة تباع الشمس، عند حساب عدد بتلاتها من الداخل إلى الخارج سنجدها: ١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ...

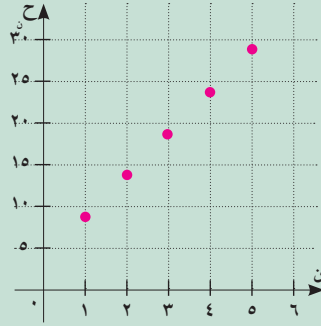
المتتالية الحسابية

Arithmetic Sequence

سوف تتعلم

- المتتالية الحسابية وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الحسابية
- الأوساط الحسابية
- مجموع (ن) حدًا الأولى من حدود المتتالية الحسابية

ح_١ ← ٩
ح_٢ ← ١٤
ح_٣ ← ١٩
ح_٤ ← ٢٤
ح_٥ ← ٢٩



عمل تعاوني

- أوجد الحد السادس من المتتالية المبينة جهة اليسار.
ب) اكتب صيغة للحد السادس مستخدمًا الحد الخامس.
ج) اكتب صيغة ارتدادية للمتتالية.
- في المتتالية (٩، ١٤، ١٩، ٢٤، ٢٩، ...)، ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة هو مقدار ثابت.
أ) كون متتاليتين، إحداهما بإضافة عدد ثابت والأخرى بطرح العدد الثابت نفسه من كل حد من حدود المتتالية الأصلية.
ب) أوجد ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة في كل متتابعة حصلت عليها. ماذا تلاحظ.
ج) ارسم في شكل بياني واحد العلاقة بين $ح_n$ للمتتالية الأصلية والمتتاليات التي حصلت عليها في ٢ - أ.

تعريف:

المتتالية (المتتابعة) الحسابية هي متتالية ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة عددًا ثابتًا. يسمى هذا الناتج أساس المتتالية ويرمز إليه بالرمز s . وعلى ذلك $ح_{n+1} - ح_n = s$ أو $ح_{n+1} = ح_n + s$.

أي أنه يمكن الحصول على أي حد من حدود المتتالية الحسابية (بعد الحد الأول) وذلك بإضافة s إلى الحد الذي يسبقه مباشرة.

مثال (١)

بين أن المتتالية (٦، ١٢، ١٨، ٢٤) هي متتالية حسابية.

الحل:

$$١٢ - ٦ = ١٨ - ١٢ = ٢٤ - ١٨ = ٦$$

ناتج طرح كل حد من الحد الذي يليه مباشرة يساوي ٦. لاحظ أن أساس المتتالية $s = ٦$.
∴ المتتالية حسابية.

حاول أن تحل

- هل المتتاليتان التاليتان حسابيتان؟ إذا كانتا كذلك، فأوجد أساس كل منهما.
أ) المتتالية (٢، ٥، ٧، ١٢)
ب) المتتالية (٤٨، ٤٥، ٤٢، ٣٩)

مثال (٢)

إذا كان $ح_١ = ٥$ ، $س = ٧$ في متتالية حسابية فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

الحل:

$$ح_١ = ٥$$

$$ح_٢ = ح_١ + س = ٥ + ٧ = ١٢$$

$$ح_٣ = ح_٢ + س = ١٢ + ٧ = ١٩$$

الحدود الستة الأولى هي: $٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠$

وتكون المتتالية: $(ح_١) = (٥، ١٢، ١٩، ٢٦، ٣٣، ٤٠، \dots)$

حاول أن تحل

٢ إذا كان $ح_١ = ٤$ ، $س = -٣$ في متتالية حسابية، فاكتب الحدود الستة الأولى من المتتالية.

General Term of an Arithmetic Sequence

الحد النوني للمتتالية الحسابية

إذا كان الحد الأول في المتتالية الحسابية $(ح_١)$ هو $ح_١$ وأساس المتتالية يساوي $س$. واعتبرنا الحد النوني هو $ح_١$ ، فمن تعريف المتتالية الحسابية:

$$ح_٢ = ح_١ + س$$

$$ح_٣ = ح_٢ + س$$

$$ح_٤ = ح_٣ + س$$

وبصفة عامة

$$ح_١ = ح_١ + س(١ - ١)$$

$$ح_١ = ح_١ + س(١ - ١) : ك \exists ص_+$$

$$س(١ - ك) = ح_١ - ح_١$$

$$س(١ - ك) = ح_١ - ح_١$$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الحسابية:

$$(ح_١، ح_٢، ح_٣، ح_٤، \dots، ح_١ + س(١ - ١)، \dots)$$

$$س = \frac{ح_١ - ح_١}{١ - ١} : ك \neq ١$$

ملاحظة:

ن تمثل رتبة الحد $ح_١$ أما $ح_١$ فتمثل قيمة الحد، فمثلاً:
 $ح_١ = ٣٥$ تعني أن قيمة
الحد السابع تساوي ٣٥.

مثال (٣)

أوجد الحد العاشر والحد المائة من المتتالية الحسابية (٨، ٦، ٤، ...).

الحل:

$$ح_٨ = ٨ - ٦ = ٢، ح_٩ = ٨ - ٦ = ٢$$

$$ح_{١٠} = ح_٩ + ٢ = ١٠$$

$$ح_{١٠} = ١٠ = ٨ + ٢(٩ - ٨) \quad \text{أي أن } ح_{١٠} = ١٠$$

$$ح_{١٠} = ١٠ = ٨ + ٢(٩ - ٨) \quad \text{أو} \quad ح_{١٠} = ١٠ = ٨ + ٢(٩ - ٨)$$

$$١٠ = ٨ + ٢(٩ - ٨) \quad \text{أو} \quad ١٠ = ٨ + ٢(٩ - ٨)$$

$$١٩٠ = ١٠ + ٢(٩٩ - ٨) \quad \text{أو} \quad ١٩٠ = ١٠ + ٢(٩٩ - ٨)$$

$$١٩٠ = ١٠ + ٢(٩٩ - ٨) \quad \text{أي أن } ح_{٩٩} = ١٩٠$$

حاول أن تحل

٣ في المتتالية الحسابية ح_٤ = ٤، ح_٥ = ٣.

أوجد ح_{١٢}.

مثال (٤)

أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٩٩ من المتتالية الحسابية (٧، ٩، ١١، ...).

الحل:

$$ح_٧ = ٧، ح_٨ = ٩، ح_٩ = ١١$$

$$ح_٩ = ١١ = ٧ + ٢(٩ - ٧)$$

$$١١ = ٧ + ٢(٩ - ٧)$$

$$١١ = ٧ + ٢(٩ - ٧)$$

$$١١ = ٧ + ٢(٩ - ٧)$$

أي أن الحد من المتتالية الحسابية الذي قيمته ٩٩ هو ح_{٩٩}.

حاول أن تحل

٤ أ في المتتالية الحسابية (٢، ٥، ٨، ١١، ...): أوجد رتبة الحد الذي قيمته ٧١.

ب أوجد عدد حدود المتتالية الحسابية (٧، ١١، ١٥، ...، ٤٧).

مثال (۵)

في المتتالية (ح) حيث $u_n = 3 - n$ لكل $n \in \mathbb{N}$ ، أثبت أن المتتالية حسابية.

الحل:

$$ح = ۷ن - ۳$$

$$4 + nV = 3 - (1 + n)V =$$

$$V = (3 - 5V) - (4 + 5V) = -2 - 10V$$

= مقدارًا ثابتًا

∴ المتتالية (ح) حيث $ح = ٧ - ٣$ متتالية حسابية.

حاول أن تحل

٥ في المتتالية (ح_ن) حيث ح_ن = ٣ن + ٥ : ن ∃ ص₊
أثبت أن المتتالية حسابية.

مثال (۶)

إذا كان الحد الخامس من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد الثامن يساوي ١٥ ، فأوجد أساس المتتالية.

الطريقة الأولى

$$s(1 - n) + \tau = \tau$$

$$s\xi + \tau = \tau$$

$$(1) \quad q = 5\epsilon + \tau \therefore$$

$$SV + \tau = \tau$$

$$(2) \quad 10 = 5V + 2 \therefore$$

بطرح (١) من (٢)

$$7 = 53 \therefore$$

$$Y = S \therefore$$

الطريقة الثانية

$$s(j - n) + \underset{s}{\underset{n}{\tau}} = \underset{n}{\tau}$$

$$10 = \tau, 9 = \tau$$

$$s \times (0 - 1) = 2 - 2$$

$$S^w = 9 - 10$$

$$5^3 = 6 \therefore$$

$$Y = S \therefore$$

إذاً، أساس المتتالية الحسابية هو ٢.

حاول أن تحل

٦ إذا كان الحد الثاني من متتالية حسابية يساوي ٩ والحد السادس يساوي -٣، فأوجد أساس المتتالية ثم أوجد المتتالية الحسابية مكتملاً بالحدود الأربعة الأولى منها.

مثال (٧)

بفرض أنك تشارك في سباق دراجات لدعم مشروع خيري. على المتسابق الأول تأمين مبلغ ٥ دنانير. وكل متسابق تالي يؤمن مبلغ يزيد ٥, ١ دينارًا عن المتسابق الذي يسبقه مباشرة. ما المبلغ الذي سيدفعه المتسابق الخامس والسبعون؟
الحل:

$$ح_١ = ٥, ح_٢ = ٥, ٦, ح_٣ = ٨, ... \text{ لماذا؟}$$

استخدام الصيغة الصريحة

التعويض

$$ح_n = ح_١ + (n - 1)d$$

$$ح_{٧٥} = ٥ + (٧٥ - 1) \times ١, ٥$$

$$ح_{٧٥} = ٥ + ٧٤ \times ١, ٥$$

$$= ١١٦$$

سيدفع المتسابق الخامس والسبعون ١١٦ دينارًا.

حاول أن تحل

٧ استخدم الصيغة الصريحة لإيجاد الحد الخامس والعشرين ($ح_{٢٥}$) من المتتالية الحسابية (٥, ١١, ١٧, ٢٣, ٢٩, ...).

Arithmetic Means

الأوساط الحسابية

إذا كانت أ، ب، ج متتالية حسابية حيث أ، ب، ج هي عناصر من ح (أعداد حقيقية):

$$\text{فإن: } ب - أ = ج - ب$$

$$٢ب = أ + ج$$

$$ب = \frac{أ + ج}{٢}$$

أي أن ب هو الوسط الحسابي للعددين أ، ج.

مثال (٨)

إذا كانت (٨٤، س، ١١٠) متتالية حسابية، فأوجد قيمة س.

الحل:

الحد س هو الوسط الحسابي بين ٨٤، ١١٠.

$$س = \frac{١١٠ + ٨٤}{٢} = ٩٧$$

حاول أن تحل

٨ أوجد قيمة ص من المتتالية الحسابية (٤٣، ص، ٥٧).

بصورة عامة

إذا كانت (أ، ب، ج، د، ...، ف، ص) متتالية حسابية فإن ب، ج، د، ...، ف تسمى أوساطاً حسابية للعددين أ، ص. وتسمى عملية إيجاد الأوساط الحسابية إدخال أوساط حسابية بين العددين أ، ص.

مثال (٩)

أدخل ٥ أوساط حسابية بين ٢٣، ٦٥.

الحل:

$$(٢٣، \blacksquare، \blacksquare، \blacksquare، \blacksquare، ٦٥)$$

$$٢٣ = ح_١، عدد الحدود: ٧ = ٢ + ٥، ح_٧ = ٦٥.$$

$$إذا \quad ح_٧ = ح_١ + ٦س$$

$$٦٥ = ٢٣ + ٦س$$

$$٤٢ = ٦س$$

$$٧ = س$$

الأوساط الحسابية هي ٣٠، ٣٧، ٤٤، ٥١، ٥٨.

حاول أن تحل

٩ أ أدخل ثلاثة أوساط حسابية بين -٩، ٣.

ب أدخل خمسة أوساط حسابية بين ١٣، ١.

مجموع ن حداً الأولى من حدود متتالية حسابية

Sum of The First n Terms of an Arithmetic Sequence

مجموع ن حداً الأولى من حدود متتالية حسابية (ح_١) يعطى بالقاعدة:

$$ج_n = \frac{n}{2} [٢ح_١ + (١ - n)س]$$

$$أو \quad ج_n = \frac{n}{2} (ح_١ + ح_n)$$

حيث ح_١ هو الحد الذي ترتيبه ن من المتتالية الحسابية وحدها الأول ح_١.

البرهان

ليكن S أساس المتتالية.

$$ج_1 = ح_1 + (س + ح_1) + (س^2 + ح_1) + \dots + (س^{n-1} + ح_1) + (س^n - ح_n) + (س - ح_n)$$

$$ج_2 = ح_2 + (س - ح_n) + (س^2 - ح_n) + \dots + (س^{n-1} - ح_n) + (س^2 + ح_1) + (س + ح_1) + ح_1$$

$$ج_2 = (س + ح_1) + (س^2 + ح_1) + \dots + (س^{n-1} + ح_1) + (س^2 - ح_n) + (س - ح_n) + (س^2 + ح_1) + (س + ح_1) + ح_1$$

$$ج_2 = (س + ح_1) + (س^2 + ح_1) + \dots + (س^{n-1} + ح_1) + (س^2 - ح_n) + (س - ح_n) + (س^2 + ح_1) + (س + ح_1) + ح_1$$

$$ج_2 = (س + ح_1) + (س^2 + ح_1) + \dots + (س^{n-1} + ح_1) + (س^2 - ح_n) + (س - ح_n) + (س^2 + ح_1) + (س + ح_1) + ح_1$$

$$ج_2 = (س + ح_1) + (س^2 + ح_1) + \dots + (س^{n-1} + ح_1) + (س^2 - ح_n) + (س - ح_n) + (س^2 + ح_1) + (س + ح_1) + ح_1$$

$$ج_2 = (س + ح_1) + (س^2 + ح_1) + \dots + (س^{n-1} + ح_1) + (س^2 - ح_n) + (س - ح_n) + (س^2 + ح_1) + (س + ح_1) + ح_1$$

$$ج_2 = (س + ح_1) + (س^2 + ح_1) + \dots + (س^{n-1} + ح_1) + (س^2 - ح_n) + (س - ح_n) + (س^2 + ح_1) + (س + ح_1) + ح_1$$

القانون (١): يعطي مجموع حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والحد الأخير.

القانون (٢): يعطي مجموع n حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية بمعلومية الحد الأول والأساس S .

مثال (١٠)

أوجد مجموع العشرين حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية التي حدها الأول ١٠ وحدها العشرون ٥٠٠.

الحل:

$$ح_1 = 10, ح_{20} = 500, n = 20$$

$$ج_n = \frac{n}{2} (ح_1 + ح_n)$$

$$ج_{20} = \frac{20}{2} (10 + 500) = 5100$$

حاول أن تحل

١٠ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ١٢ وحدها العاشر ٢٤.

مثال (١١)

أوجد مجموع الستة عشر حدًا الأولى من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ١٥ وأساسها ٧.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ح} &= 15, \text{س} = 7, \text{ن} = 16 \\ \text{ج} &= \frac{\text{ن}}{2} [2\text{ح} + (\text{ن} - 1)\text{س}] \\ \text{ج} &= \frac{16}{2} (2 \times 15 + 15 \times 7) \\ \text{ج} &= 8(105 + 30) \\ \text{ج} &= 1080 \end{aligned}$$

حاول أن تحل

- ١١ أ متتالية حسابية حدها الأول ٧ وأساسها ٤. أوجد مجموع أول خمسة وعشرين حدًا منها.
- ب أوجد مجموع حدود المتتالية الحسابية (٥، ٧، ٩، ١١، ١٣، ١٥).

مثال (١٢)

كم حدًا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (١٠، ١٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٤٥٠؟

الحل:

$$\begin{aligned} \text{ح} &= 10, \text{س} = 5, \text{ج} = 450 \\ \text{ج} &= \frac{\text{ن}}{2} [2\text{ح} + (\text{ن} - 1)\text{س}] \\ 450 &= \frac{\text{ن}}{2} [20 + 5(\text{ن} - 1)] \\ \frac{\text{ن}}{2} (20 + 5\text{ن} - 5) &= 450 \\ \frac{\text{ن}}{2} (15 + 5\text{ن}) &= 450 \\ 15\text{ن} + 5\text{ن}^2 &= 900 \\ \text{ن}^2 + 3\text{ن} - 180 &= 0 \\ (\text{ن} + 15)(\text{ن} - 12) &= 0 \\ \text{ن} = -15, \text{ن} = 12 \end{aligned}$$

وحيث إن $\text{ن} = -15$ مرفوض لأن $\text{ن} \geq 1$

∴ $\text{ن} = 12$ أي أن عدد الحدود المطلوبة هو ١٢ حدًا.

حاول أن تحل

- ١٢ أ كم حدًا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣ ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ٩٤٨؟
 ب كم حدًا يلزم أخذه من المتتالية الحسابية (٣٠، ٢٥، ٢٠، ...) ابتداء من الحد الأول ليكون المجموع ١٠٠؟

مثال (١٣)

أراد فهد حفر بئر في مزرعته. تبلغ كلفة حفر المتر الأول ٧ دنانير، وتزيد كلفة حفر كل متر دينارين عن كلفة حفر المتر السابق. دفع فهد للمتعهد ٤٣٢ دينارًا. ما عمق البئر الذي حفر؟

الحل: بما أن الزيادة ثابتة وهي ديناران، إذا المتتالية حسابية. ليكن n المبلغ المدفوع لقاء حفر n متر.

$$n = \frac{n}{2} [2 + (n-1) \times 2]$$

$$432 = \frac{n}{2} (2 + 2n - 2)$$

$$432 = n^2$$

$$n^2 = 432$$

$$n = \sqrt{432} = 20.78$$

$$n = 20.78 \text{ (مرفوض)، } n = 18$$

يبلغ عمق البئر ١٨ مترًا.



حاول أن تحل

- ١٣ في المثال (١٣)، كم ستبلغ كلفة الحفر بالدينار إذا بلغ عمق البئر ٢٥ مترًا؟

المتتالية الهندسية Geometric Sequence

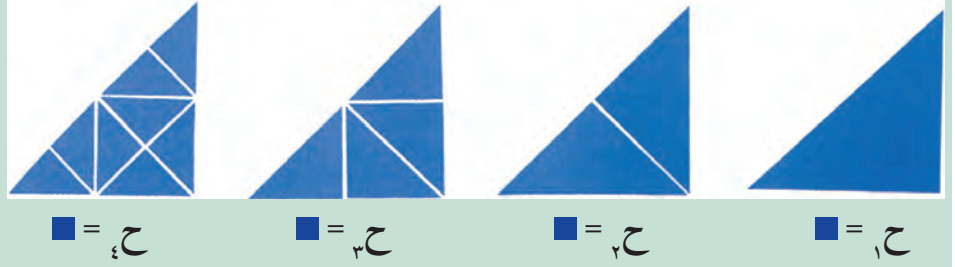
سوف تتعلم

- المتتالية الهندسية وأساسها
- الحد النوني للمتتالية الهندسية
- الأوساط الهندسية
- مجموع (ن) حدًا الأولى من حدود متتالية هندسية



عمل تعاوني

- ارسم مثلثًا قائم الزاوية ومتطابق الضلعين.
 - قص المثلث إلى مثلثين قائمي الزاوية، وكل منهما متطابق الضلعين.
- كرّر الشيء نفسه كما في الشكل وأوجد عدد المثلثات في كل مرة.



هل الحدود الناتجة تكون متتالية حسابية؟ وإذا لم تكن كذلك، فلماذا؟

ماذا تلاحظ في العلاقة بين الحدود الناتجة؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_6$ ؟

هل يمكنك إيجاد الحد السادس $ح_6$ بدلالة الحد الخامس $ح_5$ ؟

هل يمكنك إيجاد الحد النوني $ح_n$ بدلالة الحد $ح_1$ ؟

جملة مفتوحة:

في المتتالية السابقة، اضرب كل حد من حدود المتتالية في عدد ثابت غير صفري واكتب المتتالية الجديدة الناتجة. ما العلاقة التي تجدها بين المتتاليتين؟

لنأخذ المتتالية (١، ٢، ٤، ٨، ١٦، ...). لاحظ النمط المتمثل في كل حد وسابقه.

تعريف:

المتتالية الهندسية: هي متتالية ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة، يساوي عددًا حقيقيًا ثابتًا غير صفري،

$$\text{فيكون } r = \frac{ح_{n+1}}{ح_n} \quad \text{حيث } ح_n \neq 0.$$

لكل $n \in \mathbb{N}$ ، r عدد حقيقي ثابت يسمى أساس المتتالية الهندسية common ratio

فمثلاً، المتتالية (٥، ١٠، ٢٠، ٤٠) متتالية هندسية.
أما (٥، ١٠، ١٥، ٢٠، ...) فليست متتالية هندسية.
لماذا لا يمكن لأي حد في المتتالية الهندسية أن يساوي الصفر؟

مثال (١)

لتكن (ح_ن) متتالية حيث ح_٣ = ٣.

أ) اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية (ح_ن).

ب) أثبت أن (ح_ن) متتالية هندسية.

الحل:

$$\begin{aligned} \text{أ) } & \text{ح}_١ = ٣ = ١٣ = ٣ \\ & \text{ح}_٢ = ٣ = ٢٣ = ٩ \\ & \text{ح}_٣ = ٣ = ٣٣ = ٢٧ \\ & \text{ح}_٤ = ٣ = ٤٣ = ٨١ \\ & \text{ح}_٥ = ٣ = ٥٣ = ٢٤٣ \\ & \text{الحدود الخمسة الأولى هي: } ٣, ٩, ٢٧, ٨١, ٢٤٣. \end{aligned}$$

∴ المتتالية (ح_ن) = (٣، ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ...)

$$\text{ب) } \frac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣} = \frac{\text{ح}_١}{\text{ح}_٢} = \frac{٣}{٩} = \frac{١}{٣} \quad (\text{مقدار ثابت})$$

∴ المتتالية هندسية.

حاول أن تحل

١) أثبت أن المتتالية (ح_ن) حيث ح_٢ = (٢)^ن، هي متتالية هندسية.

General term of an Geometrie Sequence

الحد النوني للمتتالية الهندسية

إذا كانت (ح_ن) متتالية هندسية أساسها $r \neq ٠$ فإن $\text{ح}_١ = \text{ح}_١ \times r^{١-١}$
حيث ح_١ هو الحد الأول، ح_٢ هو الحد النوني، r هو أساس المتتالية الهندسية.

$$\text{ويكون } \text{ح}_٢ = \text{ح}_١ \times r, \text{ ح}_٣ = \text{ح}_٢ \times r, \text{ ح}_٤ = \text{ح}_٣ \times r, \dots$$

وتكون الصورة العامة للمتتالية الهندسية ح_١، ح_٢، ح_٣، ح_٤، ...، ح_{١-ن}، ...

$$\text{إذا كان الحد المعروف ح}_ك \text{ فإن ح}_ك = \text{ح}_١ \times r^{ك-١}$$

$$\text{ومنه يكون } \frac{\text{ح}_٣}{\text{ح}_٢} = \frac{\text{ح}_٢ \times r}{\text{ح}_١ \times r} = \frac{\text{ح}_٢}{\text{ح}_١} = r$$

$$\text{أي أن } \text{ح}_٣ = \text{ح}_٢ \times r$$

مثال (٢)

اكتب الحدود الخمسة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٩ وأساسها ٣.
الحل:

$$ح_١ = ٩ ، ر = ٣$$

$$ح_٢ = ر \times ح_١ = ٣ \times ٩ = ٢٧$$

$$ح_٣ = ر \times ح_٢ = ٣ \times ٢٧ = ٨١$$

$$ح_٤ = ر \times ح_٣ = ٣ \times ٨١ = ٢٤٣$$

$$ح_٥ = ر \times ح_٤ = ٣ \times ٢٤٣ = ٧٢٩$$

∴ الحدود الخمسة الأولى هي: ٩، ٢٧، ٨١، ٢٤٣، ٧٢٩

حاول أن تحل

٢ اكتب الحدود الأربعة الأولى من المتتالية الهندسية التي حدها الأول ٥ وأساسها ٣.

مثال (٣)

متتالية هندسية حدها الأول ٤ وحدها السادس ١٢٨ . اكتب المتتالية الهندسية مكتفياً بالحدود الأربعة الأولى منها.
الحل:

$$الحد الأول: ح_١ = ٤ ، الحد السادس: ح_٦ = ١٢٨$$

$$نعلم أن ح_٦ = ح_١ \times ر^{٦-١}$$

$$ح_٦ = ح_١ \times ر^٥$$

$$١٢٨ = ٤ \times ر^٥$$

$$٣٢ = ر^٥ ∴ ر = ٢$$

∴ الحدود الأربعة الأولى هي: ٤، ٨، ١٦، ٣٢.

المتتالية هي: (٤، ٨، ١٦، ٣٢، ...)

حاول أن تحل

٣ متتالية هندسية حدها الأول ٢٧ وحدها الخامس $\frac{1}{٣}$. اكتب المتتالية مكتفياً بالحدود الخمسة الأولى منها.

مثال (٤)

متتالية هندسية حدودها موجبة، ومجموع الحدين الأول والثاني ٣٦، وحدها الثالث يساوي ٣. أوجد الحد الخامس.

الحل:

في المتتالية الهندسية : $ح_n = ح_1 \times ٣^{n-١}$ ، $ح_{٣٦} = ح_١ + ٣$ ، $ح_٣ = ٣$

$$36 = \sqrt{18} + \sqrt{18} \therefore$$

$$36 = (s + 1) \cdot 2$$

$${}_2^3\mathcal{S} = {}_2^2\mathcal{S}, \mathcal{T} = {}_3\mathcal{T}$$

$$\frac{3}{36} = \frac{1}{(r+1) \cdot 12} \text{ بالقسمة}$$

$$\frac{1}{12} = \frac{s^2}{s+1}$$

$$1 + s = {}^2s12$$

$$1 = 1 - r - \frac{1}{2} r^2$$

$$v = (1 - \sqrt{3})(1 + \sqrt{4})$$

$$r = \frac{1}{4} - \text{(مرفوض لأن الحدود موجبة)} \quad \text{أو} \quad r = \frac{1}{3}.$$

$${}^2\mathcal{I} \times {}^3\mathcal{C} = {}^0\mathcal{C}$$

$$\frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3}\right) \times 3 =$$

الحد الخامس = $\frac{1}{3}$.

حاول أن تحل

٤ (ح) متتالية هندسية، مجموع حديها الأول والثاني يساوي ٢، ومجموع حديها الثالث والرابع يساوي ٨. أوجد الحد الأول والحد الخامس منها.

Geometric Means Between two Numbers

الأوساط الهندسية بين عددين

إذا كَوَّنت a, b ، ج متتالية هندسية حيث a, b ، ج أعداد حقيقية غير صفرية وحيث $a < 0$ فإن: $\frac{a}{b} = \frac{b}{a}$ ومنه $b^2 = a^2$ $\therefore b = \pm \sqrt{a^2}$.

يسمى b وسطاً هندسياً بين العددين a, b ، ج، أي أن: $\sqrt{a^2}$ أو $-\sqrt{a^2}$ وسطاً هندسياً بين العددين a, b ، ج.

مثال (٥)

أوجد وسطاً هندسياً بين العددين $\frac{1}{3}$ ، 27 .

الحل:

$$\text{الوسط الهندسي: } \sqrt{27 \times \frac{1}{3}} = \sqrt{9} = 3$$

$$\text{أو الوسط الهندسي: } -\sqrt{27 \times \frac{1}{3}} = -\sqrt{9} = -3$$

حاول أن تحل

٥ أوجد وسطاً هندسياً بين العددين في كل ما يلي:

ج ٣ ، ١٨، ٧٥

ب ٢٠ ، ٨٠

أ ٣- ، ٧٢-

إثرائي

مثال (٦)

عندما يتأرجح ولد دون تأثير قوة خارجية فإن مقاومة الهواء تؤدي إلى تناقص في طول قوس التأرجح. ويشكل التناقص في طول القوس متتالية هندسية. أوجد الوسط الهندسي لطولي القوسين (لأقرب عدد كلي).

الحل:

$$\text{الوسط الهندسي} = \sqrt{2,8 \times 3,2} = \sqrt{8,96}$$

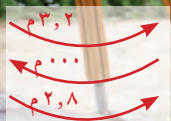
$$= \sqrt{8,96}$$

$$\approx 3$$

الوسط الهندسي لطولي القوسين يساوي حوالي ٣ أمتار.

حاول أن تحل

٦ يتدرب عماد على القفزة الثلاثية. حقق في المحاولة الأولى ٨، ٨ أمتار وفي المحاولة الثانية ٢، ٩ أمتار. ما الوسط الهندسي لطولي القفرتين؟



بصورة عامة

في المتتالية الهندسية (ل، ب، ج، د، ...، ك، ل). تسمى ب، ج، د، ...، ك أوساطاً هندسية للعددين الحقيقيين ل، ل. وتسمى عملية إيجاد ب، ج، د، ...، ك عملية إدخال أوساط هندسية بين العددين ل، ل.

مثال (٧)

أدخل خمسة أوساط هندسية موجبة بين العددين ٥١٢ ، ٨.

الحل: (٥١٢، ■، ■، ■، ■، ٨).

عدد حدود المتتالية الهندسية = عدد الأوساط + ٢.

$$٧ = ٢ + ٥ = \text{ن}$$

$$٥١٢ = \text{ح}_١$$

$$\text{ح}_٨ = ٨ \text{ أي أن } \text{ح}_٨ = ٨$$

$$\text{ح}_٨ = \text{ح}_١ \times r^{٨-١}$$

$$٨ = ٥١٢ \times r^٧$$

$$r^٧ = \frac{٨}{٥١٢} = \frac{١}{٦٤} = \left(\frac{١}{٢}\right)^٦$$

$$r = \frac{١}{٢} \text{ أو } r = -\frac{١}{٢} \text{ مرفوضة لأن الأوساط موجبة.}$$

الأوساط هي: ١٦، ٣٢، ٦٤، ١٢٨، ٢٥٦.

حاول أن تحل

٧ أدخل ثمانية أوساط هندسية بين ٢ ، ١٠٢٤.

مجموع ن حداً الأولى من متتالية هندسية Sum of n First Terms of a Geometric Sequence

قانون

إذا كانت (ح) متتالية هندسية، ج = ح_١ + ح_٢ + ح_٣ + ... + ح_ن هو مجموع ن حداً الأولى، فإن:

$$١ \quad \text{ج}_٨ = \text{ح}_١ \times \frac{١-r^{٨}}{١-r} \text{ أو } \text{ج}_٨ = \text{ح}_١ \times \frac{١-r^{٨}}{١-r}, \quad r \neq ١$$

$$٢ \quad \text{إذا كانت } r = ١ \text{ فإن } \text{ج}_٨ = \text{ح}_٨$$

البرهان

ليكن r أساس المتتالية.

$$\begin{aligned} \text{ج}_n &= \text{ح}_1 + \text{ح}_2 + \text{ح}_3 + \dots + \text{ح}_n \\ \text{ج}_n &= \text{ح}_1 + r\text{ح}_1 + r^2\text{ح}_1 + \dots + r^{n-1}\text{ح}_1 \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \text{ج}_n &= \text{ح}_1 + r\text{ح}_1 + r^2\text{ح}_1 + \dots + r^{n-1}\text{ح}_1 \\ \text{ج}_n &= \text{ح}_1 + r\text{ح}_1 + r^2\text{ح}_1 + \dots + r^{n-1}\text{ح}_1 \end{aligned} \quad (2) \quad \text{يضرب طرفي المعادلة (1) في } r \neq 0$$

بطرح (1) من (2) وبالتبسيط ينتج:

$$\begin{aligned} \text{ج}_n - \text{ج}_n &= \text{ج}_n - r\text{ج}_n \\ \text{ج}_n &= (1-r)\text{ح}_1 \\ \text{ج}_n &= \frac{1-r^n}{1-r} \times \text{ح}_1 \quad \text{أو} \quad \text{ج}_n = \frac{1-r^n}{1-r} \times \text{ح}_1, \quad r \neq 1 \end{aligned}$$

أما إذا كانت $r = 1$ فإن حدود المتتالية متساوية فيكون مجموع الحدود = قيمة الحد الأول مضروبة في عدد الحدود أي $\text{ج}_n = \text{ح}_1 \times n$.

مثال (٨)

أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية (٢، ٤، ٨، ...).

الحل:

$$\text{ح}_1 = 2, \quad r = \frac{\text{ح}_2}{\text{ح}_1} = \frac{4}{2} = 2, \quad n = 10$$

$$\text{ج}_n = \frac{1-r^n}{1-r} \times \text{ح}_1$$

$$\text{ج}_{10} = \frac{(1-2^{10}) \times 2}{(1-2)}$$

$$\text{ج}_{10} = 2 \times 1023 = 2046$$

حاول أن تحل

٨ أوجد مجموع الحدود الثمانية الأولى من المتتالية الهندسية (٣، ٩، ٢٧، ...).

مثال (٩)

الحد الأول من متتالية هندسية يساوي ٨ والحد الثالث منها يساوي $\frac{8}{9}$. أوجد مجموع الحدود الستة الأولى منها.
الحل: ∴ المتتالية هندسية

$$\therefore \text{ح}_3 = \text{ح}_1 \times r^2$$

$$8 = \frac{8}{9} \times r^2$$

$$r^2 = \frac{1}{9}$$

$$r = \frac{1}{3} \text{ أو } r = -\frac{1}{3}$$

$$\text{إذا كانت } r = \frac{1}{3}$$

$$\text{ج}_6 = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1}{\frac{1}{3} - 1} \times 8 =$$

$$\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^6 - 1}{\frac{2}{3}} \times 8 =$$

$$= \frac{2912}{243} \approx 11,98$$

$$\text{إذا كانت } r = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ج}_6 = \frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^6 - 1}{\left(-\frac{1}{3}\right) - 1} \times 8 =$$

$$\frac{\left(-\frac{1}{3}\right)^6 - 1}{\frac{4}{3}} \times 8 =$$

$$= \frac{1406}{243} \approx 5,992$$

حاول أن تحل

٩ أوجد مجموع الحدود العشرة الأولى من المتتالية الهندسية $(\dots, \frac{1}{4}, \blacksquare, 1, \blacksquare, 4)$

معلومات عامة:

Summation Symbol

رمز المجموع

ملاحظة:

في دراستنا للمجموع $\sum$ سنقتصر على الحالات التي تكون فيها n تبدأ من العدد ١ حيث $n \in \{1, 2, 3, \dots\}$ وهذا يمثل مجال المتتالية.

لكتابة مجموعة حدود المتتالية: $b_1 + b_2 + b_3 + \dots + b_n + \dots + b_k$ بطريقة مختصرة استخدم الرياضيون الحرف اليوناني $\sum$ (سيجما) على الشكل التالي: $\sum_{i=1}^k b_i$ يقرأ: مجموع الأعداد b_i من $n = 1$ إلى $n = k$

فمثلاً، المجموع: $\frac{5}{2} \times (1) + \frac{5}{2} \times (2) + \frac{5}{2} \times (3) + \dots + \frac{5}{2} \times (13)$ يكتب $\sum_{i=1}^{13} \frac{5}{2}$.

$$\sum_{i=1}^{13} \frac{5}{2} \quad \begin{array}{l} \text{الحد الأعلى} \\ \text{أكبر قيمة لـ } n \\ \text{الحد الأدنى} \\ \text{أصغر قيمة لـ } n \end{array}$$

الصيغة الصريحة للمتتالية $\rightarrow$

لكتابة: $1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 45$ نكتب $\sum_{i=1}^{45} i$
لكتابة: $1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \dots + 10^2$ نكتب $\sum_{i=1}^{10} i^2$

مثال (١٠)

أوجد قيمة $\sum_{i=1}^{100} i$.

الحل:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 100$$

(١، ٢، ٣، ...، ١٠٠) متتالية حسابية حدها الأول ١ واساسها ١ وحدها الأخير ١٠٠ = ١٠٠ لماذا؟

$$\therefore \sum_{i=1}^{100} i = ج$$

$$\text{وحيث إن } ج = \frac{n}{2} (ج + ح)$$

$$ج = \frac{100}{2} (100 + 1)$$

$$ج = \frac{101 \times 100}{2} = 5050$$

حاول أن تحل

١٠ أوجد قيمة: $\sum_{n=1}^{\infty} n$

تعميم

مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة الأولى التي عددها $n = \frac{n(n+1)}{2}$

$$\text{لاحظ أن } \sum_{n=1}^{\infty} n = \frac{46 \times 45}{2} = 1035$$

مثال (١١)

أوجد قيمة $\sum_{n=1}^{13} \frac{5}{2} n$.

الحل:

$$\sum_{n=1}^{13} \frac{5}{2} n = \frac{5}{2} (1 + 2 + 3 + \dots + 13)$$

$$= \frac{5}{2} (13 + \dots + 3 + 2 + 1)$$

$$= \frac{5}{2} \times \frac{13 \times 14}{2}$$

$$= 227,5$$

حاول أن تحل

١١ أوجد قيمة: $\sum_{n=1}^{\infty} 2n$.

مثال (١٢)

أوجد قيمة $\sum_{n=1}^9 (4 - 6n)$

الحل:

نفرض $ح_n = 4 - 6n$ هي الصيغة الصريحة للمتتالية.

$$\text{فيكون } ح_{n+1} = 4 - 6(n+1) \\ 2 + 6n =$$

$$\therefore ح_{n+1} - ح_n = (4 - 6(n+1)) - (4 - 6n) \\ 6 =$$

$$= \text{مقداراً ثابتاً}$$

$\therefore$ المتتالية (ح_ن) حيث $ح_n = 4 - 6n$ متتالية حسابية أساسها ٦.

والمطلوب هو إيجاد مجموع ٩ حدود الأولى منها وهو ج_٩.

$$\therefore \sum_{n=1}^9 (4 - 6n) = \frac{n}{2} [2ح_1 + (n-1)س]$$

$$= \frac{9}{2} [2 \times 4 + (9-1) \times (-6)]$$

$$= \frac{9}{2} \times 52$$

$$= 234$$

حاول أن تحل

١٢ أوجد قيمة $\sum_{n=1}^8 (3n + 5)$.

مثال (١٣)

أوجد قيمة $\sum_{n=1}^{\infty} 3^n$

الحل:

الصيغة الصريحة للمتتالية: $3^n = ح_n$

$$3^{n+1} = ح_{n+1}$$

$$\therefore \frac{ح_{n+1}}{ح_n} = \frac{3^{n+1}}{3^n} = 3 = \text{مقدارًا ثابتًا}$$

$\therefore$ المتتالية ($ح_n$) حيث $3^n = ح_n$ متتالية هندسية حدها الأول ٣ وأساسها ٣.

وهي على الصورة (٣، ٩، ٢٧، ...)

والمطلوب إيجاد مجموع ٨ حدود الأولى للمتتالية الهندسية.

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3^n = ح_1 \times \frac{1 - ر_n}{1 - ر}$$

$$= \frac{1 - 3^8}{1 - 3} \times 3 = 9840$$

حاول أن تحل

١٣ أوجد قيمة $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n$

المرشد لحل المسائل

١ إذا كانت الأعداد $ل$ ، $ب$ ، $ج$ ، $هـ$ ، على هذا الترتيب تمثل أبعاد المستطيلين (١)، (٢) كما في الشكل.

أ قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثل الحدود الأربعة الأولى من متتالية هندسية أساسها $س$.

ب قارن بين محيطي المستطيلين (١)، (٢). إذا كانت هذه الأعداد بنفس الترتيب تمثل الحدود الأربعة الأولى من متتالية حسابية أساسها $س$.

٢ كيف نفكر في حل المسألة

أ في المتتالية الهندسية كل حد يساوي الحد الذي يسبقه مضروباً في الأساس $س$.

$$\therefore ب = ل، ج = ب \times س = ل \times س، هـ = ج \times س = ل \times س^2$$

مساحة المستطيل = الطول $\times$ العرض

$$\text{ومنه مساحة المستطيل (١)} = ل \times هـ = ل \times ل \times س^2 = ل^3 \times س^2$$

$$\text{مساحة المستطيل (٢)} = ب \times ج = ل \times ل \times س = ل^2 \times س$$

الاستنتاج: وهكذا نستنتج أن مساحتي المستطيلين متساويتان.

ب بما أن المتتالية حسابية أساسها $س$ فإن $ب = ل$ ، $ج = ل + س$ ، $هـ = ل + س + س^2$

$$\text{محيط المستطيل (١)} = (ل + هـ) \times ٢ = (ل + ل + س + س^2) \times ٢ = ٢ل + ٢ل \times س + ٢ل \times س^2$$

$$\text{محيط المستطيل (٢)} = (ب + ج) \times ٢ = (ل + ل + س) \times ٢ = ٢ل + ٢ل \times س + ٢ل \times س^2$$

الاستنتاج: للمستطيلين المحيط نفسه.

٣ مسألة إضافية

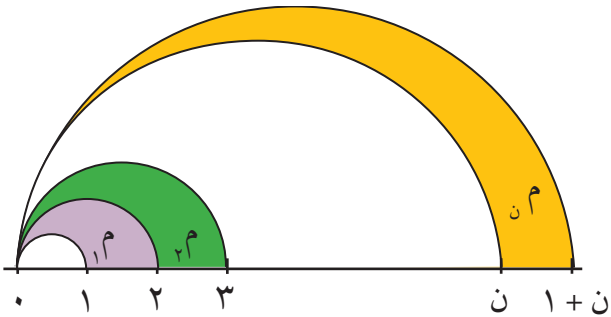
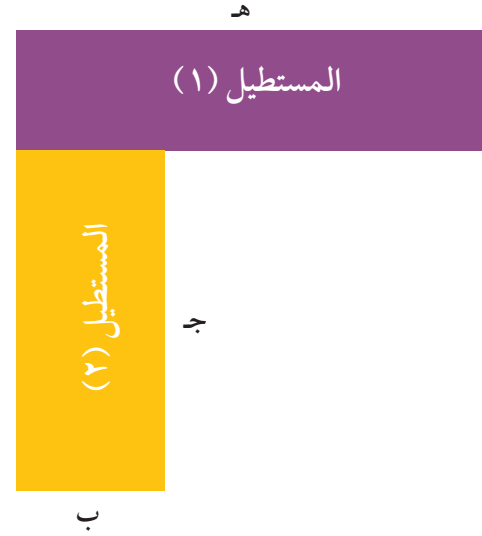
قارن بين مساحتي المستطيلين (١)، (٢) في الحالة (ب).

* ٤ تفكير منطقي

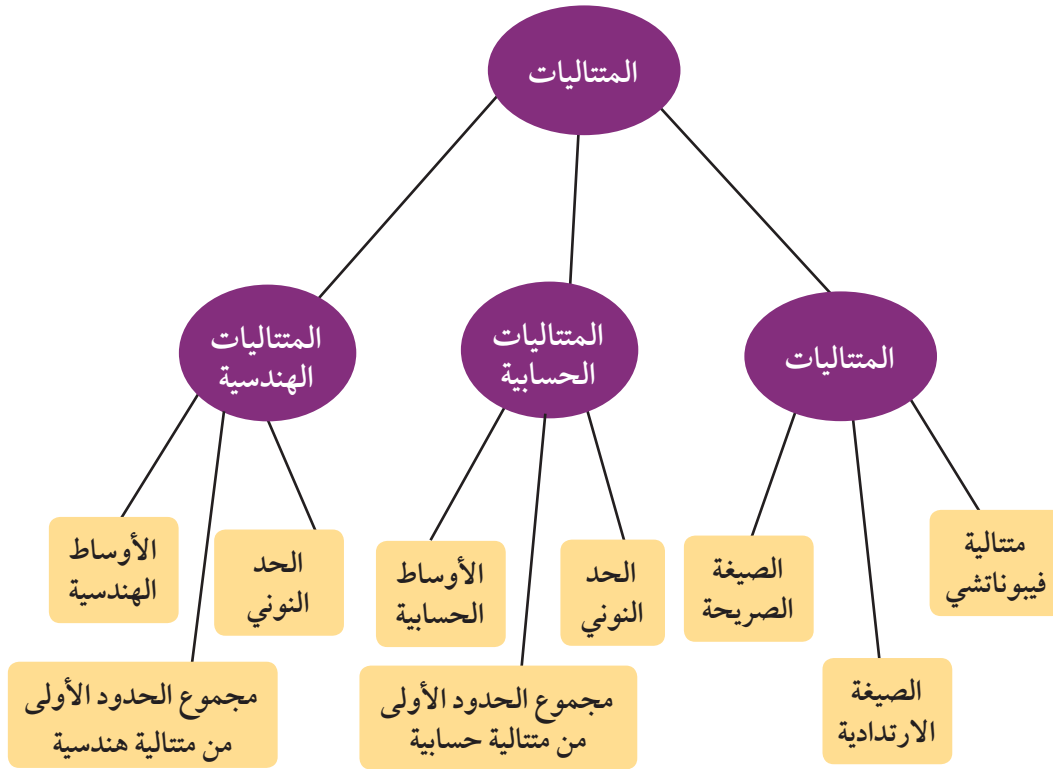
في الشكل المقابل، تمثل $م_١$ ، $م_٢$ ، ...، $م_n$ المساحات المحصورة بين أنصاف الدوائر.

أ أثبت أن المتتالية ($م_١$ ، $م_٢$ ، ...، $م_n$) حسابية.

ب احسب بطريقتين مختلفتين المجموع: $ج = م_١ + م_٢ + ... + م_n$.



مخطط تنظيمي للوحدة الخامسة



ملخص

- تعرّف الصيغة الارتدادية حدود المتتالية بربط كل حد بالحد (أو بالحدود) الذي يسبقه مباشرة.
- تعبر الصيغة الصريحة عن الحد النوني بدلالة n .
- متتالية فيبوناتشي: $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ مع $F_1 = 1, F_2 = 1$.
- في المتتالية الحسابية يكون الفرق بين كل حد والحد السابق له عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية: $H_{n+1} = H_n + d$.
- الحد النوني للمتتالية الحسابية: $H_n = H_1 + (n-1)d$.
- إذا كانت A, B, C متتالية حسابية، فإن $B = \frac{A+C}{2}$. B هو الوسط الحسابي لـ A, C .
- مجموع n حدًا الأولى من حدود متتالية حسابية: $S_n = \frac{n}{2}(H_1 + H_n)$.
- في المتتالية الهندسية إن ناتج قسمة أي حد فيها على الحد السابق له مباشرة يساوي عددًا ثابتًا يسمى أساس المتتالية الهندسية $H_{n+1} = H_n \times r$ أساس المتتالية الهندسية.
- مجموع n حد الأولى من حدود متتالية هندسية: $S_n = H_1 \times \frac{1-r^n}{1-r}$ حيث $r \neq 1$.
- إذا كانت A, B, C متتالية هندسية فإن $B^2 = A \times C$. B هو الوسط الهندسي لـ A, C وهو يساوي $\sqrt{A \times C}$ أو $-\sqrt{A \times C}$.

ملاحظات